平成24年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2次の正方行列 A，B はそれぞれ

$$A\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix},$$

$$B\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad B\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

をみたすものとする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，E は2次の単位行列を表すものとする。

(1) 行列 A，B，A^2，B^2 を求めよ。

(2) $(AB)^3=E$ であることを示せ。

(3) 行列 A から始めて，B と A を交互に右から掛けて得られる行列

$$A,\quad AB,\quad ABA,\quad ABAB,\quad \cdots\cdots,$$

および行列 B から始めて，A と B を交互に右から掛けて得られる行列

$$B,\quad BA,\quad BAB,\quad BABA,\quad \cdots\cdots$$

を考える。これらの行列の内で，相異なるものをすべて成分を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) この方程式が実数解を持つような a の範囲を，n を用いて表せ。

(2) この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解を持つような a の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ p と q はともに整数であるとする。2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が実数解 α，β を持ち，条件 $(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) \neq 0$ をみたしているとする。

このとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3 は整数であることを示せ。

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1) > 0$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき，p と q の値をすべて求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

$\boxed{\mathbf{5}}$ いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，
箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

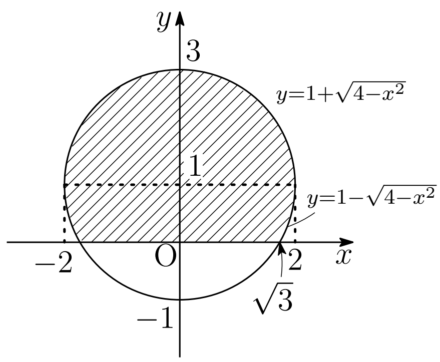
(1) 試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n = 1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2) 試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n = 1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3) 試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 立体は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体である．円の方程式 $x^2+(y-1)^2=4$ を y について解くと



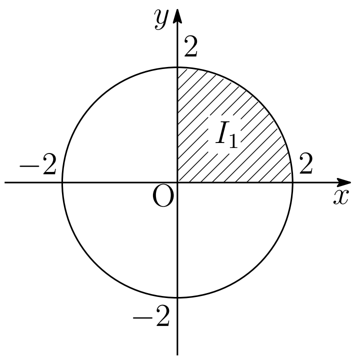
$$y=1\pm\sqrt{4-x^2}$$

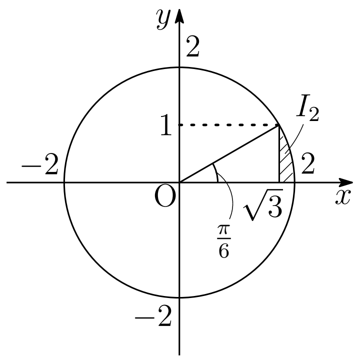
斜線部分は，y 軸に関して対称であるから，求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=2\left\{\pi\int_0^2(1+\sqrt{4-x^2})^2dx-\pi\int_{\sqrt{3}}^2(1-\sqrt{4-x^2})^2dx\right\}\\&=2\pi\left\{\int_0^2(5-x^2+2\sqrt{4-x^2})dx-\int_{\sqrt{3}}^2(5-x^2-2\sqrt{4-x^2})dx\right\}\\&=2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx+2\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}dx\right\}\end{aligned}$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$，$I_2=\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}dx$ とおくと，これらはそれぞれ下の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2=\pi\\I_2&=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot1\\&=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$





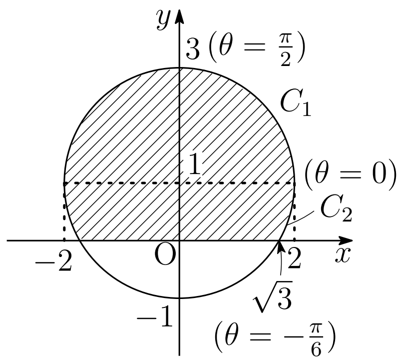
よって

$$V=2\pi\left\{\left[5x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+2\cdot\pi+2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{16}{3}\pi^2+6\sqrt{3}\pi}$$

別解 1 円 $x^2+(y-1)^2=4$ を

$$C(\theta)=(2\cos\theta,\ 2\sin\theta+1)$$

とおく．$C(\theta)$ の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ および $-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq 0$ の部分をそれぞれ C_1，C_2 とすると，求める回転体の体積 V は



$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi}&=\int_{C_1}y^2\,dx-\int_{C_2}y^2\,dx\\&=\int_0^2 y^2\,dx-\int_{\sqrt{3}}^2 y^2\,dx\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}y^2\,dx&=y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta=(2\sin\theta+1)^2(2\cos\theta)'d\theta\\&=-2(4\sin^3\theta+4\sin^2\theta+\sin\theta)\,d\theta\\&=2(\sin3\theta+2\cos2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi}&=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin3\theta+2\cos2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta\\&\qquad-2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(\sin3\theta+2\cos2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta\\&=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(\sin3\theta+2\cos2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta\\&=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-\sin3\theta-2\cos2\theta+4\sin\theta+2)\,d\theta\\&=2\Big[\,\frac{1}{3}\cos3\theta-\sin2\theta-4\cos\theta+2\theta\,\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}\pi+3\sqrt{3}\end{aligned}$$

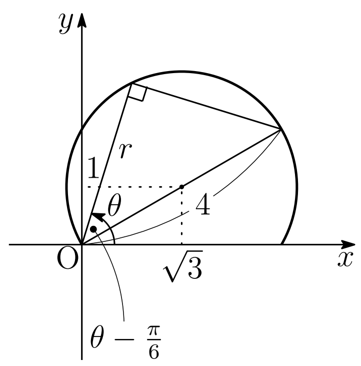
よって　　$V=\boldsymbol{\dfrac{16}{3}\pi^2+6\sqrt{3}\pi}$

別解 2 円 $x^2+(y-1)^2=4$ を x 軸方向に $\sqrt{3}$ だけ平行移動した円

$$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$$

の x 軸の上側の部分を極方程式で表すと

$$r=4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$$



求める立体の体積を V とすると

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}r^3\sin\theta\,d\theta=\frac{16}{3}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta\quad\cdots(*)$$

であるから [1]

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^4\,d\theta&=16\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\,d\theta=16\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin^4 t\,dt\\&=\Big[\,6t-6\sin t\cos t-4\sin^3 t\cos t\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\\&=4\pi+\frac{9}{4}\sqrt{3}\quad\cdots ①\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3(-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta&=\Big[\,\frac{1}{4}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^4\,\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}\\&=-\frac{9}{4}\quad\cdots ②\end{aligned}$$

① $-$ ② $\times\sqrt{3}$ により　$$4\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta=4\pi+\frac{9}{2}\sqrt{3}$$

したがって　$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta=\pi+\frac{9}{8}\sqrt{3}$$

上式を $(*)$ に代入すると

$$V=\frac{16}{3}\pi\left(\pi+\frac{9}{8}\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{16}{3}\pi^2+6\sqrt{3}\pi}$$

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf の $\boxed{\mathbf{1}}$ を参照

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

一般に，$a \leqq x \leqq b$ において $f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq 0$ である 2 曲線 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積を S，その重心の y 座標を h とすると

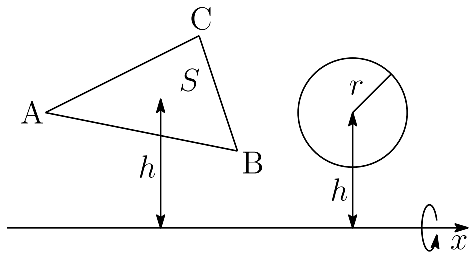
$$hS = \int_a^b \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} \times \{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

$\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$ は微小区間の面積，$\dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$ はその重心を表す．
この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

よって，上の 2 式から　　$\boldsymbol{V = 2\pi hS}$
回転体の体積は，(回転による重心の軌跡の長さ) × (面積) である．

例 1 パップス・ギュルダンの定理を用いると，右の図の △ABC の面積が S，x 軸から重心までの距離が h のとき，x 軸のまわりに 1 回転した立体の体積 V は



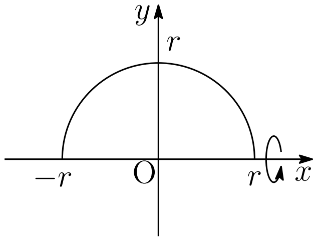
$$V = 2\pi hS$$

半径 r の円の中心と x 軸との距離が h のとき $(r < h)$，x 軸のまわりに 1 回転した立体 (solid torus) の体積 V は (torus は solid torus の表面)

$$V = 2\pi h \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 hr^2$$

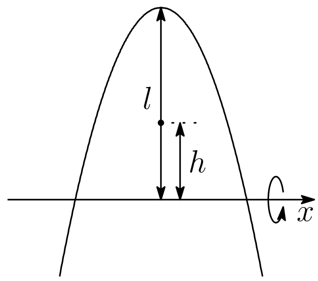
図形の面積とその回転体の体積からその図形の重心を求めることができる．

例 2 右の半円は，y 軸に関して対称であるから，重心の x 座標は 0 である．また重心の y 座標 h は，x 軸のまわりに 1 回転すると，その立体 (球) の体積 $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ と半円の面積 $S = \dfrac{1}{2}\pi r^2$ により



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi h \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 \quad \text{ゆえに} \quad h = \frac{4r}{3\pi}$$

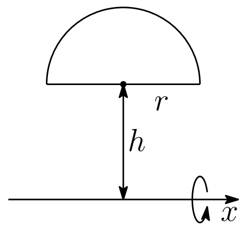
例 3 放物線と x 軸で囲まれた図形の重心は，その面積と x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を用いて求めることができる．右の図では



$$h = \frac{2}{5}l$$

となる．一般に，これと図形の面積 S によりその回転体の体積を求めることできる．

例 4 右の図の半円 $(r < h)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は，例 2 により x 軸から重心までの距離は

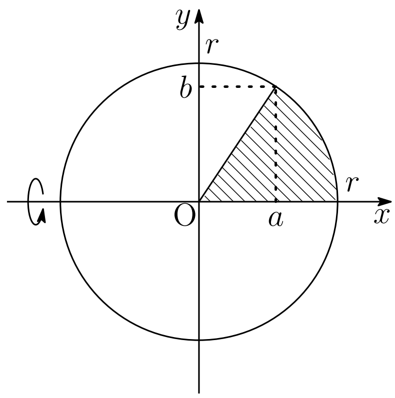


$$h + \frac{4r}{3\pi}$$

であるから，求める回転体の体積 V は

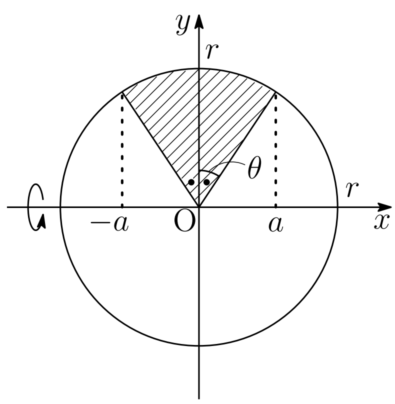
$$V = 2\pi\left(h + \frac{4r}{3\pi}\right)\cdot\frac{1}{2}\pi r^2 = \pi^2 hr^2 + \frac{4}{3}\pi r^3$$

例 5 右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積 V_1 は



$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi b^2\cdot a + \pi\int_a^r (r^2 - x^2)dx \\ &= \frac{\pi}{3}(r^2 - a^2)a + \pi\left[\ r^2x - \frac{x^3}{3}\ \right]_a^r \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^2 a \end{aligned}$$

したがって，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積 V_2 は $(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2})$



$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2V_1 = \frac{4}{3}\pi r^2 a$$

斜線部分の面積を S，重心の y 座標を h とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2\cdot 2\theta = r^2\theta \\ h &= \frac{V_2}{2\pi S} = \frac{2a}{3\theta} \end{aligned}$$

また，例 5 の下の図において，$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき，斜線部分の重心の y 座標を h とすると，斜線部以外の扇形の重心の y 座標は

$$-\frac{2a}{3(\pi-\theta)}$$

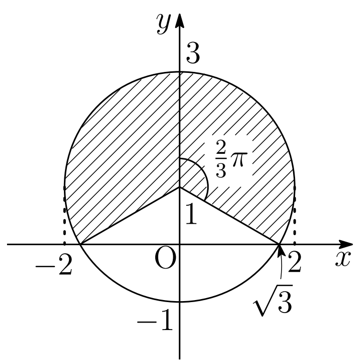
したがって，斜線部および斜線部以外の図形をあわせた図形 (円) の重心は円の中心 (原点) であるから

$$r^2\theta \times h + r^2(\pi-\theta) \times \left\{-\frac{2a}{3(\pi-\theta)}\right\} = \pi r^2 \times 0$$

これを解いて　　$h = \dfrac{2a}{3\theta}$　　$\cdots(*)$

ゆえに，$(*)$ は，$0 < \theta \leqq \pi$ について成立する．

例 6 右の図形の面積 S は



$$S = 2 \times \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

$(*)$ から，その重心の座標 h は

$$h = 1 + \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\frac{2}{3}\pi} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

よって，斜線部分を x 軸の回りに 1 回転させた立体の体積は

$$2\pi hS = 2\pi\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) \times \frac{8}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi^2 + \frac{16\sqrt{3}}{3}\pi$$

また，3 点 $(-\sqrt{3},\ 0)$，$(\sqrt{3},\ 0)$，$(0,\ 1)$ を頂点する三角形を x 軸のまわりに回転させた立体の体積は $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ であるから，円 $x^2+(y-1)^2=4$ を x 軸のまわりに回転させた立体の体積 V は

$$V = \left(\frac{16}{3}\pi^2 + \frac{16\sqrt{3}}{3}\pi\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi^2 + 6\sqrt{3}\pi$$

パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外である．入試では使用できないが，便利な検算法である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $9A\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}+5A\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}$ より

$$A\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\-64\end{pmatrix}\quad \text{ゆえに}\quad A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}$$

また　$7A\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}$ より

$$A\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\-40\end{pmatrix}\quad \text{ゆえに}\quad A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$$

したがって　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}&\mathbf{3}\\\mathbf{-8}&\mathbf{-5}\end{pmatrix}$

$-11B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}=-11\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$ より

$$B\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48\\-56\end{pmatrix}\quad \text{ゆえに}\quad B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}$$

また　$B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$ より　$B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$

したがって　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{6}&\mathbf{5}\\\mathbf{-7}&\mathbf{-6}\end{pmatrix}$

よって　$A^2=\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$

$$B^2=\begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

別解

$A\begin{pmatrix}-3&7\\5&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}$，$B\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-7\\6&10\end{pmatrix}$ より

$$A=\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&7\\5&-9\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-5&-7\\6&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix}$$

(2) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix}$

$X = AB$ とおいて，ハミルトン・ケーリーの定理に適用すると

$$X^2 + X + E = O$$

したがって　$(X - E)(X^2 + X + E) = O$　ゆえに　$X^3 = E$

よって　　$\boldsymbol{(AB)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(3) $BA = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$

$AB + BA = -E$ であるから，$BA = -AB - E$ と (1) の結果により

$$\begin{aligned}
ABA &= A(BA) = A(-AB - E) = -A^2B - A = -A - B, \\
BAB &= (BA)B = (-AB - E)B = -AB^2 - B = -A - B, \\
ABAB &= (ABA)B = (-A - B)B = -AB - B^2 = -AB - E, \\
BABA &= (BAB)A = (-A - B)A \\
&= -A^2 - BA = -E - (-AB - E) = AB, \\
ABABA &= (ABAB)A = (-AB - E)A \\
&= -ABA - A = -(-A - B) - A = B, \\
BABAB &= (BABA)B = (AB)B = AB^2 = A, \\
ABABAB &= (ABABA)B = BB = E, \\
BABABA &= (BABAB)A = (BABAB)A = AA = E \\
&\vdots
\end{aligned}$$

したがって，上の行列は循環して高々次の 6 個の行列からなる．

$$A, \quad B, \quad AB, \quad -AB - E, \quad -A - B, \quad E$$

これらの行列は，それぞれ

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix},}$$
$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 & -8 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

であり，この 6 個が求める行列である．

別解

(3) は (2) の結果 $(AB)^3 = E$ に左から順次 A，B を交互にかけると，$A^2 = E$，$B^2 = E$ に注意して

$$\begin{aligned} ABABAB &= E, \\ BABAB &= A, \\ ABAB &= BA, \\ BAB &= ABA, \\ AB &= BABA, \\ B &= ABABA, \\ E &= BABABA \end{aligned}$$

したがって，行列

$$A, \quad AB, \quad ABA, \quad ABAB, \quad \cdots\cdots,$$

および行列

$$B, \quad BA, \quad BAB, \quad BABA, \quad \cdots\cdots$$

は，循環して高々次の 6 個の行列からなる．

$$E, \quad A, \quad BA, \quad ABA, \quad AB, \quad B$$

これらの行列は，それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -11 & -8 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$$

であり，この 6 個が求める行列である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1) \quad \cdots(*)$

$a=0$ の場合，方程式 $(*)$ は実数解 $x=-1$ をもつ.

$a\neq 0$ の場合，方程式 $(*)$ が実数解をもつとき，関数

$$y=x^2+|x+1|+n-1\cdots ①$$

のグラフと直線 $y=\dfrac{\sqrt{n}}{a}(x+1)$ が共有点をもつ.

関数 ① は

$$x \geqq -1 \text{ のとき} \quad y=x^2+x+n=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+n-\frac{1}{4}$$

$$x < -1 \text{ のとき} \quad y=x^2-x+n-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+n-\frac{9}{4}$$

$k=\dfrac{\sqrt{n}}{a}$ とし，$y=k(x+1)\cdots ②$ とおく.

① のグラフと直線 ② が接するときの k の値は

i) $x\geqq -1$ のとき，2 式から y を消去して

$$x^2+x+n=k(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad x^2+(1-k)x+n-k=0$$

このとき，係数について

$$-\frac{1-k}{2\cdot 1}\geqq -1, \quad (1-k)^2-4\cdot(n-k)=0$$

これを解いて　$k=2\sqrt{n}-1$

ii) $x<-1$ のとき，2 式から y を消去して

$$x^2-x+n-2=k(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad x^2-(k+1)x+n-k-2=0$$

このとき，係数について

$$-\frac{-(k+1)}{2\cdot 1}<-1, \quad \{-(k+1)\}^2-4\cdot 1(n-k-2)=0$$

これを解いて　$k=-2\sqrt{n}-3$

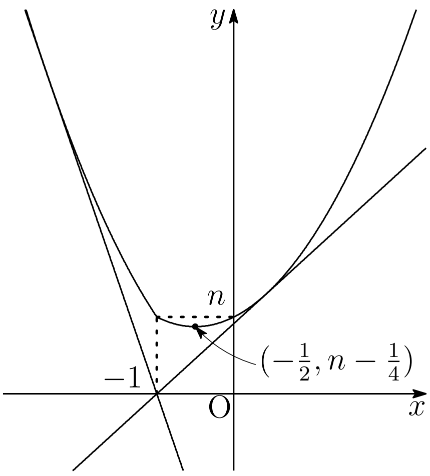
関数 ① のグラフと直線 ② は，

$$k=-2\sqrt{n}-3,\ 2\sqrt{n}-1$$

のとき，右の図のように接する．
したがって，これらが共有点をもつためのkの値の範囲は

$$k \leqq -2\sqrt{n}-3,\quad 2\sqrt{n}-1 \leqq k$$

ゆえに，方程式 $(*)$ が実数解をもつとき



$$\frac{\sqrt{n}}{a} \leqq -2\sqrt{n}-3,\quad 2\sqrt{n}-1 \leqq \frac{\sqrt{n}}{a}$$

したがって　$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq a < 0,\quad 0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$

$a=0$ のとき，方程式 $(*)$ は実数解をもつので，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}}$$

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n=-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3},\quad c_n=\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$$

とおくと

$$b_n=-\frac{1}{2+\frac{3}{\sqrt{n}}},\quad c_n=\frac{1}{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

したがって，$\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ はともに単調減少である．このとき，すべての自然数に対して (1) の結果を満たす a の値の範囲は

$$b_1 \leqq a \leqq \lim_{n\to\infty} c_n \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{5} \leqq a \leqq \frac{1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2次方程式 $x^2+px+q=0\cdots(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-p, \quad \alpha\beta=q$$

ここで
$$\begin{aligned} a_n &= (\alpha^n-1)(\beta^n-1)=(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1 \\ &= q^n+1-(\alpha^n+\beta^n) \end{aligned}$$

q は整数であるから，$\alpha^n+\beta^n$ が整数のとき，a_n は整数である．

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= -p, \\ \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-p)^2-2q=p^2-2q, \\ \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-p)^3-3q\cdot(-p)=-p^3+3pq \end{aligned}$$

p，q は整数であるから，上の3式は整数である．

よって，a_1，a_2，a_3 は整数である．

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ より，次の2つに場合分けをする．

i) $|\alpha|-1>0$，$|\beta|-1>0$　すなわち　$|\alpha|>1$，$|\beta|>1$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha^n}\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^n}\right)}\right|=|\alpha\beta|=|q| \end{aligned}$$

ii) $|\alpha|-1<0$，$|\beta|-1<0$　すなわち　$|\alpha|<1$，$|\beta|<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|=1$$

i)，ii) より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数である．

(3) 条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$ および (2) の結果から，$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)<0$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるための必要条件である．このとき，α と β の互換性により，一般性を失うことなく

$$|\alpha|-1>0,\quad |\beta|-1<0 \quad \text{すなわち} \quad |\alpha|>1,\quad |\beta|<1 \qquad \cdots(**)$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha^n}\right)(\beta^{n+1}-1)}{\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)(\beta^n-1)}\right| = |\alpha|\end{aligned}$$

$|\alpha|>1$ に注意して　$|\alpha|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

i) $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，α は方程式 $(*)$ の解であるから

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+q=0$$

整理すると　$(p+2q+3)+(p+1)\sqrt{5}=0$

$p+2q+3$，$p+1$ は有理数であるから

$$p+2q+3=0,\quad p+1=0 \quad \text{すなわち} \quad p=-1,\quad q=-1$$

このとき方程式 $(*)$ の解は，$(**)$ に注意して　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

ii) $\alpha=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，α は方程式 $(*)$ の解であるから

$$\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+p\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+q=0$$

整理すると　$(-p+2q+3)+(-p+1)\sqrt{5}=0$

$-p+2q+3$，$-p+1$ は有理数であるから

$$-p+2q+3=0,\quad -p+1=0 \quad \text{すなわち} \quad p=1,\quad q=-1$$

このとき方程式 $(*)$ の解は，$(**)$ に注意して　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

i)，ii) より　$\boldsymbol{(p,\ q)=(\pm 1,-1)}$

補足

Q を有理数，$\sqrt{q}$ を無理数とするとき

$$Q[\sqrt{q}\,] = \{u + v\sqrt{q} \,|\, u, v \in Q\}$$

を考える．$x, \overline{x} \in Q[\sqrt{q}\,]$ を

$$\begin{aligned} x &= u + v\sqrt{q} \\ \overline{x} &= u - v\sqrt{q} \end{aligned}$$

と定義すると，$k \in Q,\ x, y \in Q[\sqrt{q}\,]$ について，次の 3 式が成り立つ．

$$\begin{cases} \overline{k} = k \\ \overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y} \\ \overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y} \end{cases} \tag{1}$$

第 3 式から　$\overline{x^2} = (\overline{x})^2$,　さらに　$\overline{x^n} = (\overline{x})^n$　(n は自然数)．

例えば，$a, b, c, d \in Q$ である 3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{2}$$

が $z \in Q[\sqrt{q}\,]$ を解をもつとき，$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ であるから，(1) により

$$\begin{aligned} \overline{az^3 + bz^2 + cz + d} &= \overline{0} \\ \overline{az^3} + \overline{bz^2} + \overline{cz} + \overline{d} &= 0 \\ \overline{a}\,\overline{z^3} + \overline{b}\,\overline{z^2} + \overline{c}\,\overline{z} + d &= 0 \\ a(\overline{z})^3 + b(\overline{z})^2 + c\overline{z} + d &= 0 \end{aligned}$$

これから $\overline{z}$ が (2) の解であることが分かる．

(1) において，k を実数，x, y を複素数とし，x と $\overline{x}$ を互いに共役な複素数と考えても成り立つ．ゆえに，a, b, c, d を実数とするとき，(2) の方程式が複素数 z を解にもつとき，共役な複素数 $\overline{z}$ も (2) の解であることがわかる．なお，n 次方程式についてもこれらのことが成立する．

よって，有理数を係数とする 2 次方程式が $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ を解にもつとき，$\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ もその方程式の解である．

5 (1) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れると，箱 B には黒玉 2 個と白玉 2 個が入っている．

箱 A に黒玉が 1 個入っている (箱 B から白玉 2 個を取り出す) 確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

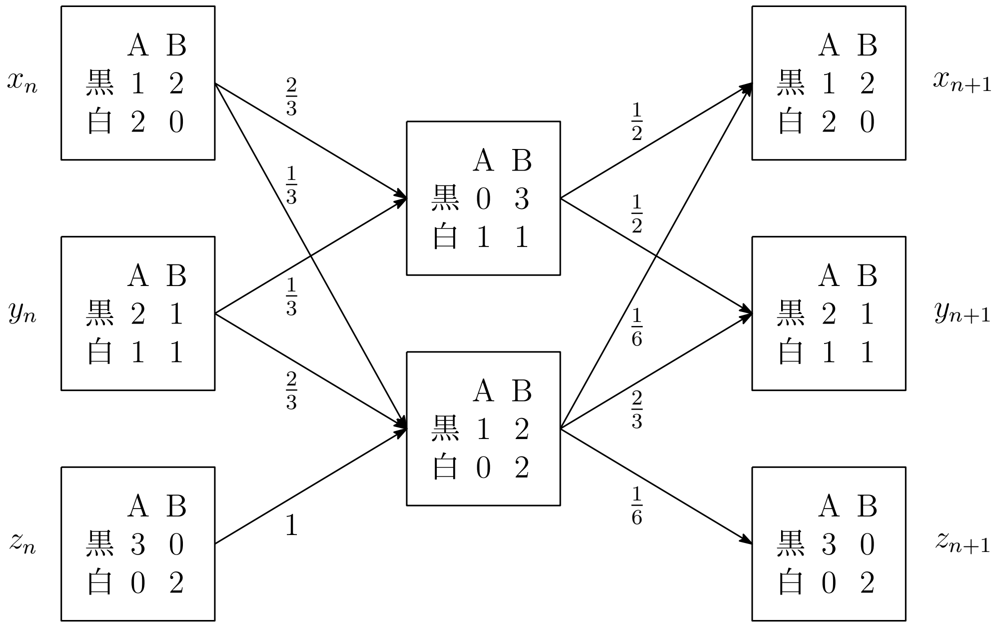
箱 A に黒玉が 2 個入っている (箱 B から黒玉 1 個と白玉 1 個を取り出す) 確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

箱 A に黒玉が 3 個入っている (箱 B から黒玉 2 個を取り出す) 確率 p_3 は

$$p_3 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) 試行 T を n 回行ったとき，箱 A に黒玉が 1 個，2 個，3 個ある確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n とすると



$$x_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}\right) x_n + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right) y_n + 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) x_n + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) y_n + 1 \times \frac{2}{3} z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} x_n + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} y_n + 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$x_1 = p_1$，$y_1 = p_2$，$z_1 = p_3$ であるから

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} & \frac{11}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} & \frac{11}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} & \frac{11}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{11}{18} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$q_1 = x_2$，$q_2 = y_2$，$q_3 = z_2$ であるから

$$\boldsymbol{q_1 = \frac{5}{18}, \quad q_2 = \frac{11}{18}, \quad q_3 = \frac{1}{9}}$$

(3) (2) の結果より

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} & \frac{11}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{11}{18} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

求める確率は，z_3 であるから

$$z_3 = \frac{1}{18} \times \frac{5}{18} + \frac{1}{9} \times \frac{11}{18} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \boldsymbol{\frac{11}{108}}$$

補足

確率および行列を

$$P_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} & \frac{11}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

とおくと，$P_{n+1} = AP_n$ である．つまり，P_{n+1} が P_n によって定まる (1 つ前の時点だけを考慮する)．このような確率過程をマルコフ連鎖 (Markov chain) という．また，z_3 は，$P_3 = A^2 P_1$ によって求めることもできる．