平成 31 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

問題 1 2 3 4 5

1 n を自然数とする。x，y がすべての実数を動くとき，定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2\, dt$$

の最小値を I_n とおく。極限値 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

2 0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2+2)g(x) + 7$$
$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

3 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目を順に a，b，c とする。2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの解 z_1，z_2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ とする。また，複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。

(2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。

(3) P_1 と O を通る直線を ℓ_1 とし，P_2 と O を通る直線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 のなす鋭角が 60° である確率を求めよ。

4 座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ \sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり，A，B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 $\mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \cdots\cdots$ を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \to \infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

5 a，b を複素数，c を純虚数でない複素数とし，i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が虚軸全体を動くとき

$$w = \frac{az + b}{cz + 1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア) $z = i$ のときに $w = i$ となり，$z = -i$ のときに $w = -i$ となる。

(イ) C は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a，b，c の値を求めよ。さらに C を求め，複素数平面上に図示せよ。

解答例

1 まず，次の定積分を計算する．

$$\int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos 4n\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\, t - \frac{1}{4n\pi}\sin 4n\pi t \,\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt = \left[\, -\frac{t}{2n\pi}\cos 2n\pi t + \frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi t \,\right]_0^1 = -\frac{1}{2n\pi},$$

$$\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi}\left[\, \cos 2n\pi t \,\right]_0^1 = 0,$$

$$\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}, \quad \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 dt = 1$$

上の結果により

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2\,dt \\
&\qquad = \int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt + x^2\int_0^1 t^2\,dt + y^2\int_0^1 dt \\
&\qquad\qquad - 2x\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt - 2y\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt + 2xy\int_0^1 t\,dt \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 - 2x\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) - 2y\cdot 0 + 2xy\cdot\frac{1}{2} \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 + \frac{x}{n\pi} + xy \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{12} + \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2} \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} \qquad \cdots(*)
\end{aligned}$$

したがって　$x = -\dfrac{6}{n\pi}$，$y = \dfrac{3}{n\pi}$ のとき，$(*)$ は最小値 $I_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{n^2\pi^2}$ をとる．

よって　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}}$

別解 $\displaystyle\int_0^1 dt = 1,\ \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ より，$f(t) = t - \frac{1}{2}$ とおくと

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 0, \quad \int_0^1 f(t)^2\,dt = \frac{1}{3}\left[\ \left(t-\frac{1}{2}\right)^3\ \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$\displaystyle\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt = 0,\ \int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi}$ より

$$\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi} = -\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{1}{12} = -\frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)^2\,dt$$

したがって $\displaystyle\int_0^1 f(t)\left\{\sin 2n\pi t + \frac{6}{n\pi}f(t)\right\}dt = 0$

$g(t) = \sin 2n\pi t + \dfrac{6}{n\pi}f(t)$ とおくと $\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = 0$

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt + \frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)\,dt = 0,$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)^2\,dt &= \int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt + \frac{12}{n\pi}\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt + \frac{36}{n^2\pi^2}\int_0^1 f(t)^2\,dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{12}{n\pi}\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) + \frac{36}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2}\end{aligned}$$

$\sin 2n\pi t = -\dfrac{6}{n\pi}f(t) + g(t),\ t = f(t) + \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\sin 2n\pi t - xt - y &= -\frac{6}{n\pi}f(t) + g(t) - x\left(f(t)+\frac{1}{2}\right) - y \\ &= -\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)f(t) + g(t) - \left(\frac{x}{2} + y\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\sin 2n\pi t - xt - y)^2\,dt &= \left(x+\frac{6}{n\pi}\right)^2\int_0^1 f(t)^2\,dt + \int_0^1 g(t)^2\,dt + \left(\frac{x}{2}+y\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}\left(x+\frac{6}{n\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} + \left(\frac{x}{2}+y\right)^2 \\ &\geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} = I_n\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}$ ■

2 (1) 2つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\begin{cases} f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2 \end{cases}$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とする．$(*)$ の第1式から，$f(x)$ と $g(x)$ の最高次の係数が等しいことに注意して

$$\begin{cases} 2m=2+n & \cdots ① \\ 3n=\max(4+m,\ 2+n) & \cdots ② \end{cases}$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より　$3n=4+m$　ゆえに　$m=3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと　$m=n=2$

(ii) $4+m<2+n$ のとき，② より　$3n=2+n$　ゆえに　$n=1$
これを ① に代入すると，$m=\dfrac{3}{2}$ となり，不適．

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに2であるから，題意は成立する．

(2) $(*)$ の第1式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2)=(x^2+2)g(-x)+7$$

これと $(*)$ の第1式により　　$g(-x)=g(x)$　$\cdots ③$
また，$(*)$ の第2式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3)=x^4f(-x)-3x^2g(-x)-6x^2-2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3)=x^4f(-x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$

これと $(*)$ の第2式より　　$f(-x)=f(x)$
また，$(*)$ に $x=0$ を代入すると

$$f(0)=2g(0)+7,\ \ g(0)=-2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0)=3$$

以上の結果から，$f(x)=ax^2+3$，$g(x)=ax^2-2$ とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4+3=(x^2+2)(ax^2-2)+7 \\ ax^6-2=x^4(ax^2+3)-3x^2(ax^2-2)-6x^2-2 \end{cases}$$

整理すると　$\begin{cases} 2(a-1)x^2=0 \\ -3(a-1)x^4=0 \end{cases}$　ゆえに　$a=1$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=x^2+3,\ \ g(x)=x^2-2}$　■

3 (1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\cdots(*)$ の解 z_1，z_2 が $z_1=z_2$，すなわち，2 次方程式 $(*)$ が重解をもつ確率である．係数について，$b^2-4ac=0$ であるから，$b^2=4ac$ より

$b=2$ のとき，$ac=1$ より　$(a,\ c)=(1,\ 1)$
$b=4$ のとき，$ac=4$ より　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
$b=6$ のとき，$ac=9$ より　$(a,\ c)=(3,\ 3)$

よって，求める確率は　$\dfrac{1+3+1}{6^3}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{216}}$

(2) (i) 2 次方程式 $(*)$ が単位円周上に実数解をもつとき，その解は 1 ではないから，$(*)$ は -1 を重解にもち，その方程式は

$$a(x+1)^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad b=2a,\ \ c=a$$

これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の 3 組である．

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 2),\ (3,\ 6,\ 3)$$

(ii) 2 次方程式 $(*)$ が単位円周上に虚数解をもつとき　$b^2-4ac<0$　$\cdots$①
$(*)$ の解と係数の関係および $z_2=\overline{z_1}$，$|z_1|=1$ に注意して

$$z_1z_2=\frac{c}{a} \quad \text{ゆえに} \quad |z_1|^2=\frac{c}{a} \quad \text{すなわち} \quad c=a \quad \cdots②$$

② を ① に代入して　$b^2-4a^2<0$　ゆえに　$\dfrac{b}{2}<a=c$

$b=1$ のとき　　$a=c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=2,\ 3$ のとき　$a=c=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=4,\ 5$ のとき　$a=c=3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=6$ のとき　　$a=c=4,\ 5,\ 6$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$6+2\cdot5+2\cdot4+3=27$ 組

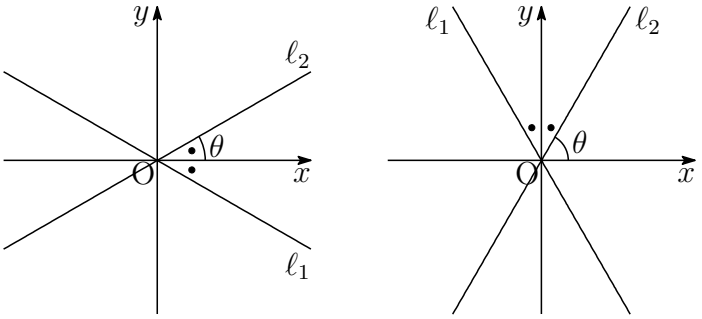
よって，求める確率は　$\dfrac{3+27}{6^3}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$

(3) 条件を満たす z_1，z_2 は虚数であるから

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}$$

ℓ_2 の偏角を θ とすると　$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{b}$

(i)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(ii)　$\tan\theta = \sqrt{3}$



(i)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より

$$\sqrt{3(4ac - b^2)} = b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = 3ac$$

$b = 3$ のとき，$ac = 3$ より　$(a,\ c) = (1,\ 3),\ (3, 1)$
$b = 6$ のとき，$ac = 12$ より　$(a,\ c) = (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$2 + 4 = 6$ 組

(ii)　$\tan\theta = \sqrt{3}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{b} = \sqrt{3}$ より

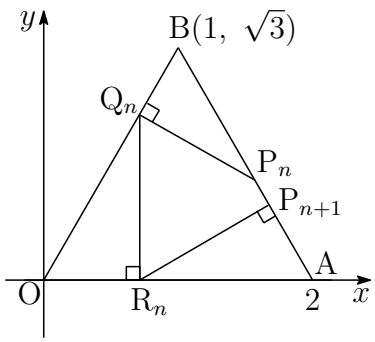
$$\sqrt{4ac - b^2} = \sqrt{3}b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = ac$$

$b = 1$ のとき，$ac = 1$ より　$(a,\ c) = (1,\ 1)$
$b = 2$ のとき，$ac = 4$ より　$(a,\ c) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
$b = 3$ のとき，$ac = 9$ より　$(a,\ c) = (3,\ 3)$
$b = 4$ のとき，$ac = 16$ より　$(a,\ c) = (4,\ 4)$
$b = 5$ のとき，$ac = 25$ より　$(a,\ c) = (5,\ 5)$
$b = 6$ のとき，$ac = 36$ より　$(a,\ c) = (6,\ 6)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$5 \cdot 1 + 3 = 8$ 組

よって，求める確率は　$\dfrac{6 + 8}{6^3} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{108}}$ ■

4 点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を通り，直線 OB に垂直な直線は



$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_n)+y_n$$

これと直線 OB : $y=\sqrt{3}x$ の交点の x 座標は

$$\sqrt{3}x=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_n)+y_n$$

これを解くことにより，点 Q_n の x 座標は　$x=\dfrac{x_n+\sqrt{3}y_n}{4}$

次に，点 $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を通り，直線 AB に垂直な直線の方程式は

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_{n+1})+y_{n+1}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$0=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_{n+1})+y_{n+1}$$

これを解くことにより，点 R_n の x 座標は　$x=x_{n+1}-\sqrt{3}y_{n+1}$

点 Q_n と点 R_n の x 座標は等しいから

$$x_{n+1}-\sqrt{3}y_{n+1}=\frac{x_n+\sqrt{3}y_n}{4}$$

2 点 P_n，P_{n+1} は直線 AB : $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 上の点であるから

$$x_{n+1}-\sqrt{3}(-\sqrt{3}x_{n+1}+2\sqrt{3})=\frac{x_n+\sqrt{3}(-\sqrt{3}x_n+2\sqrt{3})}{4}$$

整理すると　$x_{n+1}=-\dfrac{1}{8}x_n+\dfrac{15}{8}$　ゆえに　$x_{n+1}-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{1}{8}\left(x_n-\dfrac{5}{3}\right)$

数列 $\left\{x_n-\dfrac{5}{3}\right\}$ は初項 $x_1-\dfrac{5}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$x_n-\frac{5}{3}=\left(x_1-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\quad\text{ゆえに}\quad\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{5}{3}$$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(-\sqrt{3}x_n+2\sqrt{3})=-\sqrt{3}\cdot\frac{5}{3}+2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

よって，求める点の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$　■

5

$$C : w = \frac{az+b}{cz+1} \quad \cdots (*)$$

条件 (ア) により　　$i = \dfrac{ai+b}{ci+1}, \quad -i = \dfrac{a(-i)+b}{c(-i)+1}$

ゆえに　　$b+c+(a-1)i = 0, \quad b+c-(a-1)i = 0$

上の 2 式から　　$a = 1, \quad b = -c$

これを $(*)$ に代入すると　$w = \dfrac{z-c}{cz+1} \cdots ①$　　ゆえに　$z = -\dfrac{w+c}{cw-1}$

点 z は虚軸全体を動くから，$z+\overline{z} = 0$ より　$-\dfrac{w+c}{cw-1} - \dfrac{\overline{w}+\overline{c}}{\overline{c}\,\overline{w}-1} = 0$

整理すると　　$(c+\overline{c})|w|^2 + (|c|^2-1)(w+\overline{w}) - (c+\overline{c}) = 0 \quad \cdots ②$

条件 (イ) に注意すると，① により　$c \neq 0$　c は純虚数ではないから　$c+\overline{c} \neq 0$

$k = \dfrac{|c|^2-1}{c+\overline{c}} \cdots ③$ とおいて (k は実数)，② に適用すると

$$|w|^2 + k(w+\overline{w}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |w+k|^2 = k^2+1$$

条件 (イ) により　$k^2+1 = 1$　ゆえに　$k = 0$　よって　$|w| = 1 \quad \cdots (**)$

$k = 0$ を ③ に代入すると

$$|c|^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |c| = 1$$

条件 (ウ) より，虚軸上のどの z に対しても $w \neq -1$ であるから，$w = -1$ と仮定すると，① より　$z-c = -(cz+1)$　ゆえに　$z(1+c) = c-1$

もし，$c \neq -1$ ならば，$z = \dfrac{c-1}{c+1}$ より　$\overline{z} = \dfrac{\overline{c}-1}{\overline{c}+1} = \dfrac{1-c}{1+c} = -z$

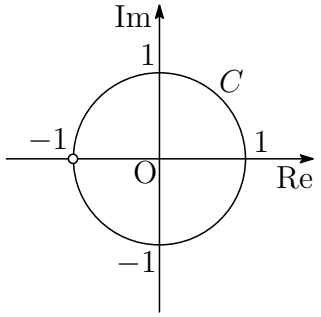
これは $|c| = 1$ $(c \neq -1)$ のとき，z は常に純虚数（または 0）となり，虚軸上の点 z が存在する．したがって，$w = -1$ となる z が存在しないための条件は

$$c = -1$$

$b = -c$ より

$$\boldsymbol{a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1}$$

$(**)$ および $w \neq -1$ により，C の概形は右の図のようになる．



補足 $z = i\tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $w = \dfrac{z+1}{-z+1}$ に代入すると

$$w = \frac{i\tan\theta + 1}{-i\tan\theta + 1} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$-\pi < 2\theta < \pi$ より，w は点 -1 を除く原点 O を中心とする単位円周上にある．

解説 一般に，1 次分数式変換 (メビウス変換)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は複素数},\ ad - bc \neq 0)$$

は，拡縮 (回転)kz，平行移動 $z + \alpha$，反転 $\dfrac{1}{z}$ の合成変換である．
特に反転に関して，次の性質がある[1]．

- 原点を通らない円は，原点を通らない円に移る．
- 原点を通る円は，原点を通らない直線に移る．
- 原点を通らない直線は，原点を通る円から原点を除いた図形に移る．
- 原点を通る直線は，原点を通る直線から原点を除いた図形に移る．

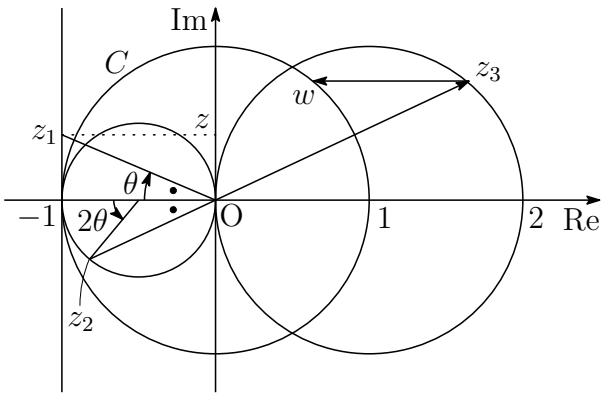
次の変換 (平行移動，反転，拡縮，平行移動)

$$f_1(z) = z - 1, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = -2z, \quad f_4(z) = z - 1$$

について，合成変換 $f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ は $\quad f(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$

$z = i\tan\theta$，$z_1 = f_1(z)$，$z_2 = f_2(z_1)$，$z_3 = f_3(z_2)$，$w = f_4(z_3)$ とすると

$$z_2 = f_2 \circ f_1(z) = \frac{1}{i\tan\theta - 1} = \frac{-\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$
$$= -\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$



■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf 3 の解説を参照．