平成 27 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

1 C_1，C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad 0 \leqq x \leqq 2$$
$$C_2 : y = -x^2 - 2x, \quad -2 \leqq x \leqq 0$$

また，a を実数とし，直線 $y = a(x+4)$ を ℓ とする。

(1) 直線 ℓ と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下，a が (1) の条件を満たすとする。このとき，ℓ と C_1 で囲まれた部分の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で ℓ の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ を求めよ。

(3) n を 3 以上の整数とするとき，不等式

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$$

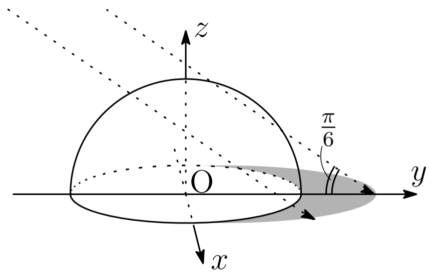
が成り立つことを示せ。

3 座標空間内に，原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球がある。下の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当っている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x = k$ において，球の外で光が当らない部分の y 座標を k を用いて表せ。

(2) xy 平面上において，球の外で光が当らない部分の面積を求めよ。

(3) $z \geqq 0$ において，球の外で光が当らない部分の体積を求めよ。



4 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

(1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。

(4) 8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

5 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。

(3) p，q を異なる素数とする。$2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p，q の組をすべて求めよ。

解答例

1 (1) $y=-x^2+2x$ と $y=a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2+2x=a(x+4) \quad \text{すなわち} \quad x^2+(a-2)x+4a=0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と ℓ が接するとき，$(*)$ より

$$(a-2)^2-4\cdot1\cdot4a=0, \quad 0<-\frac{a-2}{2\cdot1}<2$$

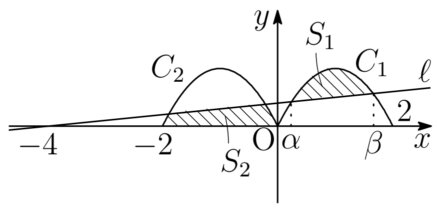
上の第 1 式および第 2 式から

$$a=10\pm4\sqrt{6}, \quad -2<a<2 \quad \text{すなわち} \quad a=10-4\sqrt{6}$$

よって，求める a の値の範囲は　　$\boldsymbol{0 \leqq a < 10-4\sqrt{6}}$

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=-(a-2), \quad \alpha\beta=4a,\\ \beta-\alpha&=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\\ &=\sqrt{a^2-20a+4}\end{aligned}$$



したがって

$$\begin{aligned}S_1&=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+2x)-a(x+4)\}\,dx\\ &=-\int_\alpha^\beta\{x^2+(a-2)x+4a\}\,dx\\ &=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(3) $y=-x^2-2x$ と $y=a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2-2x=a(x+4) \quad \text{すなわち} \quad x^2+(a+2)x+4a=0 \quad \cdots(**)$$

方程式 $(**)$ の解を γ，δ とすると $(\gamma<\delta)$

$$\begin{aligned}\gamma+\delta&=-(a+2), \quad \gamma\delta=4a,\\ \delta-\gamma&=\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta}=\sqrt{a^2-12a+4}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}S_2&=\int_{-2}^0\{-x^2-2x\}\,dx+\int_\gamma^\delta\{-x^2-2x-a(x+4)\}\,dx\\ &=-\int_{-2}^0 x(x+2)\,dx-\int_\gamma^\delta(x-\gamma)(x-\delta)\,dx\\ &=\frac{1}{6}\cdot2^3-\frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}(a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$S_1 = S_2$ より　$\dfrac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6}(a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}}$

整理すると　$(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$

ここで，$f(a) = (a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8$ とおくと

$$f(0) = 8 > 0, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{41\sqrt{41}-999}{125} < \frac{41{\cdot}7-999}{125} < 0,$$

$$10-4\sqrt{6} = 2(5-2\sqrt{6}) = \frac{2}{5+2\sqrt{6}} > \frac{2}{5+5} = \frac{1}{5}$$

$f(a)$ は連続であるから，中間値の定理により，$f(a)=0$，すなわち $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ を微分すると　$y' = -\dfrac{\log x + 2x}{x^2(\log x)^3}$

したがって，$x > 1$ において　$y' < 0$

よって，$y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において，単調減少．

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{(\log x)'}{(\log x)^2}\,dx = \boldsymbol{-\frac{1}{\log x} + C}$　**($\boldsymbol{C}$ は積分定数)**

別解 $t = \log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ であるから

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\log x} + C$$

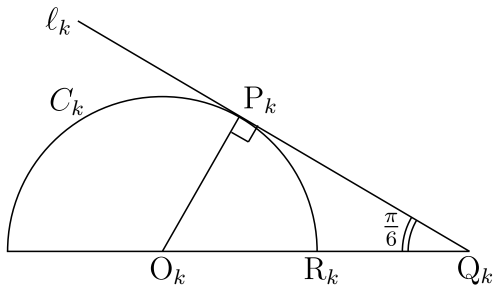
(3) (1)，(2) の結果から，n が 3 以上の整数であるとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} &= \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k(\log k)^2}\,dx \\ &< \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int_{2}^{n} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^n = -\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log 2} < \frac{1}{\log 2}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 球 $x^2+y^2+z^2=1$ の $z \geqq 0$ の部分の平面 $x=k$ $(-1<k<1)$ による断面の表す図形は，中心 $\mathrm{O}_k(k,\ 0,\ 0)$，半径 $\sqrt{1-k^2}$ の半円

$$y^2+z^2=1-k^2\ (-1<k<1),\quad z \geqq 0$$

この半円を C_k とし，C_k 上の点を $\mathrm{R}_k(k, \sqrt{1-k^2})$ とする．方向ベクトルが $(0,\ \sqrt{3}, -1)$ で C_k に接する直線を ℓ_k とし，ℓ_k と C_k の接点を P_k，ℓ_k と xy 平面との共有点を Q_k とすると



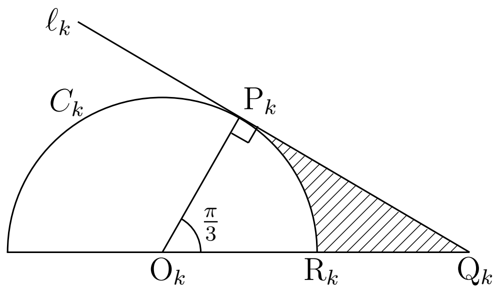
$$\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=\sqrt{1-k^2}$$
$$\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k=2\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=2\sqrt{1-k^2}$$

よって　$\boldsymbol{\sqrt{1-k^2} \leqq y \leqq 2\sqrt{1-k^2}}$

(2) (1) の結果から　$\mathrm{R}_k\mathrm{Q}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k-\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\sqrt{1-k^2}$

よって　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

(3) 右の図の斜線部分の面積は



$$\frac{1}{2}\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k\cdot\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k-\frac{1}{2}\mathrm{O}_k{\mathrm{R}_k}^2\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-k^2)-\frac{\pi}{6}(1-k^2)$$
$$=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}(1-k^2)$$

よって，求める体積を V とすると

$$V=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\int_{-1}^{1}(1-k^2)\,dk=\boldsymbol{\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 求める確率は，2 回連続して赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{2}{9}}$$

(2) 1 回の操作で青玉の個数は 1 個だけ増減する．最初に青玉が 1 個 (奇数個) であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が 3 個 (奇数個) にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．

(3) 偶数回目の操作で青玉の個数は 1 個または 3 個であるから，2 回目の操作で青玉が 1 個である確率を p とすると，(1) の結果から

$$p = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$ppp(1-p) = p^3(1-p) = \left(\frac{7}{9}\right)^3 \frac{2}{9} = \mathbf{\frac{686}{6561}}$$

(4) 青玉 3 個の状態から，2 回連続して青玉を取り出す確率を q とすると

$$q = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$(1-p)qpp = p^2(1-p)q$$

4 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$p(1-p)qp = p^2(1-p)q$$

6 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$pp(1-p)q = p^2(1-p)q$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} 3 \times p^2(1-p)q + p^3(1-p) &= 2p^2(1-p) + p^3(1-p) \\ &= p^2(1-p)(2+p) \\ &= \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{25}{9} = \mathbf{\frac{2450}{6561}} \end{aligned}$$

研究

操作を n 回繰り返す中で袋の中の玉が 3 個とも青玉になることなしに，青玉の個数が 1 個である確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき

(2) で示したように奇数回目に青玉が 1 個になることはないから　$p_n = 0$

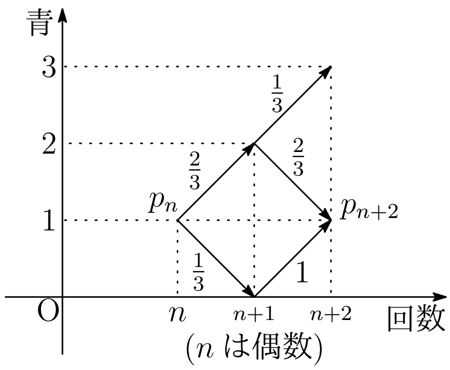
(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1\right) = \frac{7}{9}p_n$$

ゆえに　$p_n = \left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$

n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2} \times \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$



東大理科 2008 年

白黒 2 種類のカードがたくさんある．そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作 (**A**) を考える．

(**A**) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる．

以下の問 (1)，(2) に答えよ．

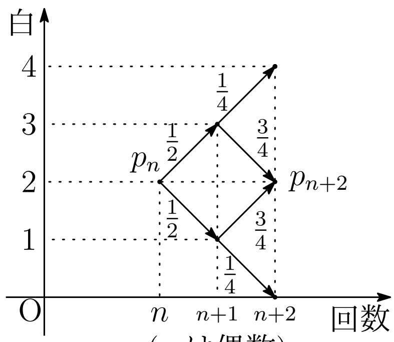
(1) 最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

(2) 最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

解答　(1) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 4 枚とも同じ色になることなしに，白と黒のカードが 2 枚づつである確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき
奇数回目に 4 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　**0**

(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$



(n は偶数)

$$p_{n+2} = p_n \times \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4}p_n$$

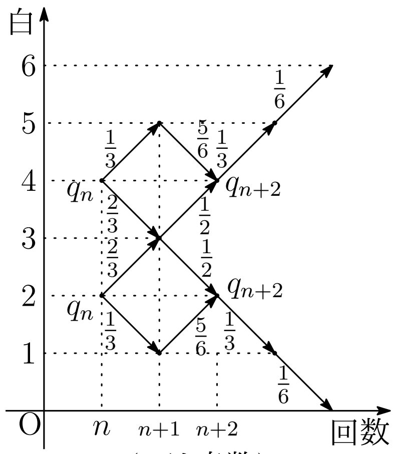
ゆえに　$p_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

求める確率は

$$p_{n-2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

(2) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 6 枚とも同じ色になることなしに，白のカードが 2 枚である確率を q_n とすると，対称性により白のカードが 4 枚である確率も q_n である．

(i) n が奇数のとき　$q_1 = \dfrac{1}{2}$



(n は奇数)

$$q_{n+2} = q_n \times \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} + q_n\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{17}{18}q_n$$

ゆえに　$q_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

求める確率は，3 以上の奇数のとき

$$q_{n-2} \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}}$$

(ii) n が 1 または偶数のとき
6 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　**0**

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

よって，$2^n - 1$ は 3 の倍数である．

(2) n が自然数のとき，$2^n - 1$ は奇数である．

i) $n = 1$ のとき，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である．

ii) $n \geqq 2$ のとき

$$2^n + 1 = 1(2^n - 1) + 2$$

上式より，$2^n + 1$ を $2^n - 1$ で割った余りは 2.
$2^n - 1$ を 2 で割った余りは 1 であるから，ユークリッドの互除法により，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ の最大公約数は 1 である．

よって，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である．

(3) $2^{p-1} - 1 = pq^2$ （$p,\ q$ は異なる素数） $\cdots(*)$

$(*)$ について，$p = 2$ のとき　$1 = 2q^2$

これを満たす素数 q は存在しない．

$p \neq 2$ となり，p は奇素数であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は自然数である．

(1) の結果から，$2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数であるから，pq^2 は 3 を因数にもつ．

i) $p = 3$ のとき，$(*)$ より　$3 = 3q^2$

q は素数であるから，不適．

ii) $q = 3$ のとき，$(*)$ より

$$2^{p-1} - 1 = 9p \quad \text{ゆえに} \quad (2^{\frac{p-1}{2}} + 1)(2^{\frac{p-1}{2}} - 1) = 9p$$

i) より，奇素数 p は $p \geqq 5$ であること，(2) の結果から，$2^{\frac{p-1}{2}} + 1$ と $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は互いに素であることに注意して

$$\text{(A)} \begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = 9 \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = p \end{cases} \quad \text{または} \quad \text{(B)} \begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = p \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 9 \end{cases}$$

(A) を解いて，$p = 7$.　(B) の第 2 式を満たす奇素数 p は存在しない．

よって　$\boldsymbol{(p,\ q) = (7,\ 3)}$