平成 26 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

問題 1 2 3 4 5

1 関数 $f(x) = x - \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。曲線 $y = f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを ℓ とする。

(1) ℓ の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) a は (1) で求めたものとする。曲線 $y = f(x)$，直線 $x = a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a，b，c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると，a，b，c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は存在しないことを証明せよ。

3 座標平面上の楕円

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \quad \cdots ①$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 楕円 ① と直線 $y = x + a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ。

(2) $|x| + |y| = 1$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体がなす図形の概形をかけ。

(3) 点 $(x,\ y)$ が楕円 ① 上を動くとき，$|x| + |y|$ の最大値，最小値とそれを与える $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。

4 A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨を 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1) A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

5 2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

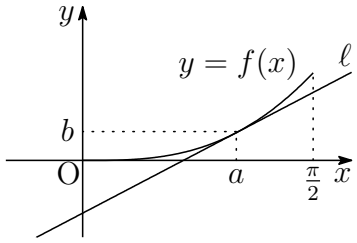
$$f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する。$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。

解答例

1 (1) $f(x) = x - \sin x$ より　$f'(x) = 1 - \cos x$

点 $(a,\ b)$ における接線の傾きが $\dfrac{1}{2}$ であるから



$$1 - \cos a = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\pi}{3}$$

また　$b = f(a) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，接点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

よって，この点における接線 ℓ の方程式は

$$y - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $a = \dfrac{\pi}{3}$ であるから，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - \sin x)^2\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x^2 - 2x\sin x + \sin^2 x)\, dx \\
&= \left[\ \frac{1}{3}x^3 + 2x\cos x - 2\sin x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{\pi^3}{81} + \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \pi\left(\dfrac{\pi^3}{81} + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{9\sqrt{3}}{8}\right)}$ ■

2 (1) 自然数 a を 3 で割った商を k，余りを r とすると $(r=0,\ 1,\ 2)$

$$\begin{aligned} &r=0\text{ のとき} && a^2=(3k)^2=3\cdot 3k^2 \\ &r=1\text{ のとき} && a^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1 \\ &r=2\text{ のとき} && a^2=(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1 \end{aligned}$$

よって，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．

(2) 自然数 a，b，c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすとき，a^2+b^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果から a^2，b^2 がともに 3 の倍数である．
このとき，自然数 l，m を用いて

$$a=3l,\quad b=3m$$

とおける．したがって

$$(3l)^2+(3m)^2=3c^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2=3(l^2+m^2)$$

c^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果により，c も 3 の倍数である．
よって，a，b，c はすべて 3 で割り切れる．

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c が存在すると仮定すると，(2) の結果から

$$a=3^nA,\quad b=3^nB,\quad c=3^nC$$

とおける (n は自然数，3 つの自然数 A，B，C の少なくとも 1 つは 3 で割り切れない)．このとき

$$\begin{aligned} (3^nA)^2+(3^nB)^2&=3(3^nC)^2 \\ A^2+B^2&=3C^2 \end{aligned}$$

上式および (2) の結果から，A，B，C はすべて 3 で割り切れることになり，A，B，C の仮定に反する．
よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は存在しない． ■

3 (1) $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1\cdots$① に $y=x+a\cdots$② を代入すると

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(x+a-1)^2}{4}=1$$

整理すると　$5x^2+2\cdot 2(2a-1)x+4(a^2-2a-2)=0\quad\cdots(*)$

判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D/4&=\{2(2a-1)\}^2-5\cdot 4(a^2-2a-2)\\D/16&=(2a-1)^2-5(a^2-2a-2)\\&=-a^2+6a+11\end{aligned}$$

楕円 ① と直線 ② が共有点をもつための条件は，$D\geqq 0$ であるから

$$-a^2+6a+11\geqq 0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{3-2\sqrt{5}\leqq a\leqq 3+2\sqrt{5}}$

(2) $|x|+|y|=1$ より，$|y|=-|x|+1$ であるから

$$-|x|+1\geqq 0\quad ゆえに\quad -1\leqq x\leqq 1$$

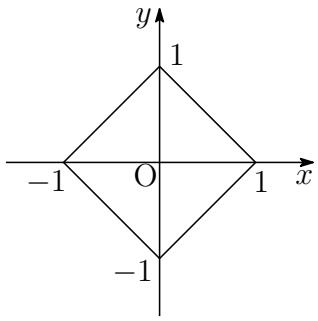
(i) $-1\leqq x\leqq 0$ のとき，$|y|=x+1$ であるから

$$y=x+1\quad または\quad y=-x-1$$

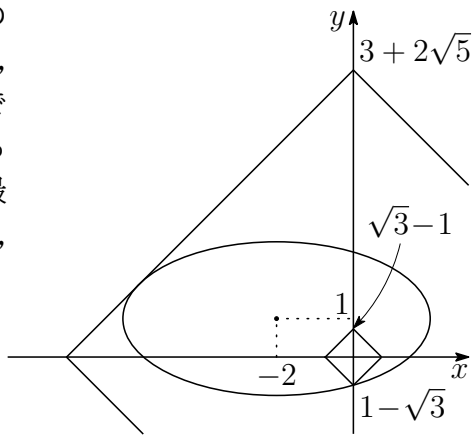
(ii) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，$|y|=-x+1$ であるから

$$y=-x+1\quad または\quad y=x-1$$

(i)，(ii) より，$|x|+|y|=1$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体がなす図形は，右の図のようになる．



(3) (2) と同様に考えると，$|x|+|y|=k$ の表す図形は $(k>0)$，4 点 $(k,\ 0)$，$(0,\ k)$，$(-k,\ 0)$，$(0,-k)$ を頂点とする正方形である．楕円 ① の中心は第 2 象限にあるから，楕円 ① 上で $|x|+|y|=k$ が最大となる点 $(x,\ y)$ は，右の図のように，(1) の結果から，楕円 ① と直線



$$y=x+3+2\sqrt{5} \quad \cdots ③$$

の接点で，最大値は $3+2\sqrt{5}$ である．

接点の x 座標は，$a=3+2\sqrt{5}$，$(*)$ から

$$x=-\frac{2\cdot 2(2a-1)}{2\cdot 5}=-\frac{2\cdot 2\{2(3+2\sqrt{5})-1\}}{2\cdot 5}=-\frac{10+8\sqrt{5}}{5}$$

これを ③ に代入して

$$y=-\frac{10+8\sqrt{5}}{5}+3+2\sqrt{5}=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$$

楕円 ① と x 軸および y 軸との共有点の座標は

$$(-2+2\sqrt{3},\ 0),\ (-2-2\sqrt{3},\ 0),\ (0,\ 1+\sqrt{3}),\ (0,\ 1-\sqrt{3})$$

上の図から，① 上の点 $(0,\ 1-\sqrt{3})$ で $|x|+|y|$ は最小値 $\sqrt{3}-1$ をとる．

よって　$\left(-\dfrac{\mathbf{10+8\sqrt{5}}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{5+2\sqrt{5}}}{\mathbf{5}}\right)$ で最大値 $\mathbf{3+2\sqrt{5}}$

$\mathbf{(0,\ 1-\sqrt{3})}$ で最小値 $\mathbf{\sqrt{3}-1}$ ■

4 (1) A さん，B さんが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額をそれぞれ X，Y とすると

X	0	5	10	15	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	5	10	15	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

よって，A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q は

$$p = \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \mathbf{\frac{3}{8}}$$

$$q = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2) (1) の X，Y に対して，ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額を Z とすると，Z およびその確率 $P(Z)$ を表にすると

合計金額 Z

$X \backslash Y$	**0**	**5**	**10**	**15**
0	15	0	0	0
5	30	15	5	5
10	30	25	15	10
15	30	25	20	15

合計金額の確率 $P(Z)$

$X \backslash Y$	**0**	**5**	**10**	**15**
0	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$
5	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$
10	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$
15	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$

したがって

$$P(Z=0) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$$

$$P(Z=5) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32}$$

$$P(Z=10) = \frac{3}{32}$$

$$P(Z=15) = q = \frac{8}{32}$$

$$P(Z=20) = \frac{1}{32}$$

$$P(Z=25) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32}$$

$$P(Z=30) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$$

よって，求める期待値 E は

$$E = 5 \times \frac{6}{32} + 10 \times \frac{3}{32} + 15 \times \frac{8}{32} + 20 \times \frac{1}{32} + 25 \times \frac{4}{32} + 30 \times \frac{7}{32} = \mathbf{\frac{255}{16}}$$

■

5 n 次関数 $f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ は，$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して

$$f_n\left(\frac{1}{k+1}\right) = f_n\left(\frac{1}{k}\right) = 0$$

が成り立つので，ロルの定理により

$$f_n'(c_k) = 0, \quad \frac{1}{k+1} < c_k < \frac{1}{k}$$

をみたす c_k が存在する．このとき，c_k は $n-1$ 次方程式

$$f_n'(x) = 0$$

の解であるから，その解の個数は高々$n-1$ 個である．

したがって，$n-1$ 個の開区間

$$\left(\frac{1}{2},\ 1\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right),\ \cdots\ \left(\frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n}\right)$$

にそれぞれ 1 個づつ $f_n'(x) = 0$ をみたす重解でない x が存在する．

$f_n(x)$ の最高次の係数に注意すると

$$f_n'(x) = n{\cdot}n!(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{n-1})$$

$x = c_k$ の前後で $f_n'(x)$ の符号が変化するので，$f_n(c_k)$ は極値である．

よって，$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとる．

別解
$$g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n!} = \left(x - \frac{1}{1}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdots\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

とおくと，$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して，$g_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを示せばよい．

$$\log|g_n(x)| = \sum_{j=1}^{n} \log\left|x - \frac{1}{j}\right|$$

を微分すると

$$g_n'(x) = g_n(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - \frac{1}{j}}$$

さらに，$h_n(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - \frac{1}{j}}$ とおくと

$$g_n'(x) = g_n(x) h_n(x)$$
$$h_n'(x) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{j}\right)^2}$$

$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して，区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ で，$h_n(x)$ は単調減少であり

$$\lim_{x \to \frac{1}{k+1}+0} h(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \frac{1}{k}-0} h(x) = -\infty$$

であるから

$$h_n(c_k) = 0, \quad \frac{1}{k+1} < c_k < \frac{1}{k}$$

をみたす c_k が唯一存在し，

$$\frac{1}{k+1} < x < c_k \text{で } h(x) > 0, \quad c_k < x < \frac{1}{k} \text{で } h(x) < 0$$

$g_n(x)$ は，区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ で定符号であるから，$g_n'(x)$ は $x = c_k$ の前後で符号が変わる．したがって，$g_n(c_k)$ は，区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ におけるただ 1 つの極値である． ■