令和２年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

1 点 $(a,\ 0)$ を通り，曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

2 a，b，c，d を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) c，d を a，b を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を 7 で割ると 1 余り，11 で割ると 10 余るとする。また，$f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り，11 で割ると 10 余るとする。a の絶対値と b の絶対値がともに 40 以下であるとき，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

3 四面体 OABC において，辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を ℓ，辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m，辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。$\ell \perp m$，$m \perp n$，$n \perp \ell$ であり，$\mathrm{AB} = \sqrt{5}$，$\mathrm{BC} = \sqrt{3}$，$\mathrm{CA} = 2$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線 OB と直線 CA のなす角 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

(2) 四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。

4 4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

5 座標空間において，中心 $(0,\ 2,\ 0)$，半径 1 で xy 平面内にある円を D とする。D を底面とし，$z \geqq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱 (内部を含む) を E とする。点 $(0,\ 2,\ 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け，D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。

(1) $-1 \leqq t \leqq 1$ とする。平面 $x = t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また，T の体積を求めよ。

(2) T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $y=e^{-x}-e^{-2x}$ より　$y'=-e^{-x}+2e^{-2x}$

曲線 $y=e^{-x}-e^{-2x}$ 上の点 $(t,\ e^{-t}-e^{-2t})$ における接線の方程式は

$$y-(e^{-t}-e^{-2t})=(-e^{-t}+2e^{-2t})(x-t)$$

この直線が点 $(a,\ 0)$ を通るから

$$-(e^{-t}-e^{-2t})=(-e^{-t}+2e^{-2t})(a-t)$$

したがって　$(e^t-2)(a-t)=(e^t-1)\quad\cdots(*)$

$e^t-2=0$，すなわち，$t=\log 2$ は，$(*)$ は満たさない．

$t\neq\log 2$ のとき，$(*)$ から

$$a-t=\frac{e^t-1}{e^t-2}\quad \text{ゆえに}\quad a=t+1+\frac{1}{e^t-2}$$

$f(t)=t+1+\dfrac{1}{e^t-2}$ とおくと

$$f'(t)=1-\frac{e^t}{(e^t-2)^2}=\frac{(e^t-2)^2-e^t}{(e^t-2)^2}=\frac{(e^t-1)(e^t-4)}{(e^t-2)^2}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$(\log 2)$	$\cdots$	$2\log 2$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{3}{2}+2\log 2$	$\nearrow$

このとき　$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty,\quad \lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$

$\displaystyle\lim_{t\to\log 2-0}f(t)=-\infty,\quad \lim_{t\to\log 2+0}f(t)=\infty,$

したがって，$f(t)$ のとり得る値の範囲は　$f(t)\leqq 0,\ \ \dfrac{3}{2}+2\log 2\leqq f(t)$

よって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a\leqq 0,\ \ \dfrac{3}{2}+2\log 2\leqq a}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x)=0$ の解であるから，$f(x)$ は，$(x-w)(x-\overline{w})$，すなわち，x^2-x+1 を因数にもつ．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4+ax^2+bx^2+cx+d \\ &= (x^2-x+1)\{x^2+(a+1)x+a+b\} \\ &\qquad\qquad +(b+c-1)x-a-b+d \end{aligned}$$

したがって　$b+c-1=0,\quad -a-b+d=0$

よって　$\boldsymbol{c=1-b,\ \ d=a+b}$

(2) (1) の結果から　$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+(1-b)x+a+b$

ゆえに　$f(1)=2a+b+2,\ \ f(-1)=3b$

$f(1)$，$f(-1)$ を 7 で割った余りが，それぞれ 1，3 であるから

$$2a+b+2\equiv 1,\quad 3b\equiv 3 \pmod 7$$

上の第 2 式から　$b\equiv 1 \pmod 7$　これを第 1 式に代入すると

$$2a+1+2\equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad a\equiv -1 \pmod 7$$

$f(1)$，$f(-1)$ を 11 で割った余りが，ともに 10 であるから

$$2a+b+2\equiv 10,\quad 3b\equiv 10 \pmod{11}$$

上の第 2 式から　$b\equiv 7 \pmod{11}$　これを第 1 式に代入すると

$$2a+7+2\equiv 10 \quad \text{ゆえに} \quad 2a\equiv 1 \pmod{11}$$

さらに　$6\cdot 2a\equiv 6\cdot 1$　ゆえに　$a\equiv 6 \pmod{11}$

ゆえに　$(*)\left\{\begin{array}{l} a\equiv -1 \pmod 7 \\ a\equiv 6 \pmod{11} \end{array}\right.$　　$(**)\left\{\begin{array}{l} b\equiv 1 \pmod 7 \\ b\equiv 7 \pmod{11} \end{array}\right.$

$(*)$ の第 1 式から，$a=-1+7k$ とおき (k は整数)，これを $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$-1+7k\equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad k\equiv 1 \pmod{11}$$

$k=1+11\ell$ とおくと (ℓ は整数)

$$a=-1+7(1+11\ell)=6+77\ell$$

a の絶対値が 40 以下であるから，$\ell=0$ より　$a=6$　$\cdots$①

$(**)$ の第 2 式から，$b=7+11m$ とおき (m は整数)，これを $(**)$ の第 1 式に代入すると

$$7+11m \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 4m \equiv 1 \quad \text{したがって} \quad m \equiv 2 \pmod 7$$

$m=2+7n$ とおくと (n は整数)

$$b=7+11(2+7n)=29+77n$$

b の絶対値が 40 以下であるから，$n=0$ より　$b=29$　$\cdots$②

(1) の結果から

$$f(x)=(x^2-x+1)\{x^2+(a+1)x+a+b\}$$

①，② をこれに代入して

$$f(x)=(x^2-x+1)(x^2+7x+35)$$

$f(x)=0$ の解は，$x^2-x+1=0$，$x^2+7x+35=0$ を解いて

$$\boldsymbol{x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-7\pm\sqrt{91}i}{2}}$$

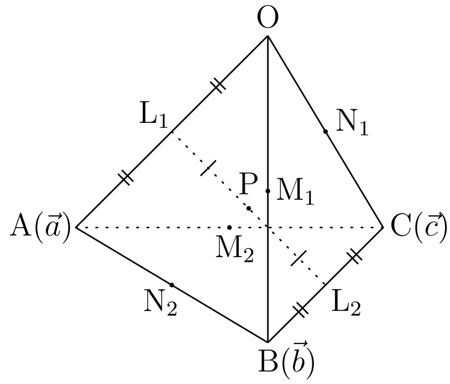
補足　$(*)\begin{cases} a \equiv -1 \pmod 7 \\ a \equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$　　$(**)\begin{cases} b \equiv 1 \pmod 7 \\ b \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$ より

$$\begin{cases} a-6 \equiv 0 \pmod 7 \\ a-6 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} b-29 \equiv 0 \pmod 7 \\ b-29 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

したがって　$a-6 \equiv 0,\ \ b-29 \equiv 0 \pmod{77}$

$a,\ b$ の絶対値がともに 40 以下であるから　$a=6$，$b=29$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 点Oを始点とし，3点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とする．線分OA，OB，OCの中点をそれぞれ$\mathrm{L_1}$，$\mathrm{M_1}$，$\mathrm{N_1}$とし，線分BC，CA，ABの中点をそれぞれ$\mathrm{L_2}$，$\mathrm{M_2}$，$\mathrm{N_2}$とすると



$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}} &= \vec{b}+\vec{c}-\vec{a}, \\ 2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}} &= \vec{c}+\vec{a}-\vec{b}, \\ 2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}} &= \vec{a}+\vec{b}-\vec{c} \end{aligned}$$

直線$\mathrm{L_1L_2}$，$\mathrm{M_1M_2}$，$\mathrm{N_1N_2}$はそれぞれ直線ℓ，m，nであるから，$\ell\perp m$より，$\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}\perp\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$であるから

$$\begin{aligned} (2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}) &= (\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}) \\ &= |\vec{c}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2=0 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$m\perp n$，$n\perp\ell$であるから，同様にして

$$\begin{aligned} (2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}}) &= (\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}) \\ &= |\vec{a}|^2-|\vec{c}-\vec{b}|^2=0 \quad \cdots ② \\ (2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) &= (\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) \\ &= |\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{c}|^2=0 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

①〜③より
$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= |\vec{b}-\vec{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \mathrm{AB} = \sqrt{5} \\ |\vec{a}| &= |\vec{c}-\vec{b}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \mathrm{BC} = \sqrt{3} \\ |\vec{b}| &= |\vec{a}-\vec{c}| = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = \mathrm{CA} = 2 \end{aligned}$$

①〜③をそれぞれ整理すると

$$\begin{aligned} 2\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2 = 3+4-5=2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=1 \\ 2\vec{b}\cdot\vec{c} &= |\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2 = 4+5-3=6 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{b}\cdot\vec{c}=3 \\ 2\vec{c}\cdot\vec{a} &= |\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2 = 5+3-4=4 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{c}\cdot\vec{a}=2 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$と$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}-\vec{c}$のなす角を$\varphi$とすると$(0\leqq\varphi\leqq\pi)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})}{|\vec{b}||\vec{a}-\vec{c}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2} = \frac{1-3}{2^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \varphi=\frac{2\pi}{3}$$

よって，直線OBと直線CAのなす角θ $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$は

$$\theta = \pi-\varphi = \pi-\frac{2\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2 = 1+2-3=0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) &= (\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = |\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 5-4+1-2=0\end{aligned}$$

したがって　　$\mathrm{OA}\perp\mathrm{L_1L_2}$，$\mathrm{BC}\perp\mathrm{L_1L_2}$

2 点 $\mathrm{L_1}$，$\mathrm{L_2}$ の中点を P とすると　$\mathrm{PO}=\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$

点 P は，四面体 OABC の 4 頂点を通る球面の中心である．したがって

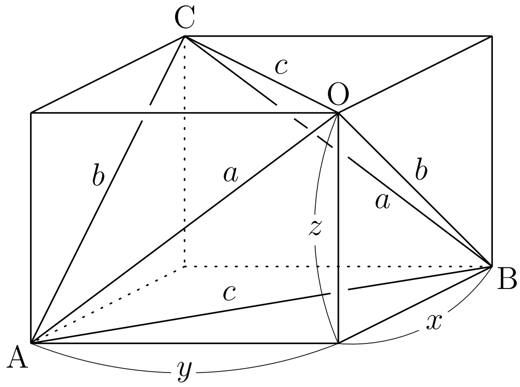
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OL_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OL_2}}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

このとき　$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$$= 3+4+5+2\cdot1+2\cdot3+2\cdot2 = 24$$

よって，求める半径は　$\dfrac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \dfrac{1}{4}\sqrt{24} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

補足　四面体 OABC のすべての面が合同である四面体を等面四面体という．$a=\mathrm{OA}$，$b=\mathrm{OB}$，$c=\mathrm{OC}$ とすると，直方体の縦，横，高さがそれぞれ x，y，z で



$$\begin{aligned}y^2+z^2&=a^2\\ z^2+x^2&=b^2\\ x^2+y^2&=c^2\end{aligned}$$

を満たすものが唯一存在する．

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2},\quad z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

したがって，等面四面体はこの直方体に埋め込まれ，求める球面の半径はこの長方形に外接する球面の半径 R に等しい．

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

等面四面体の体積を V とすると [1](直方体から 4 つの直角四面体を除く)

$$\begin{aligned}V&=xyz-4\cdot\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{3}xyz\\ &=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (pp.11-12)

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) X が 5 で割り切れない，すなわち，4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0，X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296},\quad p_1 = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1-(p_0+p_1) = 1-\left(\frac{626}{1296}+\frac{500}{1296}\right) = \mathbf{\frac{19}{144}}$$

(2) X が 2 で割り切れない，すなわち，4 回とも奇数の目が出る確率を q_0，X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16},\quad q_1 = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1-(q_0+q_1) = 1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\right) = \mathbf{\frac{37}{48}}$$

(3) X が 100 の倍数となるは，出る目の組合せが次の (i)〜(iv) の場合である．

(i) $\{\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ 5,\ 5\}$ のとき $(\mathrm{A}=2,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

(ii) $\{4,\ 5,\ 5,\ \mathrm{B}\}$ のとき $(\mathrm{B}=1,\ 2,\ 3,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

(iii) $\{4,\ 4,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

(iv) $\{4,\ 5,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

(i)〜(iv) より，求める確率は $\dfrac{24+48+6+4}{1296} = \dfrac{82}{1296} = \mathbf{\dfrac{41}{648}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) T の表す領域は

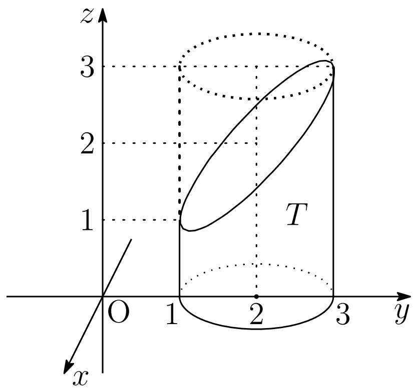
$$x^2+(y-2)^2 \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq y$$

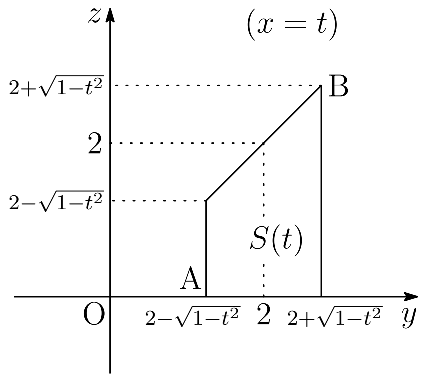
T を平面 $x=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの断面を表す領域は

$$x=t, \quad 2-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 2+\sqrt{1-t^2}, \quad 0 \leqq z \leqq y$$

右下の図で中央の z 座標が 2 であることに注意して

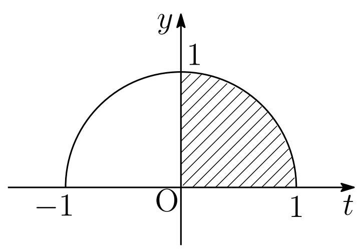
$$S(t)=2\{(2+\sqrt{1-t^2})-(2-\sqrt{1-t^2})\}=\boldsymbol{4\sqrt{1-t^2}}$$





右の図の斜線部分の面積は

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$$



よって，求める T の体積を V_1 とすると

$$V_1=\int_{-1}^1 S(t)\,dt=\int_{-1}^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt=8\int_0^1 \sqrt{1-t^2}=8\cdot\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{2\pi}$$

(2) 2 点 A，B を (1) の図のようにとると

$$\mathrm{OA}=2-\sqrt{1-t^2}, \quad \mathrm{OB}=\sqrt{2}(2+\sqrt{1-t^2})$$

求める立体の体積を V_2 とすると，T が yz 平面に関して対称であるから

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{2\pi}&=\int_0^1(\mathrm{OB}^2-\mathrm{OA}^2)\,dt=\int_0^1\{2(2+\sqrt{1-t^2})^2-(2-\sqrt{1-t^2})^2\}\,dt\\&=\int_0^1(5-t^2)\,dt+12\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\left[\,5t-\frac{t^3}{3}\,\right]_0^1+12\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{14}{3}+3\pi\end{aligned}$$

よって　　$V_2=\boldsymbol{2\pi\left(\frac{14}{3}+3\pi\right)}$