平成25年度　九州大学２次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a > 1$とし，2つの曲線

$$y = \sqrt{x} \qquad (x \geqq 0),$$
$$y = \frac{a^3}{x} \qquad (x > 0)$$

を順にC_1，C_2とする。また，C_1とC_2の交点PにおけるC_1の接線をl_1とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線C_1とy軸および直線l_1で囲まれた部分の面積をaを用いて表せ。

(2) 点PにおけるC_2の接線と直線l_1のなす角を$\theta(a)$とする$\left(0 < \theta(a) < \dfrac{\pi}{2}\right)$。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 一辺の長さが1の正方形OABCを底面とし，点Pを頂点とする四角錐POABCがある。ただし，点Pは内積に関する条件$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{4}$，および$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}$をみたす。辺APを2 : 1に内分する点をMとし，辺CPの中点をNとする。さらに，点Pと直線BC上の点Qを通る直線PQは，平面OMNに垂直であるとする。このとき，長さの比BQ : QC，および線分OPの長さを求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 横一列に並んだ6枚の硬貨に対して，以下の操作Lと操作Rを考える。

L: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表　と並んだ状態で操作Lを行うときに，3の目が出た場合は，裏裏表表裏表　となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が6枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作Lを2回続けて行うとき，表が1枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態からL，Rの順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態からL，R，Lの順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 原点Oを中心とし，点A(0, 1)を通る円をSとする。点B$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$で円$S$に内接する円$T$が，点Cで$y$軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 円Tの中心Dの座標と半径を求めよ。

(2) 点Dを通りx軸に平行な直線をlとする。円Sの短い方の弧$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，円$T$の短い方の弧$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，および線分ACで囲まれた図形を$l$のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{5}$ 実数x，y，tに対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える。$(AB)^2$が対角行列，すなわち$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$の形の行列であるとする。

(1) 命題「$3x-3y-2t \neq 0 \implies A = tB$」を証明せよ。

以下(2)，(3)，(4)では，さらに$A^2 \neq E$かつ$A^4 = E$であるとする。ただし，Eは単位行列を表す。

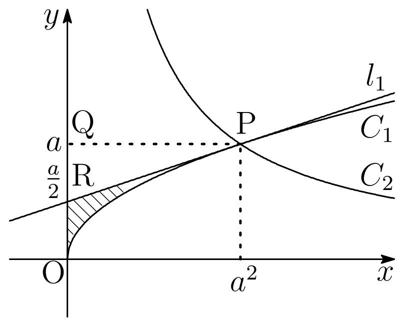
(2) $3x-3y-2t=0$を示せ。

(3) xとyをそれぞれtの式で表せ。

(4) x，y，tが整数のとき，行列Aを求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) C_1 と C_2 の交点 P の x 座標は



$$\sqrt{x} = \frac{a^3}{x} \quad \text{これを解いて} \quad x = a^2$$

ゆえに，点 P の座標は $\quad (a^2,\ a)$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より，l_1 の方程式は

$$y - a = \frac{1}{2a}(x - a^2) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{x}{2a} + \frac{a}{2}$$

求める斜線部分の面積は，$C_1 : x = y^2\ (y \geqq 0)$ であることを用いて

$$\int_0^a x\,dy - \triangle\mathrm{PQR} = \int_0^a y^2\,dy - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a^2 = \left[\,\frac{y^3}{3}\,\right]_0^a - \frac{a^3}{4} = \boldsymbol{\frac{a^3}{12}}$$

補足 C_1 と C_1 上の $y=0$ および $y=a$ における 2 接線で囲まれた部分の面積である．九大 2009 年一般前期文系数学$\boxed{\mathbf{4}}$の補足[1]を参照.

(2) C_2 の P における接線を l_2 とする．$\left(\dfrac{a^3}{x}\right)' = -\dfrac{a^3}{x^2}$ より，l_2 の傾きは $\quad -\dfrac{1}{a}$

$a > 1$ より，$-1 < -\dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{2a} < 1$ であるから，l_1，l_2 の傾きについて

$$\tan\alpha = \frac{1}{2a}, \quad \tan\beta = -\frac{1}{a} \quad \left(-\frac{\pi}{4} < \beta < 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 < \alpha - \beta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\qquad \theta(a) = \alpha - \beta$

$$\tan\theta(a) = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2a} - \left(-\frac{1}{a}\right)}{1 + \frac{1}{2a}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)} = \frac{\frac{3}{2a}}{1 - \frac{1}{2a^2}}$$

ゆえに $\quad \displaystyle\lim_{a\to\infty}\tan\theta(a) = \lim_{a\to\infty}\frac{\frac{3}{2a}}{1-\frac{1}{2a^2}} = 0 \quad$ すなわち $\quad \displaystyle\lim_{a\to\infty}\theta(a) = 0$

したがって，上の諸式により

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a) &= \lim_{a\to\infty} a\tan\theta(a)\cos\theta(a)\\ &= \lim_{a\to\infty}\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2a^2}}\cos\theta(a) = \frac{3}{2}\cos 0 = \boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{e}\perp\vec{a}$，$\vec{e}\perp\vec{c}$，$|\vec{e}|=1$とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{e}$を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{c}+z\vec{e}\qquad (x,\ y,\ z\text{は実数})$$

とおくと，条件により　$x=\dfrac{1}{4}$，$y=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}$

したがって，M，N の条件により

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}z\vec{e}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)=\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}z\vec{e}$$

α，β，γを実数とし，$\alpha\vec{a}+\beta\vec{c}+\gamma\vec{e}$が，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$および$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$に垂直であるとき

$$\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{2}{3}z\gamma=0,\quad \frac{1}{8}\alpha+\frac{3}{4}\beta+\frac{1}{2}z\gamma=0$$

したがって　$\alpha:\beta:\gamma=2z:z:-2$

ゆえに，直線 PQ の方向ベクトルを$\vec{v}=2z\vec{a}+z\vec{c}-2\vec{e}$とすると，直線 PQ は，媒介変数$t$を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\vec{v}&=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}+t(2z\vec{a}+z\vec{c}-2\vec{e})\\&=\left(\frac{1}{4}+2zt\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}+zt\right)\vec{c}+(z-2t)\vec{e}\end{aligned}$$

Q は BC 上の点であるから，上式より

$$\frac{1}{2}+zt=1,\quad z-2t=0\quad\text{すなわち}\quad z=\pm1,\ t=\pm\frac{1}{2}\quad(\text{複号同順})$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{5}{4}\vec{a}+\vec{c}$，　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\dfrac{5}{4}\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$であるから　$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}$

よって　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\dfrac{1}{4}:\dfrac{5}{4}=\mathbf{1:5}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)$，$z=\pm1$より

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+1}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{4}}$$

補足 ベクトル$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$は$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\times\overrightarrow{\mathrm{ON}}$に平行である．九大 2004 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{4}}$ のベクトル積[2](外積) を参照．

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 1回目，2回目に出た目を，それぞれ i，j とすると，$|i-j|$ 枚の硬貨は1回だけ反転し，それ以外の硬貨は反転しないか，2回反転する．
したがって，この操作による表の枚数は $6-|i-j|$ である．
ゆえに表が1枚となるとき

$$6-|i-j|=1 \quad \text{すなわち} \quad |i-j|=5$$

これをみたすのは，$(i,\ j)=(1,\ 6),\ (6,\ 1)$ の2組である．
よって，求める確率は $\dfrac{2}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{18}}$

(2) L および R において出た目を，それぞれ i，j とし，これらの操作による表の枚数を $LR(i,\ j)$ とする．

i) $2 \leqq i+j \leqq 6$ のとき，$(i+j)$ 枚の硬貨は1回だけ反転し，残りの硬貨は反転しないから $\quad LR(i,\ j)=6-(i+j)$

ii) $7 \leqq i+j \leqq 12$ のとき，$(i+j-6)$ 枚の硬貨は2回反転し，残りの硬貨は1回だけ反転するから $\quad LR(i,\ j)=i+j-6$

i),ii) より，$LR(i,\ j)=|i+j-6|$ となり，求める期待値は

$$\frac{1}{6^2}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6} LR(i,\ j)=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|i+j-6|=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|j-(7-i)+1|$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|j-i+1|$$

$$=\frac{1}{36}\left(\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}|j-i+1|+\sum_{1\leqq j<i\leqq 6}|j-i+1|+\sum_{1\leqq i=j\leqq 6}|j-i+1|\right)$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i+1)+\sum_{1\leqq j<i\leqq 6}(i-j-1)+6\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i+1)+\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i-1)+6\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(2j-2i)+6\right\}=\frac{1}{36}\sum_{j=2}^{6}\sum_{i=1}^{j-1}(2j-2i)+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{j=2}^{6}\{2j(j-1)-j(j-1)\}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{j=1}^{6}(j^2-j)+\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\left(\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\right)+\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{19}{9}}$$

別解 $LR(i,\ j) = |i+j-6|$ の値は，右の表のようになる．したがって，求める期待値は

$$\frac{1\cdot 10 + 2\cdot 8 + 3\cdot 6 + 4\cdot 4 + 5\cdot 2 + 6}{6^2}$$
$$= \frac{76}{36} = \mathbf{\frac{19}{9}}$$

$j \backslash i$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	4	3	2	1	0	1
2	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
4	1	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5	6

(3) この操作により，すべての硬貨が表となるのは，L，R の操作が終わった時点で，次の (a)〜(f) の場合である．

(a) 裏表表表表表　(b) 裏裏表表表表　(c) 裏裏裏表表表
(d) 裏裏裏裏表表　(e) 裏裏裏裏裏表　(f) 裏裏裏裏裏裏

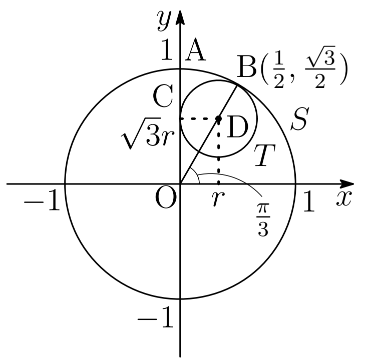
最初の L，R の操作で出た目をそれぞれ i，j とする．
(a)〜(e) となる $(i,\ j)$ の組は，順次，

$$(6,\ 5),\ (6,\ 4),\ (6,\ 3),\ (6,\ 2),\ (6,\ 1)$$

(f) となる $(i,\ j)$ の組は，$i+j=6$ をみたす 5 通り．
(a)〜(f) について，最後の L の操作における目の出方は，順次，1〜6 である．よって，求める確率は

$$\frac{5+5}{6^3} = \mathbf{\frac{5}{108}}$$

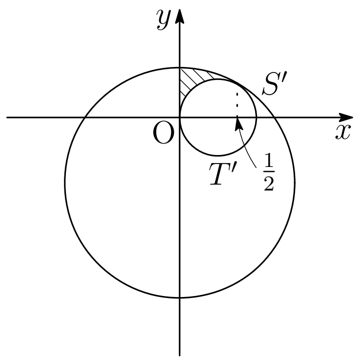
$\boxed{4}$ (1) OB の x 軸の正の方向となす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから，T の半径を r とすると，D の座標は $(r,\ \sqrt{3}r)$，$\mathrm{OD} = 2r$ である．
右の図より，$\mathrm{OD} + \mathrm{DB} = 1$ であるから



$$2r + r = 1 \quad ゆえに \quad r = \frac{1}{3}$$

よって　$\mathrm{D}\left(\mathbf{\frac{1}{3}},\ \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)$，半径 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

(2) S，T のグラフを y 軸方向に $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ だけ平行移動した図形をそれぞれ，S'，T' とすると



$$S' : x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1$$

$$T' : \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$$

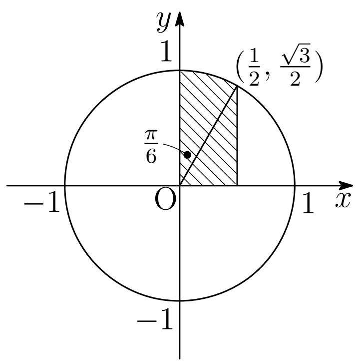
右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めればよい．
S' および T' の上半分の曲線の方程式は，それぞれ

$$y = \sqrt{1 - x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y = \sqrt{-x^2 + \frac{2}{3}x}$$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\sqrt{-x^2 + \frac{2}{3}x}\right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (2 - x)\, dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx \end{aligned}$$

ここで，$I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ とおくと，
I は右の図の斜線部分の面積であるから



$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

よって

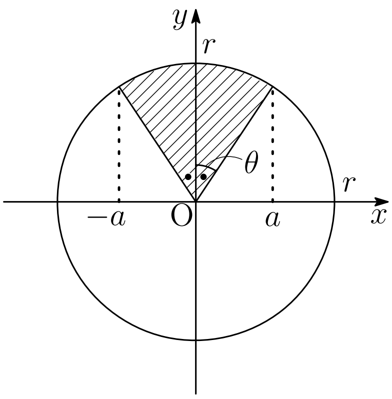
$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi \left[\, 2x - \frac{x^2}{2} \,\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \times I \\ &= \frac{2}{3}\pi \times \frac{7}{8} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2} \end{aligned}$$

準備

九大 2012 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{1}}$ のパップス・ギュルダンの定理[3]を参照.

右の図の斜線部分の重心の y 座標 h は

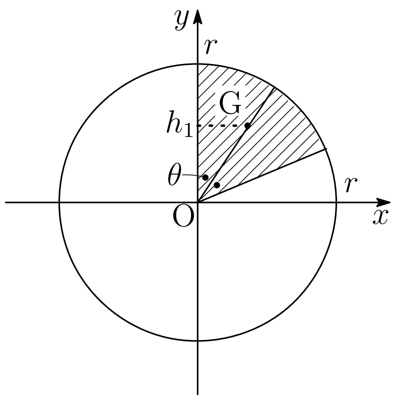
$$h = \frac{2a}{3\theta} = \frac{2r\sin\theta}{3\theta}$$

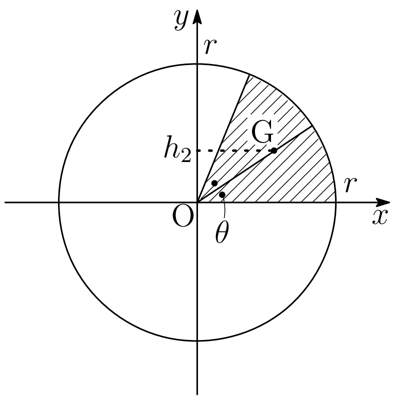


次の 2 つの図形の重心を G とすると，$\mathrm{OG} = h$ であるから，これらの重心 G の y 座標は

$$h_1 = h\cos\theta = \frac{2r\sin\theta}{3\theta}\cos\theta = \frac{r\sin 2\theta}{3\theta}$$

$$h_2 = h\sin\theta = \frac{2r\sin\theta}{3\theta}\sin\theta = \frac{2r\sin^2\theta}{3\theta}$$



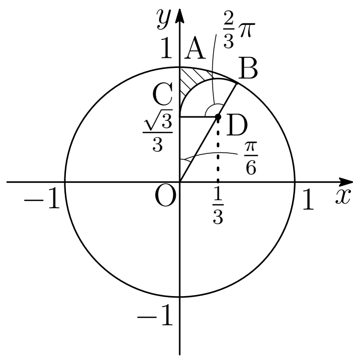


[3]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

考察

右の図の斜線部分の面積および重心の y 座標を求め，この斜線部分を直線 CD のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求める．

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ を弧とする中心角 $\dfrac{\pi}{6}$ の扇形の面積 S および重心の y 座標 h は



$$S=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12},\quad h=\frac{1\sin\frac{\pi}{6}}{3\cdot\frac{\pi}{12}}=\frac{2}{\pi}$$

$\triangle$OCD の面積 S_1 および重心の y 座標 h_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{18},\quad h_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ を弧とする中心角 $\dfrac{2\pi}{3}$ の扇形の面積 S_2 および重心の y 座標 h_2 は

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{27},\quad h_2=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\cdot\frac{1}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}}{3\cdot\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2\pi}$$

斜線部分の面積を S_3，その重心の y 座標を h_3 とすると

$$S_1+S_2+S_3=S,\quad h_1S_1+h_2S_2+h_3S_3=hS$$

したがって　　$S_3=\dfrac{5\pi}{108}-\dfrac{\sqrt{3}}{18},\quad h_3S_3=\dfrac{1}{9}-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{81}$

パップス・ギュルダンの定理により，斜線部分を直線 CD のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned}V&=2\pi\left(h_3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)S_3=2\pi h_3S_3-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}S_3\\&=2\pi\left(\frac{1}{9}-\frac{\sqrt{3}\pi}{81}\right)-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{108}-\frac{\sqrt{3}}{18}\right)\\&=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ (1) $AB=\begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x-6y & 4x-5y \\ x-5t & x-4t \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB)&=(5x-6y)+(x-4t)\\&=2(3x-3y-2t),\\ \det(AB)&=(5x-6y)(x-4t)-(4x-5y)(x-5t)\\&=x^2-ty-xy\end{aligned}$$

ハミルトン・ケリーの定理により

$$(AB)^2-2(3x-3y-2t)AB+(x^2-ty-xy)E=O$$

$(AB)^2$ が対角行列であるから，上式より，$3x-3y-2t\neq 0$ のとき，AB は対角行列である．このとき，AB の $(1,\ 2)$ 成分および $(2,\ 1)$ 成分は，ともに 0 であるから

$$4x-5y=0,\quad x-5t=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=5t,\quad y=4t$$

よって　$A=\begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5t & 4t \\ -t-5t & -5t \end{pmatrix}=tB$

補足

一般に，$\det(AB)=\det(A)\det(B)$ が成り立つ．

$$\det(AB)=\det(A)\det(B)=(-x^2+ty+xy)\cdot(-1)=x^2-ty-xy$$

2 次の正方行列 X，Y について，$\mathrm{tr}(X)=0$，$\mathrm{tr}(Y)=0$，XY が対角行列ならば，次式が成立する．

$$X=kY \qquad (k\text{ は定数})$$

証明 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix}$ とおくと

$$XY=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+br & aq-bp \\ cp-ar & cq+ap \end{pmatrix}$$

XY が対角行列であるから

$$aq-bp=0,\quad cp-ar=0 \quad \text{ゆえに} \quad a:b:c=p:q:r$$

よって，定数 k を用いて　$X=kY$　**証終**

(2) (背理法による証明)

$3x-3y-2t \neq 0$ と仮定すると，(1) の命題により，$A=tB$ となる．

また，$B^2=E$ であるから

$$A^2=(tB)^2=t^2B^2=t^2E, \quad A^4=(A^2)^2=(t^2E)^2=t^4E$$

$A^4=E$ より　$t^4=1$　ゆえに　$t=\pm 1$

このとき，$A^2=E$ となり，条件に反する．

よって　　$3x-3y-2t=0$

(3) $\mathrm{tr}(A)=0$ に注意して，A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2+\det(A)E=O$$

したがって　　$A^2=-\det(A)E, \qquad A^4=\{\det(A)\}^2E$

条件により　$-\det(A)\neq 1$，$\{\det(A)\}^2=1$　ゆえに　$\det(A)=1$

上式および (2) の結果から

$$\begin{cases} -x^2+ty+xy=1 & \cdots ① \\ 3x-3y-2t=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　　$y=x-\dfrac{2}{3}t \quad \cdots ②'$

②′ を ① に代入して，整理すると　$tx=2t^2+3$

このとき，$t\neq 0$ であるから，上式および ②′ より

$$\boldsymbol{x=2t+\frac{3}{t}, \quad y=\frac{4t}{3}+\frac{3}{t}}$$

(4) (3) の結果より　$x-2t=\dfrac{3}{t}$，$y-\dfrac{3}{t}=\dfrac{4t}{3}$

$x-2t$ は整数であるから，第 1 式より，$\dfrac{3}{t}$ は整数.

さらに，$y-\dfrac{3}{t}$ が整数であるから，第 2 式より，$\dfrac{4t}{3}$ は整数.

ゆえに，t は 3 の約数かつ 3 の倍数であるから　$t=\pm 3$

これを (3) に代入して，$t=\pm 3$ のとき　$x=\pm 7$，$y=\pm 5$　(複号同順)

よって　　$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}}$