平成29年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

1 定数 $a>0$ に対し，曲線 $y=a\tan x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_1，曲線 $y=\sin 2x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ。

(2) a が (1) の条件を満たすとき，原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし，P の x 座標を p とする。P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき，a および $\cos 2p$ の値を求めよ。

(3) a が (2) で求めた値のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 2つの定数 $a>0$ および $b>0$ に対し，座標空間内の4点を

$$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を a，b を用いて表せ。

(2) さらに，点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ がなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を a，b を用いて表せ。

3 初項 $a_1=1$，公差4の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ の初項から第600項のうち，7の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第600項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

$\boxed{\textbf{4}}$ 赤玉2個，青玉1個，白玉1個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りにA，B，Cの3人がこの順番で時計回りに着席している。3人のうち，ひとりが袋から玉を1個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える。1回目はAが玉を取り出し，次のルール(a)，(b)，(c)に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。

(a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。

(b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。

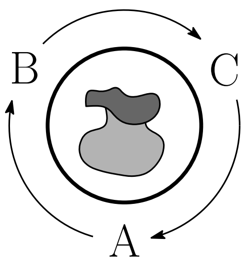
(c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A，B，Cの3人がn回目に玉を取り出す確率をそれぞれa_n，b_n，c_n $(n = 1, 2, \cdots)$とする。ただし，$a_1 = 1$，$b_1 = c_1 = 0$である。以下の問いに答えよ。

(1) Aが4回目に勝つ確率と7回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。

(2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$とおくとき，d_nを求めよ。

(3) 自然数$n \geqq 3$に対し，a_{n+1}をa_{n-2}とnを用いて表せ。

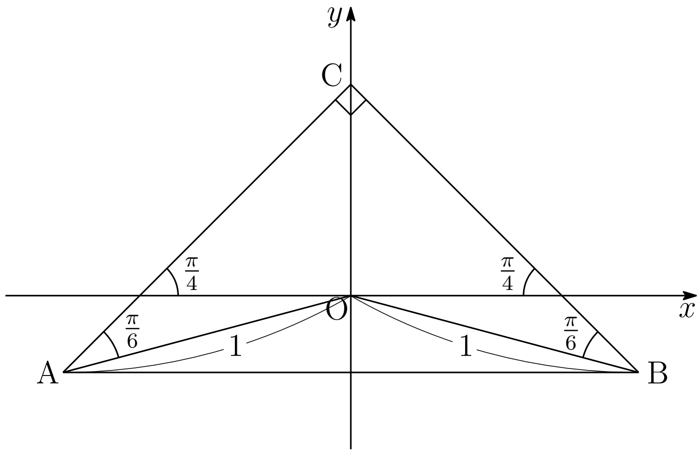


$\boxed{\mathbf{5}}$ 2 つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$ を用いて，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n \ (n = 1, 2, \cdots)$ により定める。ただし，i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。

(2) $|z_n| \leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

(3) 下図のように，複素数平面上の △ABC は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を一つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお A，B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と 2 点 A，B の距離はともに 1 である。点 P_n が △ABC の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y = a\tan x$ と $y = \sin 2x$ から y を消去すると

$$a\tan x = \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sin 2x}{\tan x} = 2\cos^2 x \quad \cdots ①$$

このとき，$0 < 2\cos^2 x < 2$ より　　$\boldsymbol{0 < a < 2}$

(2) $f(x) = a\tan x$，$g(x) = \sin 2x$ とおいて，これらを微分すると

$$f'(x) = \frac{a}{\cos^2 x}, \quad g'(x) = 2\cos 2x$$

交点 P の x 座標が p であるから，① より　　$a = 2\cos^2 p \quad \cdots ②$

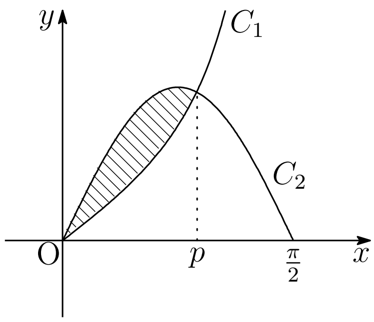
$f'(p)g'(p) = -1$ であるから　　$\dfrac{a}{\cos^2 p} \times 2\cos 2p = -1$

② を上式に代入すると

$$\frac{2\cos^2 p}{\cos^2 p} \times 2\cos 2p = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\cos 2p = -\frac{1}{4}}$$

したがって　　$a = 2\cos^2 p = \cos 2p + 1 = -\dfrac{1}{4} + 1 = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(3) 求める面積は右の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \left(\sin 2x - \frac{3}{4}\tan x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{4}\log|\cos x|\right]_0^p \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2p + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\log|\cos p| \end{aligned}$$

ここで，(2) の結果から　　$\log|\cos p| = \dfrac{1}{2}\log\cos^2 p = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{8}$

よって　　$S = -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{8} = \boldsymbol{\dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\log\dfrac{3}{8}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) A$(a,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$，D$(a,\ b,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (a,\ 0, -1), \quad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (a,\ b,\ 0)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)$

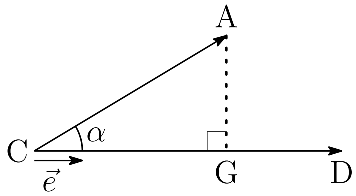
ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}} = (0,\ 0,\ 1) + \dfrac{a^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)$

$$= \left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2 b}{a^2+b^2},\ 1\right)$$

よって　$\mathbf{G}\left(\boldsymbol{\dfrac{a^3}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^2 b}{a^2+b^2},\ 1}\right)$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を α とし，単位ベクトル $\vec{e}$ を

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|} \quad \cdots ①$$



とすると，A から CD に下ろした垂線と CD の交点 G について

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}} = (|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\alpha)\vec{e} \quad \cdots ②$$

また，$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$

これと ① を ② に代入すると　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

(2) $\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$ から，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ b,-1)$ であるから，(1) と同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=(0,\ 0,\ 1)+\frac{b^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right)\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=\left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)-(a,\ 0,\ 0)\\&=\left(-\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right),\\\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right)-(0,\ b,\ 0)\\&=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ -\frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)\end{aligned}$$

$\vec{u}=(a^2+b^2)\overrightarrow{\mathrm{AG}}$，$\vec{v}=(a^2+b^2)\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ とおくと

$$\vec{u}=(-ab^2,\ a^2b,\ a^2+b^2),\quad \vec{v}=(ab^2,-a^2b,\ a^2+b^2)$$

したがって

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=-a^2b^4-a^4b^2+(a^2+b^2)^2\\&=(a^2+b^2)(a^2+b^2-a^2b^2),\\|\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2&=a^2b^4+a^4b^2+(a^2+b^2)^2\\&=(a^2+b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)\end{aligned}$$

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角は θ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-a^2b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)}=\boldsymbol{\frac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2+a^2b^2}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 初項 $a_1=1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1+4(n-1) = 4n-3 \cdots ①$$

a_n が 7 の倍数であるとき，$4n-3\equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$8n \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -1 \pmod{7}$$

このとき，n は整数 m を用いて

$$n = 7m-1 \quad \cdots ②$$

したがって，$1 \leqq 7m-1 \leqq 600$ を満たす整数 m の個数は

$$\frac{2}{7} \leqq m \leqq \frac{601}{7} \quad \text{すなわち} \quad 1 \leqq m \leqq 85$$

よって，求める個数は　**85** (個)

(2) ② を ① に代入すると

$$a_n = 4(7m-1)-3 = 7(4m-1)$$

a_n が 7^2 の倍数であるとき，$4m-1\equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$8m \equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad m \equiv 2 \pmod{7}$$

このとき，m は整数 l を用いて

$$m = 7l+2$$

これを ② に代入すると

$$n = 7(7l+2)-1 = 49l+13 \quad \cdots ③$$

したがって，$1 \leqq 49l+13 \leqq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leqq l \leqq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq l \leqq 11$$

よって，求める個数は　**12** (個)

(3) ③ を ① に代入すると

$$a_n = 4(49l+13)-3 = 7^2(4l+1)$$

a_n が 7^3 の倍数であるとき，$4l+1 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8l \equiv -2 \quad \text{ゆえに} \quad l \equiv -2 \pmod 7$$

このとき，l は整数 k を用いて

$$l = 7k-2$$

これを ③ に代入すると

$$n = 49(7k-2)+13 = 343k-85 \quad \cdots ④$$

$1 \leqq 343k-85 \leqq 600$ を満たす整数 k は 1 で，このとき　$n = 258$

④ を ① に代入すると

$$a_n = 4(343k-85)-3 = 7^3(4k-1)$$

これから，a_n が 7^4 の倍数となることはない．

以上の結果および ②，③ より，$1 \leqq n \leqq 600$ に対して

a_n が 7 の倍数であるとき　$n \equiv -1 \pmod 7$
a_n が 7^2 の倍数であるとき　$n \equiv 13 \pmod{49}$
a_n が 7^3 の倍数であるとき　$n = 258$

数列 $\{a_n\}$ のうち，7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

上の表で 2 列目のみ 7^2 を因数にもち，それ以外の列は 7 を因数にもつ．
ただし，第 6 行目第 2 列の a_{258} のみ 7^3 を因数にもつ．
したがって，2 列目以外の 32 項 (7 を因数にもつ)，2 列目の第 1 行から第 5 行目までの 5 項 (7^2を因数にもつ) および第 6 行目第 2 列の a_{258} より

$$32 \times 1 + 2 \times 5 + 3 = 45$$

よって，求める n の最小値は　$\boldsymbol{n = 265}$

別解　(2) $a_n = 4n-3$ より，a_n が 7^2 の倍数であるとき

$$4n-3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 12(4n-3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 13 \pmod{7^2}$$

n は整数 l を用いて　$n = 49l + 13$

したがって，$1 \leqq 49l + 13 \leqq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leqq l \leqq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq l \leqq 11$$

よって，求める個数は　**12** (個)

(3) $a_n = 4n-3$ より，a_n が 7^3 の倍数であるとき

$$4n-3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 86(4n-3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 258 \pmod{7^3}$$

n は整数 m を用いて　$n = 343m + 258$

したがって，$1 \leqq 343m + 258 \leqq 600$ を満たす整数 m は $m = 0$ の 1 個で

$$a_{258} = 4 \cdot 258 - 3 = 1029 = 3 \cdot 7^3$$

また，$\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^4 で割り切れる項はない．

(1),(2) の結果から，数列 $\{a_n\}$ のうち，7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

これら 38 個の項をそれぞれ 7 で割ると，さらに 7 で割り切れる項が第 2 列に 6 個あり，これらをまた 7 で割ると，最後に残った a_{258} だけが 7 で 1 回割れる．

したがって，これら 38 個の積は 7 で $38 + 6 + 1$，すなわち，45 回割り切れる．

よって，求める n の最小値は　$\boldsymbol{n = 265}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 定められたルールにより，次の確率漸化式が得られる．

$$(*)\quad a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+c_n),\quad b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+b_n),\quad c_{n+1}=\frac{1}{4}(b_n+c_n)$$

$d_n=a_n+b_n+c_n$ $(n=1,2,\cdots)$ とすると

$$d_1=a_1+b_1+c_1=1+0+0=1$$

$(*)$ の辺々を加えることにより

$$d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n\quad \text{ゆえに}\quad d_n=\frac{1}{2^{n-1}}\quad\cdots①$$

したがって，$(*)$ は

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-b_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}b_n\\
b_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-c_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}c_n\\
c_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-a_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}a_n
\end{aligned}$$

上の3式から，$n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4}c_{n-1}\right)=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{16}c_{n-1}\\
&=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{4}a_{n-2}\right)=\frac{3}{2^{n+3}}-\frac{1}{64}a_{n-2}\quad\cdots②
\end{aligned}$$

② に $n=3,\ 6$ を代入することにより

$$\begin{aligned}
a_4&=\frac{3}{2^6}-\frac{1}{64}a_1=\frac{3}{64}-\frac{1}{64}\cdot 1=\frac{1}{32}\\
a_7&=\frac{3}{2^9}-\frac{1}{64}a_4=\frac{3}{512}-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{32}=\frac{11}{2048}
\end{aligned}$$

よって　A が 4 回目に勝つ確率は　$a_4\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{32}\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{64}}$

A が 7 回目に勝つ確率は　$a_7\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{11}{2048}\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{11}{4096}}$

(2) ① より　$\boldsymbol{d_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}}$

(3) ② より　$\boldsymbol{a_{n+1}=\dfrac{3}{2^{n+3}}-\dfrac{1}{64}a_{n-2}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)
$$\alpha = 10000 + 10000i = 10000\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ゆえに　$z_n = \alpha w^n = \dfrac{10000\sqrt{2}}{2^n}\left\{\cos\left(\dfrac{n}{6} + \dfrac{1}{4}\right)\pi + i\sin\left(\dfrac{n}{6} + \dfrac{1}{4}\right)\pi\right\}$

よって　$\boldsymbol{|z_n| = \dfrac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}}}$,　$\boldsymbol{\arg z_n = \left(\dfrac{n}{6} + \dfrac{1}{4}\right)\pi}$

(2) (1) の結果から，$|z_n| \leqq 1$ のとき
$$\frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-\frac{1}{2}} \geqq 10^4$$

両辺の常用対数をとると
$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\log_{10} 2 \geqq 4 \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq \frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2}$$

ここで　$\dfrac{4}{\log_{10} 2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{0.301} + 0.5 = 13.7\cdots$

よって，求める最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 14}$

(3) (1),(2) の結果から
$$|z_{14}| = \frac{10000}{2^{14-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4{\cdot}5^4}{2^{13}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^9}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{512}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\arg z_{14} = \left(\frac{14}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{7}{12}\pi + 2\pi$$
$$|z_{15}| = \frac{10000}{2^{15-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4{\cdot}5^4}{2^{14}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^{10}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{1024}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2}{\cdot}\frac{125}{128}{\cdot}\frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}{\cdot}\frac{125}{128}\sqrt{\frac{25}{32}} < \frac{1}{2}$$
$$\arg z_{15} = \left(\frac{15}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi$$

したがって，P_{14} は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外部にあり，P_{15} は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部にある．

よって，求める最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 15}$