平成 28 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

1 座標平面上の曲線 C_1，C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$
$$C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする。ただし，a は実数である。n を自然数とするとき，曲線 C_1，C_2 が 2 点 P，Q で交わり，P，Q の x 座標はそれぞれ 1，$n+1$ となっている。また，曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域を T_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ。

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D，E，F とする。また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP} = k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR} = \ell\mathrm{CD}$ を満たす実数 k，ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

3 座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で，点 $\mathrm{P}_0(1,\ 0)$ を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し，1 つのサイコロを 1 回投げ，出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

(規則) (i) 1 から 5 までの目が出た場合は，出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。例えば，コインが P_4 にあるとき 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。

(ii) 6 の目が出た場合は，x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし，コインが x 軸上にあるときは動かさない。例えば，コインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き，1 つのサイコロを続けて何回か投げて，1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

(2) 3 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

(3) n を自然数とする。n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

4 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進数で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) 次の方程式を満たす実数 x $(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ。

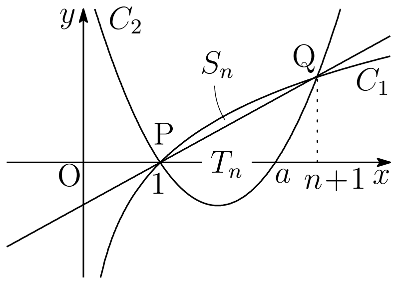
$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3) 次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) C_1 と C_2 の交点 Q の x 座標が $n+1$ であるから



$$\log(n+1) = (n+1-1)(n+1-a)$$

$n \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{a = n+1-\frac{\log(n+1)}{n}}$$

上式より　$a-1 = \dfrac{n^2-\log(n+1)}{n}$

ここで　$\displaystyle\int_0^n \frac{t}{t+1}\,dt = \Big[\ t-\log(t+1)\ \Big]_0^n = n-\log(n+1) > 0$

上の 2 式から　$a-1 = \dfrac{n^2-\log(n+1)}{n} > \dfrac{n^2-n}{n} = n-1 \geqq 0$

よって　$\boldsymbol{a > 1}$

(2) $\displaystyle S_n = \int_1^{n+1} \log x\,dx - \frac{1}{2}\{(n+1)-1\}\log(n+1)$

$$= \Big[\ x\log x - x\ \Big]_1^{n+1} - \frac{n}{2}\log(n+1) = \boldsymbol{\frac{n+2}{2}\log(n+1)-n}$$

C_2 の x^2 の係数および 2 点 P，Q の x 座標に注意して

$$T_n = \frac{1}{6}\{(n+1)-1\}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3}$$

(3) (2) の結果から

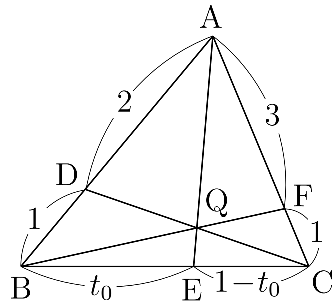
$$\frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\frac{n+2}{2}\log(n+1)-n}{n\log\frac{n^3}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\log(n+1)-1}{3\log n-\log 6}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\left\{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}-1}{3\log n-\log 6}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)\left\{1+\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}-\dfrac{1}{\log n}}{3-\dfrac{\log 6}{\log n}}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}+0\right)(1+0)-0}{3-0} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

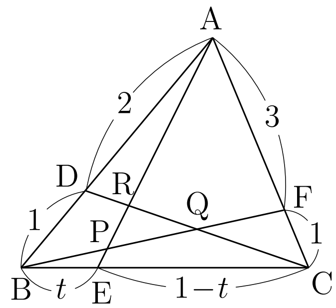
$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) チェバの定理により



$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

これを解いて　$\boldsymbol{t_0=\frac{3}{5}}$

(2) $\triangle$AEC および直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}=\dfrac{3}{t}$

よって　$k=\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{3+t}}$

$\triangle$BCD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{2}{3}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}=\dfrac{3(1-t)}{2t}$

よって　$\ell=\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}=\boldsymbol{\dfrac{3(1-t)}{3-t}}$

(3) (2) の図について，$\triangle$BCF および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{3(1-t)}{4t}$　$\cdots$①

$t=\dfrac{3}{5}$ のとき，P は Q に一致するので　$\dfrac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{QB}}=\dfrac{1}{2}$　$\cdots$②

よって　$\triangle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot1=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(4) $t=\dfrac{3}{5}$ のとき，R は Q に一致するので，(2) の結果から

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}=\frac{3\left(1-\frac{3}{5}\right)}{3-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\mathrm{CQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3(1-t)}{3-t}-\dfrac{1}{2}=3-t:3-5t$

また，①，② から

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\frac{3(1-\mathrm{t})}{3(1-\mathrm{t})+4\mathrm{t}}-\frac{1}{3}=3+\mathrm{t}:3-5\mathrm{t}$$

$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{CQ}:\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=(3+t)(3-t):(3-5t)^2$$

(3) の結果から　　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)}=\boldsymbol{\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}}$

解説 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\cdot\frac{3}{4}\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=3(1-t):2t$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3(1-t)+2t}=\frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b}+2t\vec{c}\}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b}-3\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b}-3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え，外積の性質を用いると [1]

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって　　$\triangle\mathrm{PQR}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}:1$

外積は高校数学の範囲外であるから，2 次試験では使えないが，センター試験では，非常に有効な計算法である．なお，外積 (ベクトル積) の演算について，次式が成り立つことに注意したい．

$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{b}$$

また，これに $\vec{c}=\vec{b}$ を代入すると　　$\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) n 回サイコロ投げた後に，コインが P_i $(i=0,1,\cdots,5)$ の位置にある確率を $P_i(n)$ とすると

$$\begin{aligned} P_0(n+1) &= \frac{1}{6}P_0(n)+\frac{1}{6}P_1(n)+\frac{1}{6}P_2(n)+\frac{1}{6}P_3(n)+\frac{1}{6}P_4(n)+\frac{1}{6}P_5(n) \\ &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\} \end{aligned}$$

自然数 n に対して　$P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)=1$

したがって　$P_0(n)=\dfrac{1}{6}\times 1=\dfrac{1}{6}$　$\cdots(*)$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(2) $(*)$ より，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) $(*)$ より，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

解説 $P_i(n+1)$ は $P_j(n)$ によって決定する確率過程 (マルコフ連鎖) である．

$$\begin{aligned} P_0(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\} \\ P_1(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+2P_5(n)\} \\ P_2(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_3(n)+2P_4(n)+P_5(n)\} \\ P_3(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\} \\ P_4(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+2P_2(n)+P_3(n)+P_5(n)\} \\ P_5(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+2P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)\} \end{aligned}$$

したがって　$P_0(n)=P_3(n)=\dfrac{1}{6}$,

$$P_1(n+1)-P_5(n+1)=-\frac{1}{3}\{P_1(n)-P_5(n)\},$$
$$P_2(n+1)-P_4(n+1)=-\frac{1}{3}\{P_2(n)-P_4(n)\}$$

$P_1(1)=P_2(1)=P_4(1)=P_5(1)=\dfrac{1}{6}$ より　$P_1(n)=P_5(n)$，$P_2(n)=P_4(n)$

これらの結果から　$P_1(n+1)=P_2(n+1)=\dfrac{1}{3}\left\{P_1(n)+P_2(n)+\dfrac{1}{6}\right\}$

ゆえに　$P_1(n+1)=\dfrac{2}{3}P_1(n)+\dfrac{1}{18}$

$P_1(1)=\dfrac{1}{6}$ であるから　$P_1(n)=\dfrac{1}{6}$　よって　$P_i(n)=\dfrac{1}{6}$ $(i=0,1,\cdots 5)$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 仮定から　$10^n \equiv a_n$,　$10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から　$10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって　$a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より　$\boldsymbol{a_1 = 10}$

(1) の結果を用いると，法 13 について

$$\begin{aligned} a_2 &\equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9 \\ a_3 &\equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12 \\ a_4 &\equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3 \\ a_5 &\equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4 \\ a_6 &\equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a_2 = 9,\ a_3 = 12,\ a_4 = 3,\ a_5 = 4,\ a_6 = 1}$

(3) 整数 p，q を $1 \leqq p \leqq 9$，$0 \leqq q \leqq 9$ とし，求める自然数 N を

$$N = p{\cdot}10^5 + 2{\cdot}10^4 + 10^2 + 6{\cdot}10 + q$$

とおくと，法 13 に関して

$$\begin{aligned} N &\equiv p{\cdot}10^5 + 2{\cdot}10^4 + 10^2 + 6{\cdot}10 + q \\ &\equiv p{\cdot}4 + 2{\cdot}3 + 9 + 6{\cdot}10 + q = 4p + q + 75 \\ &\equiv 4p + q - 3 \end{aligned}$$

このとき，$N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0),\ (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1),\ (9,\ 6)$$

よって，求める自然数 N は

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) ド・モアブルの定理により

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad \frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i \sin n\theta \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の辺々を加えると

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

$(*)$ の辺々を引くと

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
\cos 2x &= \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 1 \\
\cos 3x &= \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

$t = z + \dfrac{1}{z}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1}{2}t, \quad \cos 2x = \frac{1}{2}t^2 - 1, \quad \cos 3x = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

これらを $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ に代入すると

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) = 1$$

整理すると　$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$　ゆえに　$(t-1)(t+2)(t-2) = 0$

これを解いて　$t = 1, -2,\ 2$　したがって　$\cos x = \dfrac{1}{2},\ -1,\ 1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(3) (1) の結果から

$$\sin^2 n\theta = \left\{-\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\right\}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)$$

$\theta = 20^\circ$ とすると，$z^{18} = 1$ であるから

$$(z^2 - 1)(z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1) = 0$$

$z^2 \neq 1$ であるから　$z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1 = 0$

また，$z \neq 0$ であるから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right) = -1$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4}\sin^2 n\theta &= \sum_{n=1}^{4}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)\right\} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

別解 $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$ および $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ により

$$\begin{aligned}&\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ \\ =&\frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ}{2}\end{aligned}$$

方程式 $\cos 3\theta + \dfrac{1}{2} = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ の解は　$\theta = 40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$

ここで，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であるから，方程式

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta + \frac{1}{2} = 0 \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

の解と係数の関係により　$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

補足 また，解と係数の関係により　$\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\dfrac{1}{8}$

参考 $\theta=\dfrac{\pi}{n}$，$\alpha=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ とおくと

$$z^n-1=(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)$$

また　$z^n-1=(z-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)=\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　$\cdots(*)$

$(*)$ は，z に関する恒等式であるから，$z=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})&=\prod_{k=1}^{n-1}(1-\cos 2k\theta-i\sin 2k\theta)=\prod_{k=1}^{n-1}(2\sin^2 k\theta-2i\sin k\theta\cos k\theta)\\
&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}(\sin k\theta-i\cos k\theta)\\
&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)\right\}\\
&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\times(\cos 0-i\sin 0)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta
\end{aligned}$$

$(\text{右辺})=n$

よって　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$

たとえば，$n=9$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9}=\frac{9}{256}$

したがって　$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=\dfrac{3}{16}$　$\cdots$①

同様に，$n=18$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{17}\sin\frac{k\pi}{18}=\frac{9}{2^{16}}$

したがって　$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\cdots\sin 80^\circ=\dfrac{3}{256}$　$\cdots$②

さらに，①，② から　$\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\dfrac{1}{16}$