平成 23 年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

1 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) $x \geqq 1$ の範囲において，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(3) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ。

2 a を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。

(2) $x \geqq 3$ のとき，不等式 $x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに，極限値

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$$

を求めよ。

(3) k を定数とする。$y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を，a と k を用いて表せ。

3 数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ は

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{1-{a_n}^2}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

をみたしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，一般項 a_n を求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1=\tan\dfrac{\pi}{20}$ とするとき，

$$a_{n+k}=a_n, \quad n=3,4,5,\cdots$$

をみたす最小の自然数 k を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(0,\ 2,\ 3),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 3),\ \mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$$

を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 4 点 O，A，B，C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。

(2) 3 点 A，B，C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作： 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1，2，3，4 と並べ，上の操作を n 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1) $n=2$ のとき，カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶ確率を求めよ。

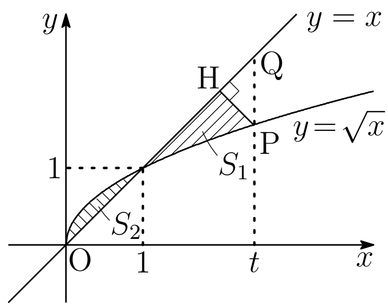
(2) $n=2$ のとき，カードが左から順に 4，3，2，1 と並ぶ確率を求めよ。

(3) $n=2$ のとき，左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

(4) $n=3$ のとき，左端のカードの数字の期待値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 直線 PH は，点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ を通り，直線 $y = x \cdots$ ① に垂直な直線であるから



$$y - \sqrt{t} = -1(x - t)$$

すなわち $y = -x + t + \sqrt{t} \quad \cdots$ ②

H の座標は ①，② を解いて

$$\left(\boldsymbol{\frac{t+\sqrt{t}}{2},\ \frac{t+\sqrt{t}}{2}}\right)$$

(2) $\mathrm{Q}(t,\ t)$ をとると

$$\triangle\mathrm{PQH} = \frac{1}{2}\mathrm{PH}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}(t^2 - 2t\sqrt{t} + t)$$

よって，求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^t (x - \sqrt{x})\,dx - \triangle\mathrm{PQH} \\ &= \left[\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ \right]_1^t - \frac{1}{4}(t^2 - 2t\sqrt{t} + t) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{6}t\sqrt{t} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{6}} \end{aligned}$$

(3) $$S_2 = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx = \left[\ \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\ \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$S_1 = S_2$ のとき，上式および (2) の結果より

$$\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{6}t\sqrt{t} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{ゆえに} \quad t\{3(\sqrt{t}\,)^2 - 2\sqrt{t} - 3\} = 0$$

$t > 1$ に注意して $\qquad \sqrt{t} = \dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

よって $\qquad t = \left(\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{11+2\sqrt{10}}{9}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ を微分すると　$f'(x)=-(x+a)(x-a)e^{-x}$

$a>0$ より，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 $-2(a-1)e^a$	$\nearrow$	極大 $2(a+1)e^{-a}$	$\searrow$

よって，**極大値 $\boldsymbol{2(a+1)e^{-a}}$，極小値 $\boldsymbol{-2(a-1)e^a}$** をとる．

(2) $g(x)=x^3e^{-x}$ とおいて，これを微分すると　$g'(x)=x^2(3-x)e^{-x}$

$x>3$ において，$g'(x)<0$ であるから，$x \geqq 3$ において $g(x)$ は単調減少．

したがって，$x \geqq 3$ のとき，$g(x) \leqq g(3)$ であるから

$$x \geqq 3 \text{ のとき}\quad x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$$

が成り立つ．このとき　$0<x^2e^{-x} \leqq \dfrac{27e^{-3}}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{27e^{-3}}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0}$$

(3) $y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ の共有点の個数は，方程式

$$x^2+2x+2=ke^2+a^2 \quad \text{すなわち} \quad (x^2+2x+2-a^2)e^{-x}=k$$

の解の個数であり，これは，$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフの共有点の個数である．ここで，(2) の結果により

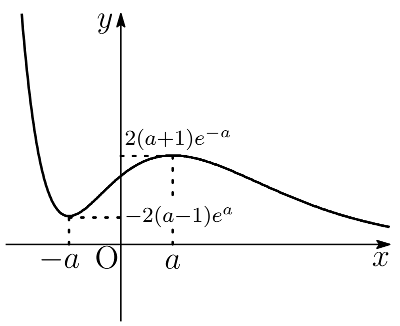
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2-a^2}{x^2}\right)x^2e^{-x}=0$$

よって，上式および (1)，(2) の結果より，求める k の値の範囲は

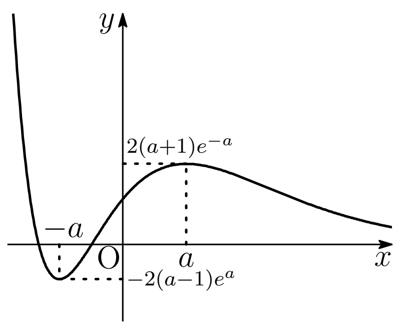
i) **$\boldsymbol{0<a \leqq 1}$ のとき　$\boldsymbol{-2(a-1)e^a<k<2(a+1)e^{-a}}$**

ii) **$\boldsymbol{1<a}$ のとき　$\boldsymbol{0<k<2(a+1)e^{-a}}$**

i) $0<a \leqq 1$ のとき



ii) $1<a$ のとき



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 与えられた漸化式より

$$a_2 = \frac{2a_1}{1-{a_1}^2} = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{1-{a_2}^2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = -\sqrt{3}$$

$$a_4 = \frac{2a_3}{1-{a_3}^2} = \frac{2\cdot(-\sqrt{3})}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$$

したがって，a_2 以降は，交互に $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ の繰り返しであるから

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad a_n = (-1)^n\sqrt{3}\quad (n \geqq 2)}$$

(2) $$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \mathbf{2-\sqrt{3}}$$

(3) $a_n = \tan\theta_n$ とおくと　$a_{n+1} = \dfrac{2\tan\theta_n}{1-\tan^2\theta_n} = \tan 2\theta_n$

$a_1 = \tan\dfrac{\pi}{20}$ より

$$a_2 = \tan\frac{\pi}{10},\ a_3 = \tan\frac{\pi}{5},\ a_4 = \tan\frac{2}{5}\pi,\ a_5 = \tan\frac{4}{5}\pi,$$

$$a_6 = \tan\frac{8}{5}\pi = \tan\frac{3}{5}\pi,\ a_7 = \tan\frac{6}{5}\pi = \tan\frac{\pi}{5}$$

ゆえに，a_3 以降は，$\tan\dfrac{\pi}{5}$，$\tan\dfrac{2}{5}\pi$，$\tan\dfrac{4}{5}\pi$，$\tan\dfrac{3}{5}\pi$ の繰り返しである.

よって，$a_{n+k} = a_n\ (n = 3, 4, 5\cdots)$ をみたす最小の自然数 k は　**4**

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) O(0, 0, 0) を通ることに注意して，球面の方程式を

$$x^2+y^2+z^2+lx+my+nz=0$$

とおくと

点 A(0, 2, 3) を通るから　$2m+3n+13=0$
点 B(1, 0, 3) を通るから　$l+3n+10=0$
点 C(1, 2, 0) を通るから　$l+2m+5=0$

これを解いて　$l=-1,\ m=-2,\ n=-3$
したがって，球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$$

すなわち　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{7}{2}$

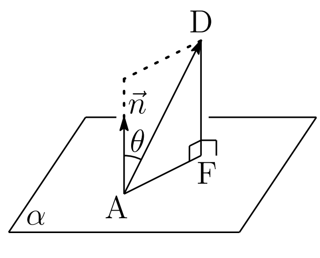
よって，求める球面の中心 D の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)}$

(2) 3 点 A，B，C を通る平面を α とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,-2,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,-3),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトル，すなわち，
α の法線ベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(6,\ 3,\ 2)$$



とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\mathrm{DF}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\cos\theta|,\quad \cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\vec{n}|}$$

上の 2 式から　$\mathrm{DF}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|\frac{1}{2}\cdot 6+(-1)\cdot 3+(-\frac{3}{2})\cdot 2|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{7}}$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2(\sqrt{10})^2-1^2}=\dfrac{7}{2}$

よって，求める体積は　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{7}{2}\times\dfrac{3}{7}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 1回の操作による球の取り出し方の総数は　${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ (通り)

$n = 2$ のとき，カードが左から順に1，2，3，4と並ぶのは，2回とも同じ球の組合せであるから，求める確率は

$$\frac{6 \times 1}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2) $n = 2$ のとき，カードが左から順に4，3，2，1と並ぶのは，1回目に $\{1, 4\}$，2回目 $\{2, 3\}$ の球を取り出す場合と1回目に $\{2, 3\}$，2回目に $\{1, 4\}$ を取り出す場合の2通りであるから，求める確率は

$$\frac{2}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

(3) $n = 2$ のとき，左端のカードの数字が1になるのは，次の i)，ii) の場合．

i) 1，2回目ともに $\{1,\ k\}$ $(k = 2, 3, 4)$ を取り出す確率は

$$\frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

ii) 1，2回目ともに1以外の球を取り出す確率は

$$\frac{({}_3\mathrm{C}_2)^2}{6^2} = \frac{1}{4}$$

i) と ii) は互いに排反であるから，求める確率は　$\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(4) 3回目に左端が X となる確率を $P(X)$ とする．

i) 2回目に左端が1で，3回目に左端が1となる確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{6} = \frac{1}{6}$$

ii) 2回目に左端が1以外で，3回目に左端が1となる確率は

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

i)，ii) は互いに排反であるから　$P(1) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{18}$

3回目に左端に2，3，4のカードが並ぶ確率は等しいから

$$P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1 - P(1)}{3} = \frac{13}{54}$$

よって，求める期待値は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4} kP(k) = 1 \cdot \frac{5}{18} + (2 + 3 + 4) \cdot \frac{13}{54} = \mathbf{\frac{22}{9}}$