

令和2年度 九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工), 理, 医, 歯, 薬, 工, 芸工, 農学部)

問題 1 2 3 4 5

- 1 点 $(a, 0)$ を通り, 曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。
- 2 a, b, c, d を整数とし, i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $f\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき, 以下の問いに答えよ。
- (1) c, d を a, b を用いて表せ。
 - (2) $f(1)$ を7で割ると1余り, 11で割ると10余るとする。また, $f(-1)$ を7で割ると3余り, 11で割ると10余るとする。 a の絶対値と b の絶対値がともに40以下であるとき, 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。
- 3 四面体 $OABC$ において, 辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を l , 辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m , 辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。 $l \perp m, m \perp n, n \perp l$ であり, $AB = \sqrt{5}, BC = \sqrt{3}, CA = 2$ のとき, 以下の問いに答えよ。
- (1) 直線 OB と直線 CA のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) を求めよ。
 - (2) 四面体 $OABC$ の4つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。
- 4 4個のサイコロを同時に投げるとき, 出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。
- (1) X が25の倍数になる確率を求めよ。
 - (2) X が4の倍数になる確率を求めよ。
 - (3) X が100の倍数になる確率を求めよ。
- 5 座標空間において, 中心 $(0, 2, 0)$, 半径1で xy 平面内にある円を D とする。 D を底面とし, $z \geq 0$ の部分にある高さ3の直円柱(内部を含む)を E とする。点 $(0, 2, 2)$ と x 軸を含む平面で E を2つの立体に分け, D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。
- (1) $-1 \leq t \leq 1$ とする。平面 $x = t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また, T の体積を求めよ。
 - (2) T を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad y = e^{-x} - e^{-2x} \text{ より } y' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$$

曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ 上の点 $(t, e^{-t} - e^{-2t})$ における接線の方程式は

$$y - (e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(x - t)$$

この直線が点 $(a, 0)$ を通るから

$$-(e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(a - t)$$

したがって $(e^t - 2)(a - t) = (e^t - 1) \cdots (*)$

$e^t - 2 = 0$, すなわち, $t = \log 2$ は, $(*)$ は満たさない.

$t \neq \log 2$ のとき, $(*)$ から

$$a - t = \frac{e^t - 1}{e^t - 2} \quad \text{ゆえに} \quad a = t + 1 + \frac{1}{e^t - 2}$$

$f(t) = t + 1 + \frac{1}{e^t - 2}$ とおくと

$$f'(t) = 1 - \frac{e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 2)^2 - e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 1)(e^t - 4)}{(e^t - 2)^2}$$

t	\cdots	0	\cdots	$(\log 2)$	\cdots	$2 \log 2$	\cdots
$f'(t)$	+	0	-		-	0	+
$f(t)$	\nearrow	0	\searrow		\searrow	$\frac{3}{2} + 2 \log 2$	\nearrow

このとき $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \log 2 - 0} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \log 2 + 0} f(t) = \infty,$$

したがって, $f(t)$ のとり得る値の範囲は $f(t) \leq 0$, $\frac{3}{2} + 2 \log 2 \leq f(t)$

よって, 求める a の値の範囲は $a \leq 0$, $\frac{3}{2} + 2 \log 2 \leq a$ ■

- 2 (1) $w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x) = 0$ の解であるから、 $f(x)$ は、 $(x - w)(x - \bar{w})$ 、すなわち、 $x^2 - x + 1$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + ax^2 + bx^2 + cx + d \\ &= (x^2 - x + 1)\{x^2 + (a + 1)x + a + b\} \\ &\quad + (b + c - 1)x - a - b + d \end{aligned}$$

したがって $b + c - 1 = 0, \quad -a - b + d = 0$

よって $c = 1 - b, \quad d = a + b$

- (2) (1) の結果から $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + (1 - b)x + a + b$

ゆえに $f(1) = 2a + b + 2, \quad f(-1) = 3b$

$f(1), f(-1)$ を 7 で割った余りが、それぞれ 1, 3 であるから

$$2a + b + 2 \equiv 1, \quad 3b \equiv 3 \pmod{7}$$

上の第 2 式から $b \equiv 1 \pmod{7}$ これを第 1 式に代入すると

$$2a + 1 + 2 \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad a \equiv -1 \pmod{7}$$

$f(1), f(-1)$ を 11 で割った余りが、ともに 10 であるから

$$2a + b + 2 \equiv 10, \quad 3b \equiv 10 \pmod{11}$$

上の第 2 式から $b \equiv 7 \pmod{11}$ これを第 1 式に代入すると

$$2a + 7 + 2 \equiv 10 \quad \text{ゆえに} \quad 2a \equiv 1 \pmod{11}$$

さらに $6 \cdot 2a \equiv 6 \cdot 1$ ゆえに $a \equiv 6 \pmod{11}$

$$\text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} a \equiv -1 \pmod{7} \\ a \equiv 6 \pmod{11} \end{cases} \quad (**) \begin{cases} b \equiv 1 \pmod{7} \\ b \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$$

(*) の第 1 式から、 $a = -1 + 7k$ とおき (k は整数)、これを (*) の第 2 式に代入すると

$$-1 + 7k \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad k \equiv 1 \pmod{11}$$

$k = 1 + 11\ell$ とおくと (ℓ は整数)

$$a = -1 + 7(1 + 11\ell) = 6 + 77\ell$$

a の絶対値が 40 以下であるから、 $\ell = 0$ より $a = 6 \quad \dots \textcircled{1}$

(**) の第 2 式から, $b = 7 + 11m$ とおき (m は整数), これを (**) の第 1 式に代入すると

$$7 + 11m \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 4m \equiv 1 \quad \text{したがって} \quad m \equiv 2 \pmod{7}$$

$m = 2 + 7n$ とおくと (n は整数)

$$b = 7 + 11(2 + 7n) = 29 + 77n$$

b の絶対値が 40 以下であるから, $n = 0$ より $b = 29 \dots$ ②

(1) の結果から

$$f(x) = (x^2 - x + 1)\{x^2 + (a + 1)x + a + b\}$$

①, ② をこれに代入して

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + 7x + 35)$$

$f(x) = 0$ の解は, $x^2 - x + 1 = 0$, $x^2 + 7x + 35 = 0$ を解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-7 \pm \sqrt{91}i}{2}$$

$$\text{補足 } (*) \begin{cases} a \equiv -1 \pmod{7} \\ a \equiv 6 \pmod{11} \end{cases} \quad (**) \begin{cases} b \equiv 1 \pmod{7} \\ b \equiv 7 \pmod{11} \end{cases} \quad \text{より}$$

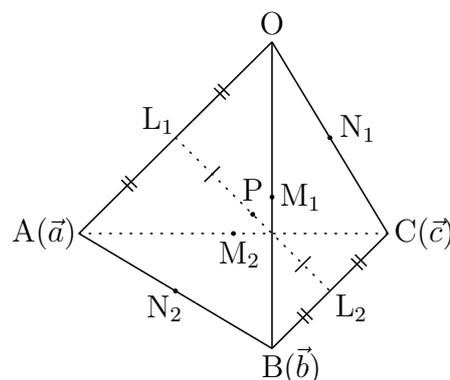
$$\begin{cases} a - 6 \equiv 0 \pmod{7} \\ a - 6 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \quad \begin{cases} b - 29 \equiv 0 \pmod{7} \\ b - 29 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

したがって $a - 6 \equiv 0$, $b - 29 \equiv 0 \pmod{77}$

a, b の絶対値がともに 40 以下であるから $a = 6$, $b = 29$ ■

- 3 (1) 点 O を始点とし, 3 点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とする. 線分 OA, OB, OC の中点をそれぞれ L_1, M_1, N_1 とし, 線分 BC, CA, AB の中点をそれぞれ L_2, M_2, N_2 とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{2L_1L_2} &= \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}, \\ \overrightarrow{2M_1M_2} &= \vec{c} + \vec{a} - \vec{b}, \\ \overrightarrow{2N_1N_2} &= \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$



直線 $\overrightarrow{L_1L_2}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{N_1N_2}$ はそれぞれ直線 l, m, n であるから, $l \perp m$ より, $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$ であるから

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{2L_1L_2}) \cdot (\overrightarrow{2M_1M_2}) &= (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} + \vec{a} - \vec{b}) \\ &= |\vec{c}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$m \perp n, n \perp l$ であるから, 同様にして

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{2M_1M_2}) \cdot (\overrightarrow{2N_1N_2}) &= (\vec{c} + \vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \\ &= |\vec{a}|^2 - |\vec{c} - \vec{b}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{2N_1N_2}) \cdot (\overrightarrow{2L_1L_2}) &= (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) \\ &= |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{c}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sim \textcircled{3} \text{ より} \quad |\vec{c}| &= |\vec{b} - \vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{5} \\ |\vec{a}| &= |\vec{c} - \vec{b}| = |\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{3} \\ |\vec{b}| &= |\vec{a} - \vec{c}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = 2 \end{aligned}$$

①~③ をそれぞれ整理すると

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 = 3 + 4 - 5 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$2\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 = 4 + 5 - 3 = 6 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 3$$

$$2\vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 5 + 3 - 4 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 2$$

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ と $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$ のなす角を φ とすると ($0 \leq \varphi \leq \pi$)

$$\cos \varphi = \frac{\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c})}{|\vec{b}| |\vec{a} - \vec{c}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}|^2} = \frac{1 - 3}{2^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

よって, 直線 OB と直線 CA のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) は

$$\theta = \pi - \varphi = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot (2\overrightarrow{L_1L_2}) &= \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} - |\vec{a}|^2 = 1 + 2 - 3 = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot (2\overrightarrow{L_1L_2}) &= (\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 5 - 4 + 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

したがって $OA \perp L_1L_2$, $BC \perp L_1L_2$

2点 L_1 , L_2 の中点を P とすると $PO = PA = PB = PC$

点 P は、四面体 $OABC$ の4頂点を通る球面の中心である。したがって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OL_1} + \overrightarrow{OL_2}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \right\} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\begin{aligned} \text{このとき } |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 3 + 4 + 5 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 24 \end{aligned}$$

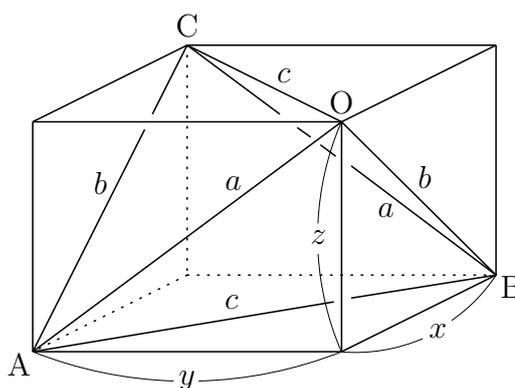
$$\text{よって、求める半径は } \frac{1}{4}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \frac{1}{4}\sqrt{24} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

補足 四面体 $OABC$ のすべての面が合同である四面体を等面四面体という。
 $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$ とすると、直方体の縦、横、高さがそれぞれ x , y , z で

$$y^2 + z^2 = a^2$$

$$z^2 + x^2 = b^2$$

$$x^2 + y^2 = c^2$$



を満たすものが唯一存在する。

$$x^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad y^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

したがって、等面四面体はこの直方体に埋め込まれ、求める球面の半径はこの長方形に外接する球面の半径 R に等しい。

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

等面四面体の体積を V とすると¹(直方体から4つの直角四面体を除く)

$$\begin{aligned} V &= xyz - 4 \cdot \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{3}xyz \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \end{aligned}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri.2015.pdf (pp.11-12)

- 4 (1) X が 5 で割り切れない, すなわち, 4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0 , X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\frac{625}{1296} + \frac{500}{1296}\right) = \frac{19}{144}$$

- (2) X が 2 で割り切れない, すなわち, 4 回とも奇数の目が出る確率を q_0 , X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (q_0 + q_1) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \frac{37}{48}$$

- (3) X が 100 の倍数となるは, 出る目の組合せが次の (i)~(iv) の場合である.

- (i) $\{A, A, 5, 5\}$ のとき ($A = 2, 6$)

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

- (ii) $\{4, 5, 5, B\}$ のとき ($B = 1, 2, 3, 6$)

$$\frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

- (iii) $\{4, 4, 5, 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

- (iv) $\{4, 5, 5, 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

- (i)~(iv) より, 求める確率は $\frac{24 + 48 + 6 + 4}{1296} = \frac{82}{1296} = \frac{41}{648}$ ■

5 (1) T の表す領域は

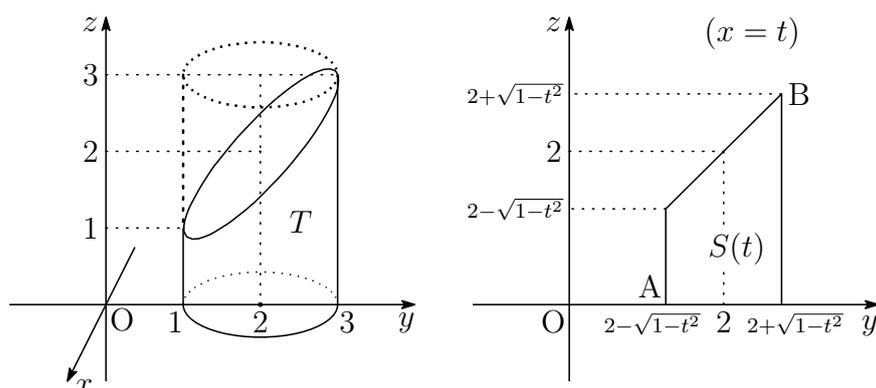
$$x^2 + (y - 2)^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq y$$

T を平面 $x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切ったときの断面を表す領域は

$$x = t, \quad 2 - \sqrt{1 - t^2} \leq y \leq 2 + \sqrt{1 - t^2}, \quad 0 \leq z \leq y$$

右下の図で中央の z 座標が 2 であることに注意して

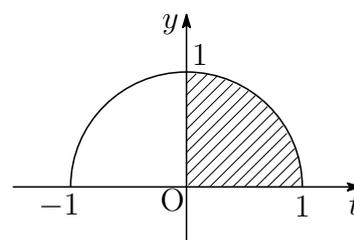
$$S(t) = 2\{(2 + \sqrt{1 - t^2}) - (2 - \sqrt{1 - t^2})\} = 4\sqrt{1 - t^2}$$



右の図の斜線部分の面積は

$$\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{\pi}{4}$$

よって、求める T の体積を V_1 とすると



$$V_1 = \int_{-1}^1 S(t) dt = \int_{-1}^1 4\sqrt{1 - t^2} dt = 8 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = 8 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

(2) 2点 A, B を (1) の図のようにとると

$$OA = 2 - \sqrt{1 - t^2}, \quad OB = \sqrt{2}(2 + \sqrt{1 - t^2})$$

求める立体の体積を V_2 とすると、 T が yz 平面に関して対称であるから

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{2\pi} &= \int_0^1 (OB^2 - OA^2) dt = \int_0^1 \{2(2 + \sqrt{1 - t^2})^2 - (2 - \sqrt{1 - t^2})^2\} dt \\ &= \int_0^1 (5 - t^2) dt + 12 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \left[5t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 + 12 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{14}{3} + 3\pi \end{aligned}$$

よって $V_2 = 2\pi \left(\frac{14}{3} + 3\pi \right)$ ■