平成 22 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

1 三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t \geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1) CP^2 を a，b，c，t を用いて表せ。

(2) 点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき，t を求めよ。

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ。

2 次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし，出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ，もう 1 回サイコロを振って，2 つの目の合計を得点とすることができる。ただし，合計が 7 以上になった場合は 0 点とする。この取り決めによって，2 回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

(1) 競技者が常にサイコロを 2 回振るとすると，得点の期待値はいくらか。

(2) 競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか。

(3) 得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目を振るとよいか。

3 xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。C_1 上の点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする。以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 Q_1 の座標を求めよ。

(2) 三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3) 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の面積 S_n を求めよ。

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ。

(2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) (2) の曲線 C の長さを求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める。このとき，次の問いに答えよ。

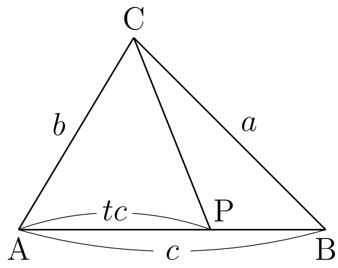
(1) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q が放物線 $9X = 2Y^2$ 全体の上を動くという。このとき，行列 A を求めよ。

(2) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q は常に円 $X^2 + (Y-1)^2 = 1$ の上にあるという。このとき，行列 A を求めよ。

(3) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q がある直線 L<u>全体</u>の上を動くための a，b，c，d についての条件を求めよ。また，その条件が成り立っているとき，直線 L の方程式を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$\triangle$APC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CP}^2 = b^2 + (tc)^2 - 2b\cdot tc\cos A$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2 &= b^2 + (tc)^2 - 2b\cdot tc \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &= b^2 + t^2c^2 - t(b^2+c^2-a^2)\\ &= \boldsymbol{ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{CP} = a$ を (1) の結果に代入すると

$$a^2 = ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2$$

ゆえに　$(t-1)(a^2-b^2+tc^2) = 0$

$t \geqq 0$ に注意して

$$\boldsymbol{b \geqq a} \text{ **のとき** } \quad \boldsymbol{t = 1,\ \frac{b^2-a^2}{c^2}}$$
$$\boldsymbol{b < a} \text{ **のとき** } \quad \boldsymbol{t = 1}$$

(3) AB 上にちょうど 2 つあるのは，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に (2) の条件を満たす t が 2 個あればよい．したがって，(2) の結果から

$b \geqq a$ のとき $(B \geqq A)$

$$\frac{b^2-a^2}{c^2} < 1 \quad \text{すなわち} \quad b^2 < c^2 + a^2 \quad \text{ゆえに} \quad B < 90^\circ$$

よって　$\boldsymbol{A \leqq B < 90^\circ}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) サイコロを 2 回振るときの得点は，右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得　点

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{21}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

$$\begin{aligned} E =& 0\times\frac{21}{36}+2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36} \\ &+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36} \\ =&\mathbf{\frac{35}{18}} \end{aligned}$$

(2) (1) の場合において，最初の目が 6 であるとき，2 回目の目に関係なく 6 点であると考えればよいので，得点は右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得　点

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	6	6	6	6	6	6

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{15}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

$$E=0\times\frac{21}{36}+2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{11}{36}=\mathbf{\frac{53}{18}}$$

(3) サイコロを投げて 1 回目，2 回目に出た目をそれぞれ i，j とする．1 回目 (最初) の目が n 以上であるとき ($1 \leqq n \leqq 6$)，2 回目を振らないとすると，そのときの得点の期待値 $E(n)$ は

$$E(n) = \frac{1}{6}\sum_{i=n}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1\leqq i<n \\ i+j\leqq 6}} (i+j)$$

また，$E(n+1)$ は ($1 \leqq n \leqq 5$)

$$E(n+1) = \frac{1}{6}\sum_{i=n+1}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1\leqq i<n+1 \\ i+j\leqq 6}} (i+j)$$

上の 2 式から，$1 \leqq n \leqq 5$ のとき

$$\begin{aligned} E(n+1) - E(n) &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{n+j\leqq 6}(n+j) \\ &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{k=n+1}^{6} k \\ &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\times\frac{1}{2}(6-n)(n+7) \\ &= \frac{1}{72}(-n^2 - 13n + 42) \\ &= \frac{1}{72}\{42 - n(n+13)\} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &E(2) - E(1) > 0, \quad E(3) - E(2) > 0, \quad E(4) - E(3) < 0, \\ &E(5) - E(4) < 0, \quad E(6) - E(5) < 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$E(1) < E(2) < E(3) > E(4) > E(5) > E(6)$$

したがって，得点の期待値を最大にするためには，最初に 3 以上の目が出たときに 2 回目を振らなければよい．

よって，2 回目を振るのは，最初の目が 1 または 2 のときである．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y = \dfrac{1}{x^2}$ を微分すると　$y' = -\dfrac{2}{x^3}$

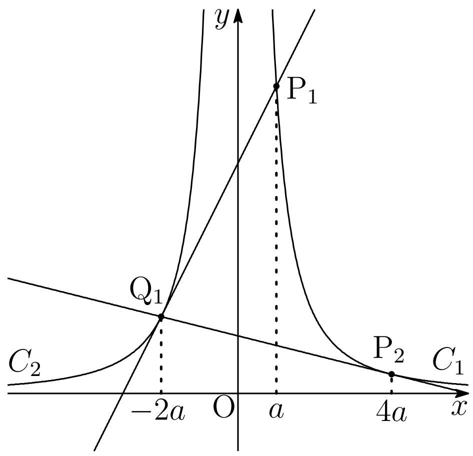
点 Q_1 の座標を $\left(b,\ \dfrac{1}{b^2}\right)$ とすると，

点 Q_1 における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{b^2} = -\frac{2}{b^3}(x-b)$$

すなわち　$y = -\dfrac{2x}{b^3} + \dfrac{3}{b^2}$

この直線が点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ を通るから



$$\frac{1}{a^2} = -\frac{2a}{b^3} + \frac{3}{b^2} \quad \text{ゆえに} \quad (b-a)^2(b+2a) = 0$$

$b \neq a$ であるから　$b = -2a$　よって，点 Q_1 の座標は　$\boldsymbol{\left(-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}\right)}$

(2) (1) の計算結果から Q_1 の x 座標 b に対し，P_2 の x 座標は $-2b$ であるから，P_2 の x 座標は $4a$ となる．

したがって　$\mathrm{P}_2\left(4a,\ \dfrac{1}{16a^2}\right)$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1} = \left(a, \frac{1}{a^2}\right) - \left(-2a,\ \frac{1}{4a^2}\right) = \left(3a, \frac{3}{4a^2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2} = \left(4a, \frac{1}{16a^2}\right) - \left(-2a,\ \frac{1}{4a^2}\right) = \left(6a, -\frac{3}{16a^2}\right)$$

よって，$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 は，$a > 0$ に注意して

$$S_1 = \frac{1}{2}\left|3a \times \left(-\frac{3}{16a^2}\right) - 6a \times \frac{3}{4a^2}\right| = \boldsymbol{\frac{81}{32a}}$$

(3) P_n の x 座標を a_n とすると $(n = 1, 2, 3, \cdots)$，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積 S_n は

$$S_n = \frac{81}{32a_n}$$

$\{a_n\}$ は，初項が a，公比 4 の等比数列であるから　$a_n = 4^{n-1}a$

よって　$S_n = \dfrac{81}{32 \cdot 4^{n-1}a} = \boldsymbol{\dfrac{81}{32a}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は，初項 $\dfrac{1}{32a}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\dfrac{81}{32a}}{1 - \dfrac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{27}{8a}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，円が角 t だけ回転したとき，円の中心を C，x 軸との接点を T とする．このとき，$\mathrm{OT} = \overset{\frown}{\mathrm{TP}} = at$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix}$$

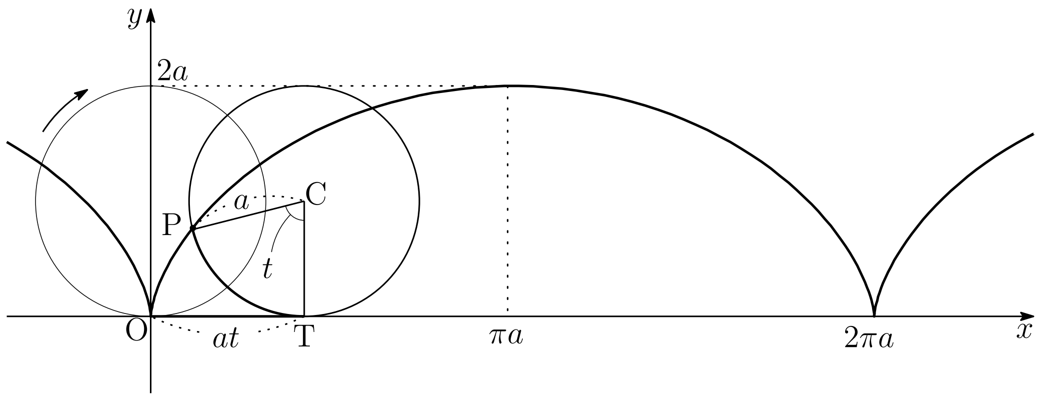
また $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{CT}}$ を $-t$ だけ回転したものであるから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{CT}} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

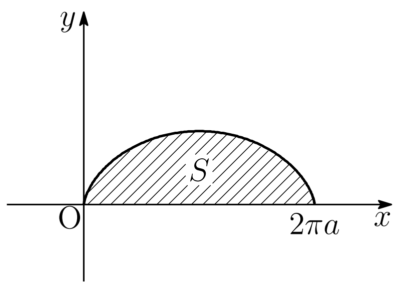
したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} \\
&= \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t-\sin t) \\ a(1-\cos t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，P の座標は　　$\boldsymbol{(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))}$



(2) 求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

また，$x = a(t - \sin t)$ より

$$dx = a(1-\cos t)dt$$

$\leftarrow \frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$

で，x と t の対応は右のようになる．
よって，置換積分法により

x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
t	$0 \longrightarrow 2\pi$

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt \\
&= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt \\
&= a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt \\
&= a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\
&= \boldsymbol{3\pi a^2}
\end{aligned}$$

(3) 求める曲線 C の長さを L とすると，$\dfrac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt} = a\sin t$ より

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{\{a(1-\cos t)\}^2+(a\sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt \\
&= 2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{8a}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 放物線 $9X = 2Y^2$ から

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$

これに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

を代入すると

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\qquad + \begin{pmatrix} -9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2c^2 & 2cd \\ 2cd & 2d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9a & -9b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &2c^2x^2 + 4cdxy + 2d^2y^2 - 9ax - 9by = 0 \end{aligned}$$

これに $y = x^2$ を代入して整理すると

$$2d^2x^4 + 4cdx^3 + (2c^2 - 9b)x^2 - 9ax = 0$$

上式は x に関する恒等式であるから

$$2d^2 = 0, \quad 4cd = 0, \quad 2c^2 - 9b = 0, \quad -9a = 0$$

したがって　　$a = 0, \quad b = \dfrac{2}{9}c^2, \quad d = 0$

ここで A による $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ の像 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{2}{9}c^2x^2,\ cx\right)$ が $9X = 2Y^2$ 全体を動くので，$c \neq 0$

よって　　$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9}c^2 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)}$

補足

2 次曲線 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r = 0$ は，次のようにかける．

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r = 0$$

(2) 円 $X^2+(Y-1)^2=1$ から

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=0$$

これに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

を代入すると

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2c & -2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$$

$$(a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)xy+(b^2+d^2)y^2-2cx-2dy=0$$

これに $y=x^2$ を代入して整理すると

$$(b^2+d^2)x^4+2(ab+cd)x^3+(a^2+c^2-2d)x^2-2cx=0$$

上式は x に関する恒等式であるから

$$b^2+d^2=0,\ 2(ab+cd)=0,\ a^2+c^2-2d=0,\ -2c=0$$

したがって　$a=0,\quad b=0,\quad c=0,\quad d=0$

よって　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(3) $y=x^2$ 上の点 $(0,\ 0)$ の像は $(0,\ 0)$ であるから，L は原点を通る．

$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(-1,\ 1)$ について，$\mathrm{P}_1(\vec{p_1})$，$\mathrm{P}_2(\vec{p_2})$ とし，これらの像をそれぞれ $\mathrm{Q}_1(\vec{q_1})$，$\mathrm{Q}_2(\vec{q_2})$ とすると

$$A\begin{pmatrix} \vec{p_1} & \vec{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{q_1} & \vec{q_2} \end{pmatrix}$$

これから　$\det(A)\det\begin{pmatrix} \vec{p_1} & \vec{p_2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{q_1} & \vec{q_2} \end{pmatrix} \quad \cdots ①$

L は原点を通る直線であるから　$\det\begin{pmatrix} \vec{q_1} & \vec{q_2} \end{pmatrix} = 0$

また，$\det\begin{pmatrix} \vec{p_1} & \vec{p_2} \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ であるから，① より

$$\det(A) = 0 \quad \cdots ②$$

実際，$\vec{p_1}$，$\vec{p_2}$ は1次独立であるから，A により座標平面上のすべての点が L に移る．A の固有方程式は $\lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A)=0$ であるから，② より，その解は 0，$a+d$ であり，固有値 $a+d$ に対する固有ベクトルが，L の方向ベクトルである．したがって，L 上の点 $(x,\ y)$ について

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

すなわち　$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots ③$

ここで，$P(t,\ t^2)$ の A による像

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+bt^2 \\ ct+dt^2 \end{pmatrix}$$

が L<u>全体</u>を動くための条件は　$\boldsymbol{b=d=0,}\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

よって，求める直線 L の方程式は，③ より

$$\boldsymbol{cx-ay=0}$$

解説

① は，$\det(AB)=\det(A)\det(B)$ を利用した．また，$\det(AB)=\det(BA)$ も成り立つことも覚えておきたい．つまり行列の積について交換法則は成り立たないが，行列式については交換法則が成り立つ．

一般に，$\det(A)=0$ ならば，A により平面上のすべて点は定直線上に移る．

③ より $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ は L の方向ベクトルである．

定理 1

対称行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有ベクトルは直交する．ただし，$A \neq kE$ とする．

証明 A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2)=0$$

この方程式の判別式 D は

$$D=\{-(a+c)\}^2-4\cdot 1(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2>0$$

ゆえに，異なる 2 つの固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ u_1，u_2 とする．ここで，内積 $u_1\cdot u_2$ は行列の積 ${}^t u_1 u_2$ であることに留意する．

$$(Au_1)\cdot u_2={}^t(Au_1)u_2={}^t u_1{}^t A u_2={}^t u_1 A u_2=u_1\cdot(Au_2)$$

$Au_1=\lambda_1 u_1$，$Au_2=\lambda_2 u_2$ であるから上式より

$$(\lambda_1 u_1)\cdot u_2=u_1\cdot(\lambda_2 u_2) \quad \text{すなわち} \quad (\lambda_1-\lambda_2)u_1\cdot u_2=0$$

$\lambda_1-\lambda_2\neq 0$ であるから　$u_1\cdot u_2=0$　よって　$u_1\perp u_2$　証終

u_1，u_2 を単位固有ベクトルとし，これらを基底とする座標変換を用いることで，$ax^2+2bxy+cy^2$ について次の定理 2 が成り立つ．

定理 2

u_1，u_2 を A の単位固有ベクトルとする．

基底の変換　$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=Xu_1+Yu_2$　　(x, y, X, Y は実数)

すなわち　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ により次が成り立つ．

$$ax^2+2bxy+cy^2=\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2$$

証明 $ax^2+2bxy+cy^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned}
ax^2+2bxy+cy^2 &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Au_1 & Au_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2
\end{aligned}$$

証終

定理 3

2 次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$ を次のようにかくと

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r = 0$$

このとき $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおくと　$\det(A) = ac - b^2$

この 2 次曲線について，次が成り立つ．

$$\begin{array}{lcl} \text{楕円} & \Longrightarrow & \det(A) > 0 \\ \text{放物線} & \Longrightarrow & \det(A) = 0 \\ \text{双曲線} & \Longrightarrow & \det(A) < 0 \end{array}$$

証明 定理 1 の固有方程式の解と係数の関係により　$\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$

これと定理 2 の結果から明らか．　証終

注意 定理 3 において，逆は必ずしも成り立たない．たとえば $x^2+y^2+1=0$ は $\det(A)>0$ であるが ϕ．$x^2-y^2=0$ は $\det(A)<0$ であるが 2 直線．

正則でない１次変換の像は，定直線上にあるので，１次変換を表す行列 P によって曲線から曲線全体に移されるためには P は正則である必要がある．

P による $(x,\ y)$ の像を $(X,\ Y)$ とし，$Q = P^{-1}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^tQ$$

定理３の２次曲線の２次形式について

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^tQAQ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$\det({}^tQ) = \det(Q)$ に注意すると

$$\det({}^tQAQ) = \det({}^tQ)\det(A)\det(Q) = \det(A)\{\det(Q)\}^2$$

Q は正則であるから，$\det({}^tQAQ)$ の符号と $\det(A)$ の符号は一致する．すなわち，一次変換により移された２次曲線の種類はもとの２次曲線の種類と一致する．

したがって，$\boxed{\mathbf{5}}$(1) のように放物線から放物線全体に移ることはあるが，$\boxed{\mathbf{5}}$(2) のように放物線から楕円 (円も含む) 全体に移ることはない．