平成20年度　九州大学２次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 1から10までの番号が1つずつ書かれた10枚のカードがある。k を2から9までの整数の1つとする。よくきった10枚のカードから1枚を抜き取り，そのカードの番号が k より大きいなら，抜き取ったカードの番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら，そのカードを戻さずに，残りの9枚の中から1枚を抜き取り，2回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 得点が1である確率と10である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 2以上9以下の整数 n に対して，得点が n である確率を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ △OABにおいて，辺AB上に点Qをとり，直線OQ上に点Pをとる。ただし，点Pは点Qに関して点Oと反対側にあるとする。3つの三角形△OAP，△OBP，△ABPの面積をそれぞれ a，b，c とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a，b を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a，b，c を用いて表せ。

(3) 3辺OA，OB，ABの長さはそれぞれ3，5，6であるとする。点Pを中心とし，3直線OA，OB，ABに接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a>0$ に対して，$f(x)=a+\log x\ (x>0)$，$g(x)=\sqrt{x-1}\ (x \geqq 1)$ とおく。2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点で共通の接線 l を持つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ。

(2) 2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ。

(3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ，互いに交わらないように配置する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。このとき，$\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。

解答例

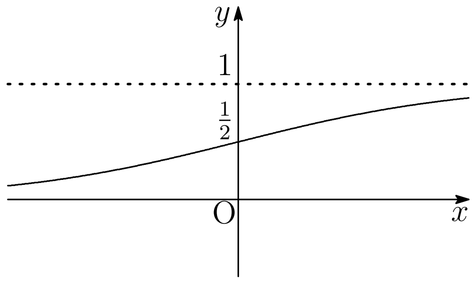
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}=1-\dfrac{1}{e^x+1}$ より　$f'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{(e^x+1)^2}$ であるから

$$f''(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}+\frac{2e^x}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

よって，増減やグラフの凹凸は左下の表のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	変曲点 $\frac{1}{2}$	$\nearrow$



また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ であるから，漸近線は $y=0$，$y=1$
以上から，この関数のグラフの概形は，右上の図のようになる．

(2) $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおいて $(0<y<1)$，x について解くと

$$e^x=\frac{y}{1-y}\quad \text{ゆえに}\quad x=\log\frac{y}{1-y}$$

よって　　$\boldsymbol{f^{-1}(x)=\log\dfrac{x}{1-x}\ \ (0<x<1)}$

(3) $0<\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{1}{n+1}<1$ であるから，$f^{-1}(x)=-\log\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$ により

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)=-\log(n+2-1)=-\log(n+1)$$
$$f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)=-\log(n+1-1)=-\log n$$

$$n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}=-n\{\log(n+1)-\log n\}=-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

よって　$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$
$$=-\log e=\boldsymbol{-1}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 得点が 1 であるのは，1 回目に 2 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に 1 の番号を引く場合である．よって，求める確率は

$$\frac{k-1}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k-1}{90}}$$

得点が 10 であるのは，1 回目に 10 を引くか，1 回目に 1 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に 10 の番号を引く場合である．よって，求める確率は

$$\frac{1}{10}+\frac{k}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k+9}{90}}$$

(2) n の値について，次の 2 つに場合分けをする．

i) $n \leqq k$ のとき
1 回目に n 以外の 1 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に n の番号を引く場合である．よって，その確率は

$$\frac{k-1}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k-1}{90}}$$

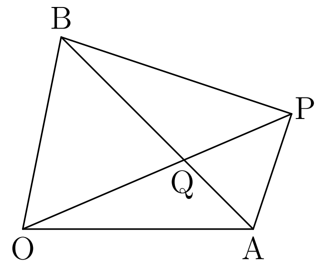
ii) $k < n$ のとき
1 回目に n を引くか，1 回目に 1 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に n の番号を引く場合である．よって，その確率は

$$\frac{1}{10}+\frac{k}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k+9}{90}}$$

(3) (1)，(2) より，求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{n=1}^{k} n\times\frac{k-1}{90}+\sum_{n=k+1}^{10} n\times\frac{k+9}{90}\\
&= \frac{k-1}{90}\sum_{n=1}^{k} n+\frac{k+9}{90}\sum_{n=k+1}^{10} n=\frac{k-1}{90}\sum_{n=1}^{k} n+\frac{k-1+10}{90}\sum_{n=k+1}^{10} n\\
&= \frac{k-1}{90}\sum_{n=1}^{10} n+\frac{1}{9}\sum_{n=k+1}^{10} n\\
&= \frac{k-1}{90}\times\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11+\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}(10-k)\{(k+1)+10\}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{18}(-k^2+10k+99)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{AQ : QB} = \triangle\mathrm{OAP} : \triangle\mathrm{OBP} = a : b$



よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}} + a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}}$

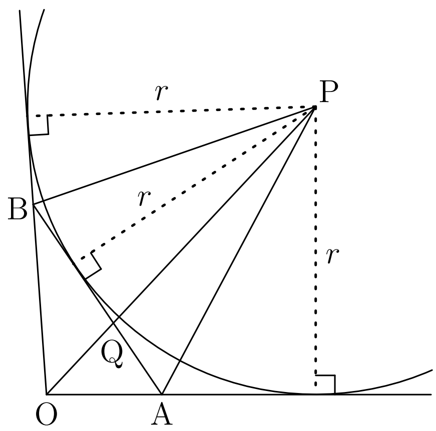
(2)　$\mathrm{OQ : OP}$

$= \triangle\mathrm{OAB} : \triangle\mathrm{OAP} + \triangle\mathrm{OBP}$

$= a+b-c : a+b$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{a+b}{a+b-c}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}} + a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b-c}}$

(3) 3直線OA，OB，ABに接する円の半径をrとすると



$$\triangle\mathrm{OAP} : \triangle\mathrm{OBP} : \triangle\mathrm{ABP}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot r : \frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot r : \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot r$$
$$= \mathrm{OA : OB : AB}$$

したがって　$a : b : c = 3 : 5 : 6$

よって，(2)の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+5-6} = \boldsymbol{\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}}$$

別解 (3) OPは$\triangle$OABのOの内角の二等分線であるから，実数sを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right) = \frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

APは$\triangle$OABのAの外角の二等分線であるから，実数tを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}}{6}\right)$$
$$= \left(1 + \frac{t}{6}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

上の2式より　$\dfrac{s}{3} = 1 + \dfrac{t}{6}$，$\dfrac{s}{5} = \dfrac{t}{6}$　　ゆえに　$s = \dfrac{15}{2}$，$t = 9$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

点Pの x 座標を p とすると　$f(p) = g(p)$, $f'(p) = g'(p)$

したがって　$a + \log p = \sqrt{p-1}$　$\cdots$①,　$\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2\sqrt{p-1}}$　$\cdots$②

②から　$p = 2\sqrt{p-1}$　$(p > 1)$

この式の両辺を平方すると　$p^2 = 4(p-1)$　ゆえに　$(p-2)^2 = 0$

$p > 1$ に注意して　$p = 2$

$a > 0$ に注意しながら，①に代入して　$\boldsymbol{a = 1 - \log 2}$

よって，Pの座標は　**P(2, 1)**

点Pにおける接線の傾きは $\dfrac{1}{2}$ であるから，接線 l の方程式は

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-2) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$$

(2) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと $(x \geqq 1)$

$$h(x) = a + \log x - \sqrt{x-1}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1} - x}{2x\sqrt{x-1}}$$

$$= -\frac{(x-2)^2}{2x\sqrt{x-1}(2\sqrt{x-1} + x)}$$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$-$
$h(x)$	a	↘	0	↘

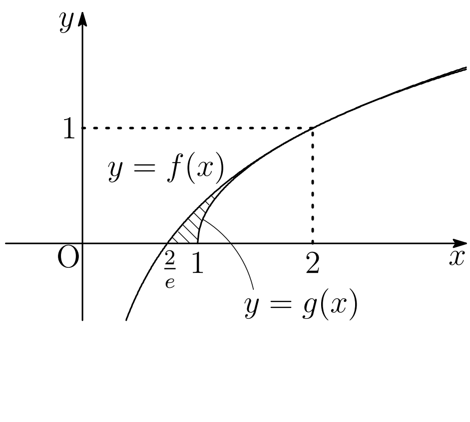
$h(x) = 0$ の解は $x = 2$ のみであり，2曲線は点P以外に共有点を持たない．

(3) 求める面積を S とすると，下の図から

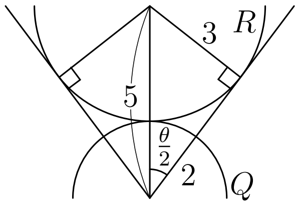
$$S = \int_{\frac{2}{e}}^{2} (1 - \log 2 + \log x)\,dx - \int_{1}^{2} \sqrt{x-1}\,dx$$

$$= \Big[(1 - \log 2)x + x\log x - x \Big]_{\frac{2}{e}}^{2} - \frac{2}{3}\Big[(x-1)^{\frac{3}{2}} \Big]_{1}^{2}$$

$$= \Big[x\log x - x\log 2 \Big]_{\frac{2}{e}}^{2} - \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{e} - \frac{2}{3}}$$



$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 右の図から　$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$



$0<\theta<\pi$ より，$0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから

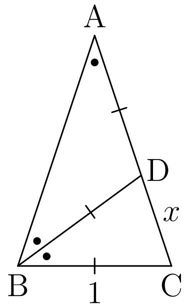
$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

よって　$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\mathbf{\frac{24}{25}}$

(2) $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$\sin\frac{\pi}{6}<\sin\frac{\theta}{2}<\sin\frac{\pi}{4}$

したがって　$\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$　　よって　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$

(3) $\alpha=\frac{\pi}{5}$ とする．$\mathrm{BC}=1$，$A=\alpha$，$B=C=2\alpha$ である二等辺三角形について，$\angle\mathrm{B}$ の二等分線と CA との交点を D とする．$\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{AD}=1$．$\mathrm{CD}=x$ とおくと，$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathrm{BC}:\mathrm{CD}$ であるから



$$(1+x):1=1:x\quad ゆえに\quad x^2+x-1=0$$

$x>0$ に注意してこれを解くと　$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\triangle\mathrm{BCD}$ に余弦定理を適用すると，$x^2=1-x$ であることに注意して

$$\cos\alpha=\frac{1^2+1^2-x^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{x+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

ここで　$\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{4}{5}=\frac{5\sqrt{5}-11}{20}=\frac{\sqrt{125}-\sqrt{121}}{20}>0$

したがって　$\cos\alpha>\cos\frac{\theta}{2}$　ゆえに　$\alpha<\frac{\theta}{2}$　すなわち　$\frac{2}{5}\pi<\theta$

上式および (2) の結果から　　$\frac{2}{5}\pi<\theta<\frac{\pi}{2}$

これから　　$4<\frac{2\pi}{\theta}<5$

よって，配置できる半径 3 の円の最大個数は　**4** (個)