平成 30 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

1 座標空間において，xy 平面上にある双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のうち $x \geqq 1$ を満たす部分を C とする。また，z 軸上の点 A(0, 0, 1) を考える。点 P が C 上を動くとき，直線 AP と平面 $x = d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし，d は正の定数とする。

2 原点を中心とする半径 3 の半円 $C : x^2 + y^2 = 9$ $(y \geqq 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく，かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき，線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。

(2) 点 P を $(-3, 0)$ に固定する。Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。

(3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

3 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2 \cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。p_n, q_n, r_n, s_n を求めよ。

4 整数 a, b は 3 の倍数ではないとし，

$$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。

(3) $f(x) = 0$ を満たす有理数 x が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。

5 α を複素数とする。等式

$$\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\overline{z} = 0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ C 上の点Pを $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,\ 0\right)$ とおく $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$．直線APと平面 $x=d$ との交点をQとすると，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= (0,\ 0,\ 1) + k\left(\frac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta, -1\right) \\ &= \left(\frac{k}{\cos\theta},\ k\tan\theta,\ 1-k\right) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

点Qの x 座標が d であるから

$$\frac{k}{\cos\theta} = d \quad \text{ゆえに} \quad k = d\cos\theta$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (d,\ d\sin\theta,\ 1-d\cos\theta) \\ &= (d,\ 0,\ 1) + d(0,\ \sin\theta, -\cos\theta)\end{aligned}$$

ここで $$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-\cos\theta = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (d,\ 0,\ 1) + d\left(0,\ \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

このとき，$-\pi<\theta-\dfrac{\pi}{2}<0$ であるから，求める軌跡は，

平面 $\boldsymbol{x=d}$ 上の点 $\boldsymbol{(d,\ 0,\ 1)}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{d}$ の円周上で $\boldsymbol{z<1}$.

別解　軌跡の方程式を，次のように表してもよい．

$$\begin{cases} x = d \\ y^2 + (z-1)^2 = d^2 \\ z < 1 \end{cases}$$

双曲線の媒介変数表示

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$ により，

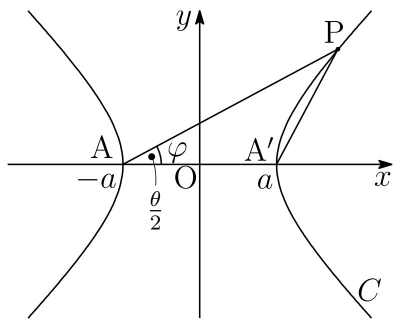
$$\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\theta},\quad \frac{y}{b}=\tan\theta$$

とおくと，双曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，次のように媒介変数表示ができる．

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$

とくに，$a=b$ のとき，直角双曲線となる．

直角双曲線 $C: x^2-y^2=a^2$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，2 頂点を $\mathrm{A}(-a,\ 0)$，$\mathrm{A}'(a, 0)$ とおく．



直線 AP の傾きを m，直線 A′P の傾きを m' とすると

$$m=\frac{y}{x+a},\quad m'=\frac{y}{x-a}\quad \text{ゆえに}\quad mm'=\frac{y^2}{x^2-a^2}=1$$

P は 2 直線 $\mathrm{AP}: y=m(x+a)$，$\mathrm{A'P}: y=\dfrac{1}{m}(x-a)$ の交点であるから

$$x=\frac{1+m^2}{1-m^2}a,\quad y=\frac{2m}{1-m^2}a$$

ここで，$m=\tan\varphi$ とおくと　　$x=\dfrac{a}{\cos 2\varphi}$，$y=a\tan 2\varphi$

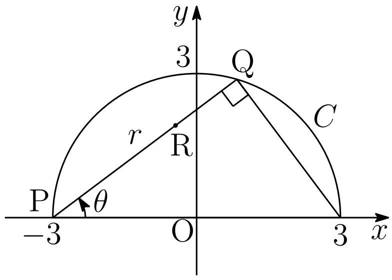
さらに，$\theta=2\varphi$ とおくことにより　$x=\dfrac{a}{\cos\theta}$，$y=a\tan\theta$

直角双曲線の漸近線が $y=x$ と $y=-x$ であるから，$0\leqq\theta<2\pi$，すなわち，$0\leqq\varphi<\pi$ において，$\varphi\neq\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$ である．$\varphi=\frac{\pi}{4}-0$ のとき P は第 1 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{\pi}{4}+0$ のとき P は第 3 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi-0$ のとき P は第 2 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi+0$ のとき P は第 4 象限の無限遠点にある．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{1}{2}\pi\cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$ であるから，$\mathrm{PR} = \dfrac{2}{3}\mathrm{PQ}$ より

$$S = \int_0^3 \mathrm{PR}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\pi = \mathbf{3\pi}$$

(2) $\theta = \angle\mathrm{OPQ}$，$r = \mathrm{PQ}$ とおくと $(r = 6\cos\theta)$



$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{9}{2}\pi$$

$\mathrm{PR} = \dfrac{2}{3}r$ より

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}r\right)^2 d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{2}\pi = \mathbf{2\pi}$$

(3) $C : x^2 + y^2 = 9\ (y \geqq 0)$ の第 1 象限と y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積は，半径 3 の半球の体積であるから

$$\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = 18\pi$$

$\mathrm{P}(-x,\ y)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ を $2:1$ に内分する点は $\left(\dfrac{x}{3},\ y\right)\quad (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

この点の軌跡は C の第 1 象限の部分を y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ だけ縮小したものであるから，図形 S と第 1 象限の共通部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi\int_0^3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 dy = \frac{1}{9}\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{9}\cdot 18\pi = 2\pi$$

$\mathrm{P}(-3,\ 0)$，$\mathrm{Q}(s,\ t)$ を $2:1$ に内分する点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{2s-3}{3},\quad y = \frac{2t}{3}\quad \text{ゆえに}\quad s = \frac{3}{2}(x+1),\quad t = \frac{3}{2}y$$

Q は C 上の点であるから　$s^2 + t^2 = 9\ \ (t \geqq 0)$

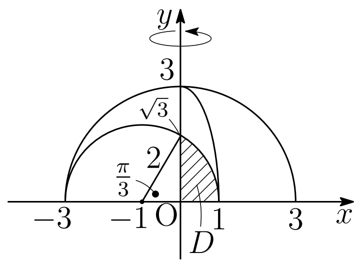
これに上の結果を代入することにより，R の軌跡の方程式は

$$\frac{9}{4}(x+1)^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9\quad \text{ゆえに}\quad (x+1)^2 + y^2 = 4\ \ (y \geqq 0)\quad \cdots(*)$$

$(*)$ の y 軸との交点の y 座標は，$(*)$ に $x=0$ を代入して

$$y=\sqrt{3}$$

右の図の領域 D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると



$$V_2=\pi\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy-2\pi\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy \qquad \cdots(**)$$

ここで $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy=\int_0^{\sqrt{3}}(3-y^2)\,dy$

$$=\left[\,3y-\frac{1}{3}y^3\,\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

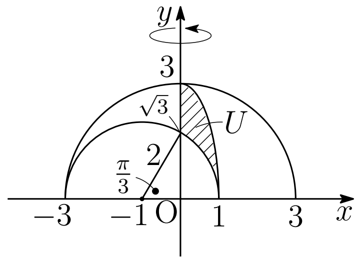
また，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy$ は，D の面積であるから

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これらを $(**)$ に代入すると

$$V_2=2\sqrt{3}\pi-2\pi\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

U の表す領域は右の図の斜線部分で，これを y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は

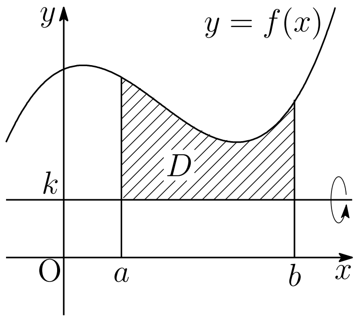


$$V_1-V_2=2\pi-\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi$$
$$=\boldsymbol{\left(2-3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)\pi}$$

注意 $(**)$ の $\displaystyle\pi\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy$ は，D を直線 $x=-1$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を表す．

解説

$k > 0$ とする．曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ が，区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq k$ であるとき，この区間において，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ で囲まれた領域 D を直線 $y = k$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V とすると

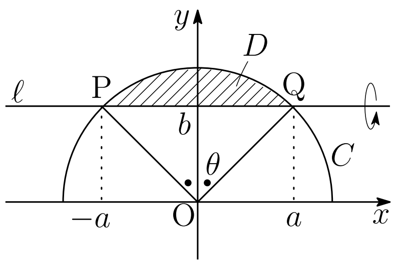


$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b (y-k)^2\,dy \\
&= \pi \int_a^b (y^2 - k^2)\,dx - 2\pi k \int_a^b (y-k)\,dx
\end{aligned}
$$

D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x，D の面積を S とすると

$$\boldsymbol{V = V_x - 2\pi k S}$$

半円 $C : x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ $(y \geqq 0)$ と直線 $\ell : y = b$ $(b \geqq 0)$ で囲まれた領域を D とする．D を ℓ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V，D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x，D の面積を S とすると



$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} (y^2 - b^2)\,dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi a^3$$

とくに，V_x は C の半径 r に関係なく a の値により決定する．

C と ℓ の 2 つの交点 P，Q に対し，$\angle\mathrm{POQ} = 2\theta$，$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ} = r$ とおくと

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}r^2\cdot 2\theta - \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b = r^2\theta - ab, \\
V &= V_x - 2\pi b S = \frac{4}{3}\pi a^3 - 2\pi b(r^2\theta - ab) \\
&= 2\pi\left(\frac{2}{3}a^3 + ab^2 - br^2\theta\right)
\end{aligned}
$$

例えば，$C : x^2 + y^2 = 4$，$\ell : y = 1$ のとき，$a = \sqrt{3}$，$b = 1$，$r = 2$，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ より

$$V = 2\left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

これは，前ページで求めた V_2 の 2 倍に等しい．

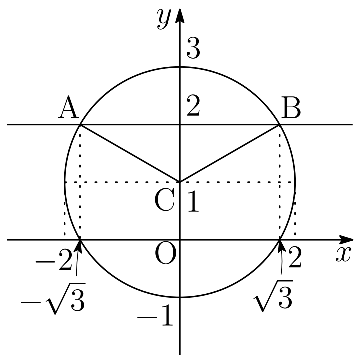
このように，領域 D を回転させた回転体の体積 V は，D の面積 S を利用すると，簡単に求めることができる．

例題 次の領域 D_1 および D_2 をそれぞれ x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$$D_1 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ y \geqq 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

解答 D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．

右図において，$\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_2 = \pi\cdot 2^2 - 2S_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$y = 1 + \sqrt{4-x^2}\ (-2 \leqq x \leqq 2) \cdots (*)$ とすると

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx = S_1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

D_1 および D_2 を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする．$(*)$ より，$x^2+(y-1)^2=4$ であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y^2-2^2)\,dx \\ &= 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-x^2)\,dx \\ &= 2\pi S_1 + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)\,dx \\ &= 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{6}(2\sqrt{3})^3 \\ &= 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

D_2 の境界を表す 2 曲線 $C_1 : y = f(x)$，$C_2 : y = g(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{4-x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 2 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{4-x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 0 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$

とすると

$$f(x) + g(x) = 2, \qquad \int_{-2}^{2} \{f(x) - g(x)\}\, dx = S_2$$

したがって

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-2}^{2} \{f(x)^2 - g(x)^2\}\, dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} \{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}\, dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} 2\{f(x)-g(x)\}\, dx = 2\pi \int_{-2}^{2} \{f(x)-g(x)\}\, dx \\ &= 2\pi S_2 = 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

補足 D_2 の重心は $(0,\ 1)$ であるから，パップス・ギュルダンの定理[1] により

$$V_2 = 2\pi S_2 \cdot 1 = 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$$

九大理系 2012 年

円 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 求める体積は $\quad V_1 + V_2 = 2\pi\left(\dfrac{8\pi}{3} + 3\sqrt{3}\right)$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 参照)

九大理系 2013 年

原点 O を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を通る円を S とする。点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

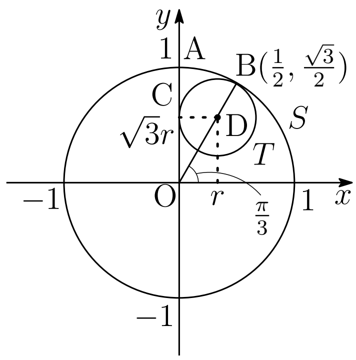
(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，円 T の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 (1) OB の x 軸の正の方向となす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから，T の半径を r とすると，D の座標は $(r,\ \sqrt{3}r)$，$\mathrm{OD}=2r$ である．
右の図より，$\mathrm{OD}+\mathrm{DB}=1$ であるから

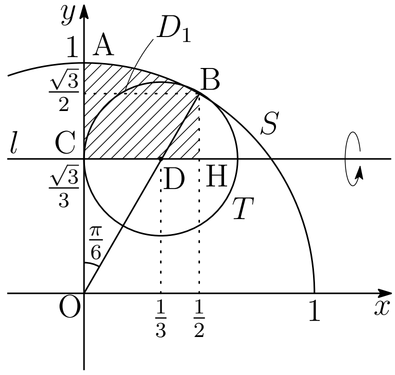
$$2r+r=1 \quad \text{ゆえに} \quad r=\frac{1}{3}$$

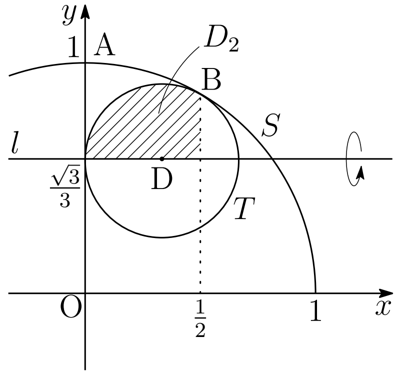
よって $\quad \mathrm{D}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$



(2) $y=\sqrt{1-x^2}$ とすると，S と y 軸，l，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で囲まれた領域 D_1 の面積は，左下の図から

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{6}-\triangle\mathrm{OCD}+\triangle\mathrm{BDH}$$
$$=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{24} \qquad \cdots(*)$$





D_1 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると，$x^2+y^2=1$ および $(*)$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}y+\frac{1}{3}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}-x^2\right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}-x^2\right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{24}\right)\end{aligned}$$

D_2 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると，

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

に注意して

$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}x-x^2\right) dx$$

求める体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \frac{V_1}{\pi}-\frac{V_2}{\pi} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\,dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{24}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left[\, x-\frac{x^2}{2}\,\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi+\frac{1}{12} = \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\end{aligned}$$

よって $\qquad \boldsymbol{V=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\right)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 法 4 に関する 0, 1, 2, 3 の積は，右のようになる．
したがって，次の確率漸化式が成立する．

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$p_1 = q_1 = r_1 = s_1 = \frac{1}{4}$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ①$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ②$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ③$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ④$$

$q_1 = s_1 = \dfrac{1}{4}$ および ②，④ より，$q_n = s_n$ であるから

$$q_1 = \frac{1}{4},\quad q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n \quad \text{ゆえに} \quad q_n = q_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

したがって　$\boldsymbol{q_n = s_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}}$　これを ③ に代入すると

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n+1}r_{n+1} = 2^n r_n + \frac{1}{2}$$

数列 $\{2^n r_n\}$ は初項 $2r_1 = \dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$2^n r_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r^n = \frac{n}{2^{n+1}}}$$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - q_n - r_n - s_n \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \boldsymbol{1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 整数 $a,\ b$ は 3 の倍数ではないから

$$a \equiv \pm 1,\ b \equiv \pm 1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 \equiv 1,\ b^2 \equiv 1 \pmod 3 \quad \cdots (*)$$

$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$ より，法 3 に関して

$$\begin{aligned} f(1) &= a^2 + 2b^2 + 3 \equiv 1 + 2{\cdot}1 + 3 \equiv 0 && \pmod 3 \\ f(2) &= 4a^2 + 4b^2 + 17 \equiv 4{\cdot}1 + 4{\cdot}1 + 17 \equiv 1 && \pmod 3 \end{aligned}$$

よって，$f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りはそれぞれ $\mathbf{0}$ と $\mathbf{1}$

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x が m であるとき

$$2m^3 + a^2m^2 + 2b^2m + 1 = 0$$

したがって　$m(2m^2 + a^2m + 2b^2) = -1$

上式より，次の (i), (ii) の場合分けができる．

(i) $m = 1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = -1$ のとき，
第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 + a^2 + 2b^2 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 2b^2 = -3$$

$a^2 + 2b^2 \geqq 0$ であるから，不適．

(ii) $m = -1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = 1$ のとき，
第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 - a^2 + 2b^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad -a^2 + 2b^2 = -1$$

$(*)$ より，$-a^2 + 2b^2 \equiv 1 \pmod 3$ であるから，不適．

(i), (ii) より，$f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しない．

補足 x を整数とするとき　$x + 3 \equiv x \pmod 3$
n を自然数とするとき　$(x+3)^n \equiv x^n \pmod 3$
ゆえに　$f(x+3) \equiv f(x) \pmod 3$

これと (1) の結果および $f(0) = 1$ から，$x \equiv 1$ (mod) が $f(x) = 0$ を満たす x であるための必要条件である．したがって，(2) は，(ii) の $m = 1$ の場合についてのみ調べればよい．

(3) $f(x)=0$ を満たす x は負である．(2) の結果に注意すると，$f(x)=0$ を満たす有理数 x は整数ではないから，x を $\dfrac{p}{q}$ とすると ($p,\ q$ は互いに素である整数，$p<0,\ q>1$)

$$2\left(\frac{p}{q}\right)^3+a^2\left(\frac{p}{q}\right)^2+2b^2\cdot\frac{p}{q}+1=0$$
$$2p^3+a^2p^2q+2b^2pq^2+q^3=0$$
$$\frac{2p^3}{q}+a^2p^2+2b^2pq+q^2=0 \quad \cdots ①$$

上式の $a^2p^2+2b^2pq+q^2$ が整数であるから，$\dfrac{2p^3}{q}$ は整数である．このとき，p と q は互いに素であるから ($q>1$)，$q=2$．これを ① に代入すると

$$p^3+a^2p^2+4b^2p+4=0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p^2+a^2p+4b^2)=-4 \quad \cdots ②$$

負の整数 p は -4 の約数で，$q\ (=2)$ と互いに素であるから　$p=-1$

$p=-1$ を ② に代入すると

$$-(1-a^2+4b^2)=-4 \quad \text{ゆえに} \quad |a|^2-4|b|^2=-3$$

したがって　$(|a|+2|b|)(|a|-2|b|)=-3$

$a,\ b$ は 3 の倍数でない整数であるから，$|a|+2|b| \geqq 3$ に注意すると

$$\begin{cases} |a|+2|b|=3 \\ |a|-2|b|=-1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |a|=|b|=1$$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,-1),\ (-1,\ 1),\ (-1,-1)}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ より

$$\frac{\alpha}{2|\alpha|^2+1}+\frac{\overline{z}i}{|z|^2+2}=0 \quad ゆえに \quad \frac{\overline{z}}{|z^2|+2}=\frac{\alpha i}{2|\alpha|^2+1}$$

上の第 2 式の共役複素数は $\qquad \dfrac{z}{|z|^2+2}=\dfrac{-\overline{\alpha}i}{2|\alpha|^2+1} \qquad \cdots(*)$

(i) $\alpha=0$ のとき，$(*)$ より　$z=0$

(ii) $\alpha\neq 0$ のとき，$(*)$ より，$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i}=\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ とおくと $(k>0)$

$|z|=k|\alpha|$ であるから，これを $\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ に代入すると

$$\frac{k^2|\alpha|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k \quad ゆえに \quad |\alpha|^2k^2-(2|\alpha|^2+1)k+2=0$$

したがって　$(k-2)(|\alpha|^2k-1)=0$　これを解いて　$k=2,\ \dfrac{1}{|\alpha|^2}$

$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i}=k$ であるから　$z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}$

(i), (ii) より　$\boldsymbol{\alpha=0}$ **のとき**　$\boldsymbol{z=0}$

$\boldsymbol{\alpha\neq 0}$ **のとき**　$\boldsymbol{z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}}$