平成31年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

1 nを自然数とする。x，yがすべての実数を動くとき，定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 \, dt$$

の最小値をI_nとおく。極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$を求めよ。

2 0でない2つの整式$f(x)$，$g(x)$が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2+2)g(x) + 7$$
$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$の次数と$g(x)$の次数はともに2以下であることを示せ。

(2) $f(x)$と$g(x)$を求めよ。

3 1個のサイコロを3回投げて出た目を順にa，b，cとする。2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の2つの解z_1，z_2を表す複素数平面上の点をそれぞれ$\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$とする。また，複素数平面上の原点をOとする。以下の問いに答えよ。

(1) P_1とP_2が一致する確率を求めよ。

(2) P_1とP_2がともに単位円の周上にある確率を求めよ。

(3) P_1とOを通る直線をℓ_1とし，P_2とOを通る直線をℓ_2とする。ℓ_1とℓ_2のなす鋭角が$60°$である確率を求めよ。

4 座標平面上の3点O(0, 0)，A(2, 0)，B(1, $\sqrt{3}$)を考える。点P_1は線分AB上にあり，A，Bとは異なる点とする。

線分AB上の点P_2，P_3，$\cdots\cdots$を以下のように順に定める。点P_nが定まったとき，点P_nから線分OBに下ろした垂線とOBとの交点をQ_nとし，点Q_nから線分OAに下ろした垂線とOAとの交点をR_nとし，点R_nから線分ABに下ろした垂線とABとの交点をP_{n+1}とする。

$n\to\infty$のとき，P_nが限りなく近づく点の座標を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ a，b を複素数，c を純虚数でない複素数とし，i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が虚軸全体を動くとき

$$w = \frac{az+b}{cz+1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア) $z = i$ のときに $w = i$ となり，$z = -i$ のときに $w = -i$ となる。

(イ) C は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a，b，c の値を求めよ。さらに C を求め，複素数平面上に図示せよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ まず，次の定積分を計算する．

$$\int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos 4n\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\Big[\ t - \frac{1}{4n\pi}\sin 4n\pi t\ \Big]_0^1 = \frac{1}{2},$$
$$\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt = \Big[\ -\frac{t}{2n\pi}\cos 2n\pi t + \frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi t\ \Big]_0^1 = -\frac{1}{2n\pi},$$
$$\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi}\Big[\ \cos 2n\pi t\ \Big]_0^1 = 0,$$
$$\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3},\quad \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2},\quad \int_0^1 dt = 1$$

上の結果により

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2\,dt \\
&\qquad = \int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt + x^2\int_0^1 t^2\,dt + y^2\int_0^1 dt \\
&\qquad\qquad - 2x\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt - 2y\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt + 2xy\int_0^1 t\,dt \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 - 2x\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) - 2y\cdot 0 + 2xy\cdot\frac{1}{2} \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 + \frac{x}{n\pi} + xy \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{12} + \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2} \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} \qquad \cdots(*)
\end{aligned}$$

したがって　$x = -\dfrac{6}{n\pi}$，$y = \dfrac{3}{n\pi}$ のとき，$(*)$ は最小値 $I_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{n^2\pi^2}$ をとる．

よって　　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}}$

別解 $\displaystyle\int_0^1 dt=1$，$\displaystyle\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$ より，$f(t)=t-\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\int_0^1 f(t)\,dt=0,\quad \int_0^1 f(t)^2\,dt=\frac{1}{3}\left[\ \left(t-\frac{1}{2}\right)^3\ \right]_0^1=\frac{1}{12}$$

$\displaystyle\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt=0$，$\displaystyle\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt=-\frac{1}{2n\pi}$ より

$$\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt=-\frac{1}{2n\pi}=-\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{1}{12}=-\frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)^2\,dt$$

したがって　$\displaystyle\int_0^1 f(t)\left\{\sin 2n\pi t+\frac{6}{n\pi}f(t)\right\}dt=0$

$g(t)=\sin 2n\pi t+\dfrac{6}{n\pi}f(t)$ とおくと　$\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt=0$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)\,dt&=\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt+\frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)\,dt=0,\\ \int_0^1 g(t)^2\,dt&=\int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt+\frac{12}{n\pi}\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt+\frac{36}{n^2\pi^2}\int_0^1 f(t)^2\,dt\\ &=\frac{1}{2}+\frac{12}{n\pi}\left(-\frac{1}{2n\pi}\right)+\frac{36}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}\end{aligned}$$

$\sin 2n\pi t=-\dfrac{6}{n\pi}f(t)+g(t)$，$t=f(t)+\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\sin 2n\pi t-xt-y&=-\frac{6}{n\pi}f(t)+g(t)-x\left(f(t)+\frac{1}{2}\right)-y\\ &=-\left(x+\frac{6}{n\pi}\right)f(t)+g(t)-\left(\frac{x}{2}+y\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1(\sin 2n\pi t-xt-y)^2\,dt&=\left(x+\frac{6}{n\pi}\right)^2\int_0^1 f(t)^2\,dt+\int_0^1 g(t)^2\,dt+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2\\ &=\frac{1}{12}\left(x+\frac{6}{n\pi}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2\\ &\geqq\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}=I_n\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\begin{cases} f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2 \end{cases}$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とする．$(*)$ の第 1 式から，$f(x)$ と $g(x)$ の最高次の係数が等しいことに注意して

$$\begin{cases} 2m=2+n & \cdots① \\ 3n=\max(4+m,\ 2+n) & \cdots② \end{cases}$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より　$3n=4+m$　ゆえに　$m=3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと　$m=n=2$

(ii) $4+m<2+n$ のとき，② より　$3n=2+n$　ゆえに　$n=1$
これを ① に代入すると，$m=\dfrac{3}{2}$ となり，不適．

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから，題意は成立する．

(2) $(*)$ の第 1 式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2)=(x^2+2)g(-x)+7$$

これと $(*)$ の第 1 式により　$g(-x)=g(x)$　$\cdots③$
また，$(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3)=x^4f(-x)-3x^2g(-x)-6x^2-2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3)=x^4f(-x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$

これと $(*)$ の第 2 式より　$f(-x)=f(x)$
また，$(*)$ に $x=0$ を代入すると

$$f(0)=2g(0)+7,\quad g(0)=-2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0)=3$$

以上の結果から，$f(x)=ax^2+3$，$g(x)=ax^2-2$ とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4+3=(x^2+2)(ax^2-2)+7 \\ ax^6-2=x^4(ax^2+3)-3x^2(ax^2-2)-6x^2-2 \end{cases}$$

整理すると　$\begin{cases} 2(a-1)x^2=0 \\ -3(a-1)x^4=0 \end{cases}$　ゆえに　$a=1$

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2+3,\ g(x)=x^2-2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2次方程式 $ax^2+bx+c=0\cdots(*)$ の解 z_1，z_2 が $z_1=z_2$，すなわち，2次方程式 $(*)$ が重解をもつ確率である．係数について，$b^2-4ac=0$ であるから，$b^2=4ac$ より

$b=2$ のとき，$ac=1$ より　$(a,\ c)=(1,\ 1)$

$b=4$ のとき，$ac=4$ より　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

$b=6$ のとき，$ac=9$ より　$(a,\ c)=(3,\ 3)$

よって，求める確率は　$\dfrac{1+3+1}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{216}}$

(2) (i) 2次方程式 $(*)$ が単位円周上に実数解をもつとき，その解は1ではないから，$(*)$ は -1 を重解にもち，その方程式は

$$a(x+1)^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad b=2a,\ \ c=a$$

これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の3組である．

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 2),\ (3,\ 6,\ 3)$$

(ii) 2次方程式 $(*)$ が単位円周上に虚数解をもつとき　$b^2-4ac<0$　$\cdots$①

$(*)$ の解と係数の関係および $z_2=\overline{z_1}$，$|z_1|=1$ に注意して

$$z_1z_2=\frac{c}{a} \quad \text{ゆえに} \quad |z_1|^2=\frac{c}{a} \quad \text{すなわち} \quad c=a \quad \cdots②$$

② を ① に代入して　$b^2-4a^2<0$　ゆえに　$\dfrac{b}{2}<a=c$

$b=1$ のとき　$a=c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$b=2,\ 3$ のとき　$a=c=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$b=4,\ 5$ のとき　$a=c=3,\ 4,\ 5,\ 6$

$b=6$ のとき　$a=c=4,\ 5,\ 6$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$6+2\cdot5+2\cdot4+3=27$ 組

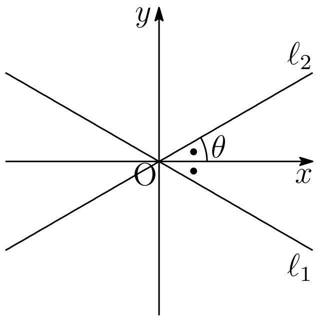
よって，求める確率は　$\dfrac{3+27}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{36}}$

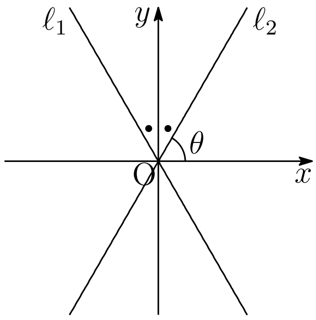
(3) 条件を満たす z_1，z_2 は虚数であるから

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b-\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$$

ℓ_2 の偏角を θ とすると　$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{b}$

(i) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$





(i) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より

$$\sqrt{3(4ac-b^2)} = b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = 3ac$$

$b=3$ のとき，$ac=3$ より　$(a,\ c)=(1,\ 3),\ (3, 1)$
$b=6$ のとき，$ac=12$ より　$(a,\ c)=(2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$2+4=6$ 組

(ii) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{b} = \sqrt{3}$ より

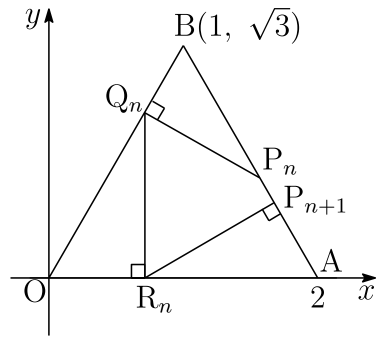
$$\sqrt{4ac-b^2} = \sqrt{3}b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = ac$$

$b=1$ のとき，$ac=1$ より　$(a,\ c)=(1,\ 1)$
$b=2$ のとき，$ac=4$ より　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
$b=3$ のとき，$ac=9$ より　$(a,\ c)=(3,\ 3)$
$b=4$ のとき，$ac=16$ より　$(a,\ c)=(4,\ 4)$
$b=5$ のとき，$ac=25$ より　$(a,\ c)=(5,\ 5)$
$b=6$ のとき，$ac=36$ より　$(a,\ c)=(6,\ 6)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$5\cdot 1+3=8$ 組

よって，求める確率は　$\dfrac{6+8}{6^3} = \mathbf{\dfrac{7}{108}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を通り，直線 OB に垂直な直線は



$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$

これと直線 OB : $y = \sqrt{3}x$ の交点の x 座標は

$$\sqrt{3}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$

これを解くことにより，点 Q_n の x 座標は　$x = \dfrac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$

次に，点 $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を通り，直線 AB に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

これを解くことにより，点 R_n の x 座標は　$x = x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1}$

点 Q_n と点 R_n の x 座標は等しいから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$$

2 点 P_n，P_{n+1} は直線 AB : $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 上の点であるから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_{n+1} + 2\sqrt{3}) = \frac{x_n + \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3})}{4}$$

整理すると　$x_{n+1} = -\dfrac{1}{8}x_n + \dfrac{15}{8}$　ゆえに　$x_{n+1} - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{1}{8}\left(x_n - \dfrac{5}{3}\right)$

数列 $\left\{x_n - \dfrac{5}{3}\right\}$ は初項 $x_1 - \dfrac{5}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$x_n - \frac{5}{3} = \left(x_1 - \frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad ゆえに \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{5}{3}$$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}\cdot\frac{5}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

よって，求める点の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $$C : w = \frac{az+b}{cz+1} \quad \cdots (*)$$

条件 (ア) により　$i = \dfrac{ai+b}{ci+1}, \quad -i = \dfrac{a(-i)+b}{c(-i)+1}$

ゆえに　$b+c+(a-1)i = 0, \quad b+c-(a-1)i = 0$

上の 2 式から　$a = 1, \quad b = -c$

これを $(*)$ に代入すると　$w = \dfrac{z-c}{cz+1} \cdots ①$　ゆえに　$z = -\dfrac{w+c}{cw-1}$

点 z は虚軸全体を動くから，$z + \overline{z} = 0$ より　$-\dfrac{w+c}{cw-1} - \dfrac{\overline{w}-\overline{c}}{\overline{c}\,\overline{w}-1} = 0$

整理すると　$(c+\overline{c})|w|^2 + (|c|^2-1)(w+\overline{w}) - (c+\overline{c}) = 0 \quad \cdots ②$

条件 (イ) に注意すると，① により　$c \neq 0$

さらに，c は純虚数ではないから　$c + \overline{c} \neq 0$

$k = \dfrac{|c|^2-1}{c+\overline{c}} \cdots ③$ とおいて (k は実数)，② に適用すると

$$|w|^2 + k(w+\overline{w}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |w+k|^2 = k^2+1$$

条件 (イ) により　$k^2+1 = 1$　ゆえに　$k = 0$　よって　$|w| = 1 \quad \cdots (**)$

また，③ により　$|c|^2 - 1 = 0$　ゆえに　$c = \pm 1$

(i) $c = 1$ のとき，① により

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2z}{z+1}$$

$z = 0$ のとき，$w = -1$ となり，条件 (ウ) に反する．

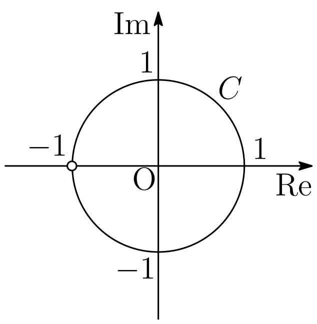
(ii) $c = -1$ のとき，① により

$$w = \frac{z+1}{-z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2}{-z+1} \neq 0$$

これは，条件 (ウ) を満たす．

よって　$\boldsymbol{a = 1,\ b = 1,\ c = -1}$

$(**)$ および $w \neq -1$ により，C の概形は右の図のようになる．



補足 $z=i\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を $w=\dfrac{z+1}{-z+1}$ に代入すると

$$w=\frac{i\tan\theta+1}{-i\tan\theta+1}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

$-\pi<2\theta<\pi$ より，w は点 -1 を除く原点 O を中心とする単位円周上にある．

解説 一般に，1 次分数式変換 (メビウス変換)

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad (a,\ b,\ c,\ d\text{ は複素数},\ ad-bc\neq 0)$$

は，拡縮 (回転)kz，平行移動 $z+\alpha$，反転 $\dfrac{1}{z}$ の合成変換である．
特に反転に関して，次の性質がある[1]．

- 原点を通らない円は，原点を通らない円に移る．
- 原点を通る円は，原点を通らない直線に移る．
- 原点を通らない直線は，原点を通る円から原点を除いた図形に移る．
- 原点を通る直線は，原点を通る直線から原点を除いた図形に移る．

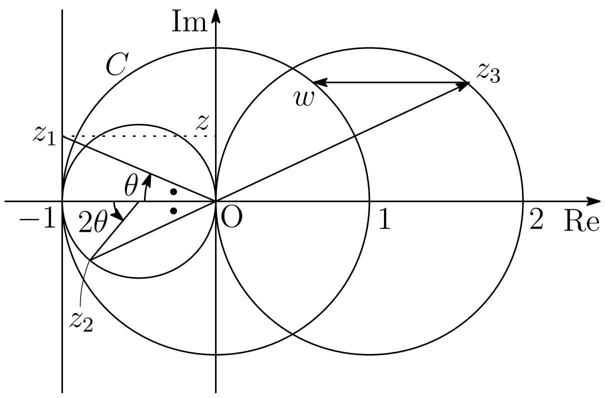
次の変換 (平行移動，反転，拡縮，平行移動)

$$f_1(z)=z-1,\quad f_2(z)=\frac{1}{z},\quad f_3(z)=-2z,\quad f_4(z)=z-1$$

について，合成変換 $f(z)=f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1(z)$ は　　$f(z)=\dfrac{z+1}{-z+1}$

$z=i\tan\theta$，$z_1=f_1(z)$，$z_2=f_2(z_1)$，$z_3=f_3(z_2)$，$w=f_4(z_3)$ とすると

$$\begin{aligned}z_2=f_2\circ f_1(z)&=\frac{1}{i\tan\theta-1}=\frac{-\cos\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\\&=-\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\end{aligned}$$



[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf $\boxed{3}$ の解説を参照．