平成 21 年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

1 座標平面に 3 点 O(0, 0)，A(2, 6)，B(3, 4) をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2) s を定数として，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

2 k は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚,「2」と書かれたカードが 2 枚，$\cdots$,「k」と書かれたカードが k 枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M，奇数が書かれたカードの枚数を N で表す。この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す。記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_1 と p_2 を M，N で表せ。

(2) p_{n+1} を p_n，M，N で表せ。

(3) $\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ。

(4) p_n を n と k で表せ。

3 曲線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする。ただし，$b \neq a$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) b が a に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近づく。A の座標を a で表せ。

(2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，(1) で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き，C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。

(3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2次の列ベクトル X，Y，Z は大きさが1であり，$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ $Y \neq X$ とする。ただし，一般に2次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2+y^2}$ で定義される。また，2次の正方行列 A が

$$AX = Y, \qquad AY = Z, \qquad AZ = X$$

をみたすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $Y \neq -X$ を示せ。

(2) Z は $Z = sX + tY$（s，t は実数）の形にただ一通りに表せることを示せ。

(3) $X + Y + Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を示せ。

(4) 行列 A を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 曲線 $y = e^x$ 上を動く点Pの時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，Pの速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}| = 1$ かつ $\dfrac{dx}{dt} > 0$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1) Pが点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ。

(2) Pが点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。

(3) Pが曲線全体を動くとき，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) Cは直線AB上にあるから，実数αを用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \alpha(2,\ 6) + (1-\alpha)(3,\ 4) \\ &= (3-\alpha,\ 4+2\alpha)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ 4) - (2,\ 6) = (1, -2)$であるから

$$(3-\alpha)\cdot 1 + (4+2\alpha)\cdot(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = -1$$

したがって　　**C(4, 2)**

与式および上の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= s(2,\ 6) + t(3,\ 4) - (4,\ 2) \\ &= (2s+3t-4,\ 6s+4t-2)\end{aligned}$$

よって　　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = (2s+3t-4)^2 + (6s+4t-2)^2$

$$= \boldsymbol{40s^2 + 25t^2 + 60st - 40s - 40t + 20}$$

(2) (1)の結果をtについて整理すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= 25t^2 - (40-60s)t + 40s^2 - 40s + 20 \\ &= 2\left(t - \frac{4-6s}{5}\right)^2 + 4s^2 + 8s + 4 \quad (t \geqq 0)\end{aligned}$$

i) $0 \leqq \dfrac{4-6s}{5}$ すなわち $s \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき

$t = \dfrac{4-6s}{5}$で最小値$4s^2+8s+4$をとる．

ii) $\dfrac{4-6s}{5} < 0$ すなわち $s > \dfrac{2}{3}$ のとき

$t = 0$で最小値$40s^2 - 40s + 20$をとる．

i)，ii)より，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$の最小値は

$\boldsymbol{s \leqq \dfrac{2}{3}}$ **のとき** $\boldsymbol{4s^2+8s+4}$**，**　$\boldsymbol{s > \dfrac{2}{3}}$ **のとき** $\boldsymbol{40s^2-40s+20}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 1回の操作で，偶数，奇数が出る確率は，それぞれ

$$\frac{M}{M+N},\ \frac{N}{M+N}$$

である．したがって　$p_1 = \boldsymbol{\frac{M}{M+N}}$

2回の操作で記録された2個の数の和が偶数となるのは，2回とも偶数のカードまたは2回とも奇数のカードを取り出す場合であるから

$$p_2 = \left(\frac{M}{M+N}\right)^2 + \left(\frac{N}{M+n}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{M^2+N^2}{(M+N)^2}}$$

(2) $n+1$回の操作で$n+1$個の数の和が偶数となるのは，n回までのカードの和が偶数で$n+1$回目で偶数のカードを取り出すか，n回までのカードの和が奇数で$n+1$回目で奇数のカードを取り出す場合であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times \frac{M}{M+N} + (1-p_n) \times \frac{N}{M+N} \\ &= \boldsymbol{\frac{M-N}{M+N}p_n + \frac{N}{M+N}} \end{aligned}$$

(3) $M+N$は，1からkまでの自然数の和であるから

$$M+N = 1+2+3+\cdots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

i) kが偶数のとき，M，Nの項数はともに$\dfrac{k}{2}$であるから

$$\begin{aligned} M &= 2+4+6+\cdots+k = \frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2}\cdot(2+k) = \frac{k^2}{4}+\frac{k}{2} \\ N &= 1+3+5+\cdots+(k-1) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{\left(\frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}\right)-\frac{k^2}{4}}{\frac{1}{2}k(k+1)} = \dfrac{1}{k+1}$

ii) k が奇数のとき，M，N の項数はそれぞれ $\dfrac{k-1}{2}$，$\dfrac{k+1}{2}$ であるから

$$M = 2+4+6+\cdots+(k-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}\cdot\{2+(k-1)\} = \frac{k^2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$N = 1+3+5+\cdots+k = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2} + \frac{1}{4}$$

したがって　$\dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{\frac{k^2}{4} - \frac{1}{4} - \left(\frac{k^2}{4} + \frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}k(k+1)} = -\dfrac{1}{k}$

i)，ii) より　$$\boldsymbol{\frac{M-N}{M+N} = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1} & (k\ \text{が偶数のとき}) \\ -\dfrac{1}{k} & (k\ \text{が奇数のとき}) \end{cases}}$$

(4)　(2) の結果から

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{M-N}{M+N}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

よって，数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ は，公比 $\dfrac{M-N}{M+N}$ の等比数列であるから，これに (1) の結果を代入すると

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}$$

$$p_n = \left(\frac{M}{M+N} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n} + \frac{1}{2}$$

したがって，(3) の結果により

$$\boldsymbol{p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^n + \dfrac{1}{2} & (k\ \text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n + \dfrac{1}{2} & (k\ \text{が奇数のとき}) \end{cases}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=\dfrac{x^2}{2}$ を微分すると　$y'=x$

点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における接線の方向ベクトルは $(1,\ a)$ であるから，A における法線の方程式は

$$1(x-a)+a\left(y-\frac{a^2}{2}\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+ay=a+\frac{a^3}{2} \qquad \cdots ①$$

同様にして $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の方程式は　$x+by=b+\dfrac{b^3}{2}$　$\cdots ②$

①，② から x を消去すると

$$(b-a)y=b-a+\frac{b^3-a^3}{2} \quad b\neq a \text{ より} \quad y=1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x+a\left(1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}\right)=a+\frac{a^3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{ab(a+b)}{2}$$

したがって，R の座標は　$\left(-\dfrac{ab(a+b)}{2},\ 1+\dfrac{a^2+ab+b^2}{2}\right)$

よって，$b\to a$ による R の極限の点 A の座標は　$\boldsymbol{\left(-a^3,\ 1+\dfrac{3}{2}a^2\right)}$

(2) (1) の結果から

$$x=-a^3,\ y=1+\frac{3}{2}a^2$$

とおくと，第 1 式から　$a=-x^{\frac{1}{3}}$

これを第 2 式に代入すると　$y=1+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

上式が C_2 の方程式であり，C_1，C_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{2}=1+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \quad \text{ゆえに} \quad x^2-3x^{\frac{2}{3}}-2=0$$

$x^{\frac{1}{3}}=t\cdots ③$ とおくと　$x=t^3\cdots ③'$

$$t^6-3t^2-2=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t^2+1)^2(t^2-2)=0$$

したがって　$t=\pm\sqrt{2}$　　$③'$ より　$x=\pm 2\sqrt{2}$

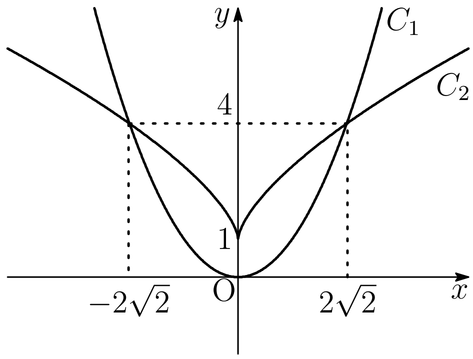
これを C_1 の方程式に代入して　$y=4$

よって，C_1 と C_2 の交点の座標は　$\boldsymbol{(\pm 2\sqrt{2},\ 4)}$

$C_2 : y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ について　$y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$，$y'' = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

ゆえに　$y'' < 0$　したがって　C_2 は上に凸の曲線である．

したがって，C_1，C_2 の概形は，次のようになる．



補足

C_2 上の点 P(0, 1) について，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \left(-a^3,\ \frac{3}{2}a^2\right) = \frac{3}{2}a^2\left(-\frac{2}{3}a,\ 1\right)$$

$a \to 0$ とすると，C_2 の尖点 P(0, 1) における接線は，y 軸に平行な直線となる．尖点 (cusp) は，曲線上の可微分でない点であり，接線が定まらないのが一般的である ($y = |x|$ の尖点 (0, 0) など)．

(3) C_1，C_2 は y 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^{2\sqrt{2}} \left\{\left(1 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{x^2}{2}\right\} dx \\ &= 2\left[\ x + \frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{6}\ \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{88\sqrt{2}}{15}} \end{aligned}$$

解説

(2) で求めた C_2 は，C_1 の法線群の包絡線である．一般に $C_1 : y = f(x)$ とすると，2 点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$ における法線の方程式は $(u \neq t)$，それぞれ

$$(x-t)+f'(t)(y-f(t))=0,\quad (x-u)+f'(u)(y-f(u))=0$$

であり，これから

$$x+f'(t)y=t+f'(t)f(t)\quad \cdots①,\quad x+f'(u)y=u+f'(u)f(u)\quad \cdots②$$

② − ① より

$$\begin{aligned}\{f'(u)-f'(t)\}y &= u-t+f'(u)f(u)-f'(t)f(t)\\ &= u-t+f'(u)\{f(u)-f(t)\}+f(t)\{f'(u)-f'(t)\}\end{aligned}$$

$u \neq t$ であるから，両辺を $u-t$ で割ると

$$\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}y=1+f'(u)\cdot\frac{f(u)-f(t)}{u-t}+f(t)\cdot\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}$$

$u \to t$ とすると　　$f''(t)y=1+\{f'(t)\}^2+f(t)f''(t)$

$f''(t) \neq 0$ のとき　　$y=f(t)+\dfrac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

これを ① に代入すると　$x=t-\dfrac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$

よって，t を変数として次の $(x,\ y)$ が描く軌跡が C_2 である．

$$x=t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)},\qquad y=f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

上で求めた $(x,\ y)$ は P における曲率円 (接触円) の中心でもある．P における曲率円とは，曲線上の 3 点 P，Q，R について，Q，R が曲線上を P に限りなく近づくときに占める極限の位置の円である．その中心を**曲率中心**という．

C_1 上の 3 点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$，$\mathrm{R}(v,\ f(v))$ とする $(t<u<v)$．3 点 P，Q，R を通る円を $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2-r^2=0$ とすると

$$\begin{aligned}(t-c_1)^2+\{f(t)-c_2\}^2-r^2=0\\ (u-c_1)^2+\{f(u)-c_2\}^2-r^2=0\\ (v-c_1)^2+\{f(v)-c_2\}^2-r^2=0\end{aligned}$$

ここで，$g(s)=(s-c_1)^2+\{f(s)-c_2\}^2-r^2$ とおくと　　$g(t)=g(u)=g(v)=0$

$g(t)=g(u)$ であるから，ロル (Rolle) の定理により

$$g'(t_1)=0 \quad (t<t_1<u)$$

を満たす t_1 が存在する．同様に，$g(u)=g(v)$ であるから

$$g'(t_2)=0 \quad (u<t_2<v)$$

を満たす t_2 が存在する．$g'(t_1)=g'(t_2)$ であるから，さらにロルの定理を用いると

$$g''(t_3)=0 \quad (t_1<t_3<t_2)$$

を満たす t_3 が存在する．Q，R が P に限りなく近づくとき，$u\to t$，$v\to t$ となるから，上の諸式において

$$g(t)=0, \quad g'(t)=0, \quad g''(t)=0$$

$g'(s)$，$g''(s)$ は

$$\begin{aligned} g'(s)&=2(s-c_1)+2f'(s)\{f(s)-c_2\} \\ g''(s)&=2+2f''(s)\{f(s)-c_2\}+2\{f'(s)\}^2 \end{aligned}$$

$g'(t)=0$，$g''(t)=0$ であるから

$$(t-c_1)+f'(t)\{f(t)-c_2\}=0, \quad 1+\{f'(t)\}^2+f''(t)\{f(t)-c_2\}=0$$

上の第 2 式から　$c_2-f(t)=\dfrac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

これを第 1 式に代入すると　$c_1-t=-\dfrac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$

上の 2 式を $g(t)=0$ に代入することにより，曲率円の半径 r は

$$r^2=\frac{(1+\{f'(t)\}^2)^3}{\{f''(t)\}^2} \quad \text{ゆえに} \quad r=\frac{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}$$

よって，曲線の P における曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ は

$$c_1=t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}, \qquad c_2=f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ の描く軌跡を**縮閉線**といい，曲線の法線群の包絡線と一致することがわかる．

曲線の弧長 s に対する接線の向きの変化率を曲率といい，曲率 κ は，次式で定義される．

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

点 $(x,\ y)$ における接線が，x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$y' = \tan\theta$$

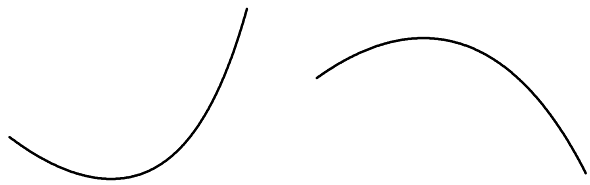
これを θ について，微分することにより

$$y''\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (y')^2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1 + (y')^2}$$

また，$\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}$ であるから，$\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$ より

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = \frac{y''}{1 + (y')^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y''}{\{1 + (y')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

曲率 κ の逆数 $\dfrac{1}{\kappa}$ を曲率半径という．曲率円の半径は曲率半径の絶対値に等しい．
$\kappa > 0$ すなわち $y'' > 0$ のとき下に凸，$\kappa < 0$ すなわち $y'' <$ のとき上に凸である．
変曲点は曲率の符号が変わる点であり，頂点は曲率が極値をとる点である．



$\kappa > 0$ $\kappa < 0$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) (背理法による証明)

$Y=-X$ と仮定すると

$AX=Y\cdots$① より　$AX=-X$　$\cdots$②

$AY=Z$ より　$A(-X)=Z$　すなわち　$AX=-Z$　$\cdots$③

②，③ より　$Z=X$

これを $AZ=X$ に代入すると　$AX=X$　$\cdots$④

①，④ より，$X=Y$ となり，矛盾を生じる．よって　$Y\neq -X$

(2) 条件より　$A^3X=X$，$A^3Y=Y$

よって　$A^3(X\ Y)=(X\ Y)$　$\cdots$⑤

X，Y の大きさは 1 で，$Y\neq X$，$Y\neq -X$ であるから　$Y \not\parallel X$

ゆえに　$\det(X\ Y)\neq 0$　$\cdots$⑥

⑤ より　$\{\det(A)\}^3\det(X\ Y)=\det(X\ Y)$

⑥ より　$\{\det(A)\}^3=1$　ゆえに　$\det(A)=1$　$\cdots$⑦

条件から　$A(Y\ Z)=(Z\ X)$

ゆえに　$\det(A)\det(Y\ Z)=\det(Z\ X)$　⑦ より　$\det(Y\ Z)=\det(Z\ X)$

したがって　$\det(X\ Z)+\det(Y\ Z)=0$　すなわち　$\det(X+Y\ Z)=0$

ゆえに　$Z=k(X+Y)$　(k はスカラー)　$\cdots$⑧

$X+Y\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ であるから，大きさが 1 である Z に対し，⑧ を満たす k は唯一存在する．よって，題意は示された．

(3) ⑧ を $AZ=X$ に代入すると

$$A(kX+kY)=X$$

すなわち　$kAX+kAY=X$

$$kY+kZ=X$$

さらに　$kY+k(kX+kY)=X$

ゆえに　$(k^2-1)X+(k^2+k)Y=0$

$Y \not\parallel X$ であるから　$k^2-1=0$，$k^2+k=0$　これを解いて　$k=-1$

したがって　$Z=-(X+Y)$　よって　$X+Y+Z=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

(4) 2 次の列ベクトル X，Y の内積を $X{\cdot}Y$ とかくことにする．
$X+Y=-Z$ であるから

$$(X+Y){\cdot}(X+Y)=(-Z){\cdot}(-Z) \quad \text{ゆえに} \quad X{\cdot}X+2X{\cdot}Y+Y{\cdot}Y=Z{\cdot}Z$$

$X{\cdot}X=Y{\cdot}Y=Z{\cdot}Z=1$ より　$X{\cdot}Y=-\dfrac{1}{2}$　ゆえに　X，Y のなす角は $\frac{2}{3}\pi$

同様に，$Z+X=-Y$ から $Z{\cdot}X=-\dfrac{1}{2}$　ゆえに　Z，X のなす角は $\frac{2}{3}\pi$

$X=\begin{pmatrix}\cos 0\\ \sin 0\end{pmatrix}$ であるから，次の 2 つに場合分けをする．

i) $Y=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}$ のとき　$Z=\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}$

このとき A は原点の回りに $\frac{2}{3}\pi$ 回転する 1 次変換を表す行列であるから

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

ii) $Y=\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}$ のとき　$Z=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}$

このとき A は原点の回りに $\frac{4}{3}\pi$ 回転する 1 次変換を表す行列であるから

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi & -\sin\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi & \cos\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

i)，ii) より　　$\boldsymbol{A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \mp\sqrt{3}\\ \pm\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}$ であるから

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dt},\ e^x\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dx}{dt}(1,\ e^x)\quad\cdots①$$

$|\vec{v}|=1$，$\dfrac{dx}{dt}>0$ に注意して，① の大きさをとると

$$1=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+e^{2x}}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\quad\cdots②$$

② を ① に代入して

$$\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}(1,\ e^x)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)\quad\cdots③$$

よって，点 $(s,\ e^s)$ における速度ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}},\ \frac{e^s}{\sqrt{1+e^{2s}}}\right)}$$

(2) ③ を t について微分し，② を代入すると

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}&=\frac{dx}{dt}\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\right)\\&=\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\right)\quad\cdots④\end{aligned}$$

よって，点 $(s,\ e^s)$ における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ は

$$\boldsymbol{\vec{\alpha}=\left(-\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2},\ \frac{e^s}{(1+e^{2s})^2}\right)}$$

(3) ④ より　$\vec{\alpha}=\dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^2}(-e^x,\ 1)$ であるから

$$|\vec{\alpha}|=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\sqrt{(-e^x)^2+1^2}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

$f(x)=|\vec{\alpha}|$ とおいて，$f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}}}$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$f'(x)=0$ を解くと　$e^{2x}=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{2}$

$f(x)$ の増減は右のようになる．

よって，$x=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$ $(e^{2x}=\frac{1}{2})$ で極大かつ最大となり，求める最大値は

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

解説

時刻 t における曲線上の点 P の座標を $(x(t),\ y(t))$ とし，$\dot{x} = x'(t)$，$\dot{y} = y'(t)$，$\ddot{x} = x''(t)$，$\ddot{y} = y''(t)$ と書くことにする．

P における接線の x 軸の正の向きとなす角を θ とすると　$\tan\theta = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$

この式の両辺を t について微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

また，$\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ であるから，曲率 κ は

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

曲線の P における単位接ベクトル ξ_1 を

$$\xi_1 = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)$$

とし，ξ_1 を 90° 回転させた単位法ベクトルを ξ_2 とすると

$$\xi_2 = \left(-\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\ \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)$$

ξ_1 を t で微分すると

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}(-\dot{y},\ \dot{x}) = \kappa\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\xi_2$$

$\vec{v} = (\dot{x},\ \dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\xi_1$ を t で微分すると

$$\vec{\alpha} = \frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\xi_1 + \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\dot{\xi}_1 = \frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\xi_1 + \kappa|\vec{v}|^2\xi_2$$

P が等速運動であるとき

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y} = 0 \quad (\vec{v}\cdot\vec{\alpha} = 0)$$

このとき，$\vec{\alpha} = \kappa|\vec{v}|^2\xi_2$ が成り立つ．曲線の曲率半径を r とすると，$\kappa = \dfrac{1}{r}$ であるから，力学の加速度の公式 $\alpha = \dfrac{v^2}{r}$ が導かれる．なお加速度の向きは速度ベクトルに垂直である．とくに P が $|\vec{v}| = 1$ の等速運動を行うとき，$\vec{\alpha}$ の大きさは曲率の大きさに等しい．$\boxed{\mathbf{5}}$ (3) で $|\vec{\alpha}|$ が極値をとる点を求めたことで，曲線上の頂点を求めたことになる．