

平成20年度 九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工), 理, 医, 歯, 薬, 工, 芸工, 農学部)

問題 1 2 3 4 5

1 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ とおく。ただし, e は自然対数の底とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ の増減, 凹凸, 漸近線を調べ, グラフをかけ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f^{-1} \left(\frac{1}{n+2} \right) - f^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right\}$ を求めよ。

2 1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。 k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り, そのカードの番号が k より大きいなら, 抜き取ったカードの番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら, そのカードを戻さずに, 残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り, 2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 2 以上 9 以下の整数 n に対して, 得点が n である確率を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。

3 $\triangle OAB$ において, 辺 AB 上に点 Q をとり, 直線 OQ 上に点 P をとる。ただし, 点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形 $\triangle OAP$, $\triangle OBP$, $\triangle ABP$ の面積をそれぞれ a , b , c とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) \overrightarrow{OQ} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} および a , b を用いて表せ。

(2) \overrightarrow{OP} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} および a , b , c を用いて表せ。

(3) 3 辺 OA , OB , AB の長さはそれぞれ 3, 5, 6 であるとする。点 P を中心とし, 3 直線 OA , OB , AB に接する円が存在するとき, \overrightarrow{OP} を \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} を用いて表せ。

4 $a > 0$ に対して、 $f(x) = a + \log x$ ($x > 0$), $g(x) = \sqrt{x-1}$ ($x \geq 1$) とおく。2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ が、ある点 P を共有し、その点で共通の接線 l を持つとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a の値、点 P の座標、および接線 l の方程式を求めよ。
- (2) 2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ。
- (3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

5 いくつかの半径 3 の円を、半径 2 の円 Q に外接し、かつ、互いに交わらないように配置する。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし、円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし、 $0 < \theta < \pi$ とする。このとき、 $\sin \theta$ を求めよ。
- (2) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を示せ。
- (3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。

解答例

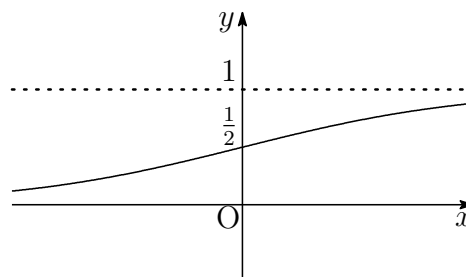
$$\boxed{1} \quad (1) \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1} \quad \text{より} \quad f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \quad \text{であるから}$$

$$f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^3} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$$

よって、増減やグラフの凹凸は左下の表のようになる。

x	...	0	...
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	変曲点 $\frac{1}{2}$	↘



また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ であるから、漸近線は $y = 0$, $y = 1$ 以上から、この関数のグラフの概形は、右上の図のようになる。

$$(2) \quad y = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{と} \quad \text{おいて} \quad (0 < y < 1), \quad x \quad \text{について解くと}$$

$$e^x = \frac{y}{1 - y} \quad \text{ゆえに} \quad x = \log \frac{y}{1 - y}$$

$$\text{よって} \quad f^{-1}(x) = \log \frac{x}{1 - x} \quad (0 < x < 1)$$

$$(3) \quad 0 < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} < 1 \quad \text{であるから,} \quad f^{-1}(x) = -\log \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \quad \text{により}$$

$$f^{-1} \left(\frac{1}{n+2} \right) = -\log(n+2-1) = -\log(n+1)$$

$$f^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) = -\log(n+1-1) = -\log n$$

$$n \left\{ f^{-1} \left(\frac{1}{n+2} \right) - f^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right\} = -n \{ \log(n+1) - \log n \} = -\log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f^{-1} \left(\frac{1}{n+2} \right) - f^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$$

$$= -\log e = -1$$

■

- 2 (1) 得点が1であるのは、1回目に2から k までのいずれかの番号を引き、2回目に1の番号を引く場合である。よって、求める確率は

$$\frac{k-1}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{k-1}{90}$$

得点が10であるのは、1回目に10を引くか、1回目に1から k までのいずれかの番号を引き、2回目に10の番号を引く場合である。よって、求める確率は

$$\frac{1}{10} + \frac{k}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{k+9}{90}$$

- (2) n の値について、次の2つに場合分けをする。

i) $n \leq k$ のとき

1回目に n 以外の1から k までのいずれかの番号を引き、2回目に n の番号を引く場合である。よって、その確率は

$$\frac{k-1}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{k-1}{90}$$

ii) $k < n$ のとき

1回目に n を引くか、1回目に1から k までのいずれかの番号を引き、2回目に n の番号を引く場合である。よって、その確率は

$$\frac{1}{10} + \frac{k}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{k+9}{90}$$

- (3) (1), (2) より、求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=1}^k n \times \frac{k-1}{90} + \sum_{n=k+1}^{10} n \times \frac{k+9}{90} \\ &= \frac{k-1}{90} \sum_{n=1}^k n + \frac{k+9}{90} \sum_{n=k+1}^{10} n = \frac{k-1}{90} \sum_{n=1}^k n + \frac{k-1+10}{90} \sum_{n=k+1}^{10} n \\ &= \frac{k-1}{90} \sum_{n=1}^{10} n + \frac{1}{9} \sum_{n=k+1}^{10} n \\ &= \frac{k-1}{90} \times \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + \frac{1}{9} \times \frac{1}{2} (10-k) \{ (k+1) + 10 \} \\ &= \frac{1}{18} (-k^2 + 10k + 99) \end{aligned}$$

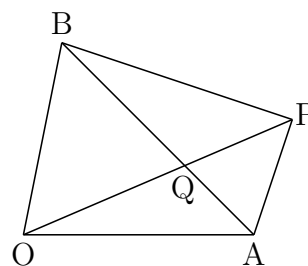


- 3 (1) $AQ : QB = \triangle OAP : \triangle OBP = a : b$

$$\text{よって } \vec{OQ} = \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b}$$

- (2) $OQ : OP$
 $= \triangle OAB : \triangle OAP + \triangle OBP$
 $= a + b - c : a + b$

$$\text{よって } \vec{OP} = \frac{a+b}{a+b-c} \vec{OQ} = \frac{b\vec{OA} + a\vec{OB}}{a+b-c}$$

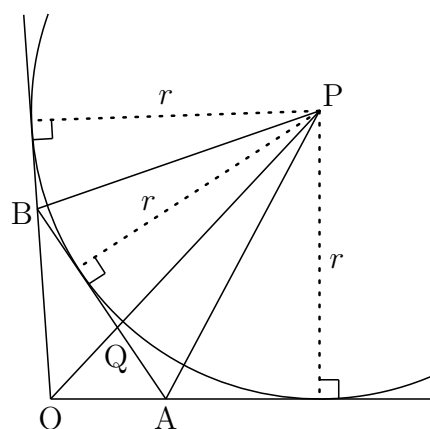


- (3) 3直線 OA, OB, AB に接する円の半径
を r とすると

$$\begin{aligned} \triangle OAP : \triangle OBP : \triangle ABP \\ &= \frac{1}{2}OA \cdot r : \frac{1}{2}OB \cdot r : \frac{1}{2}AB \cdot r \\ &= OA : OB : AB \end{aligned}$$

したがって $a : b : c = 3 : 5 : 6$
よって, (2) の結果から

$$\vec{OP} = \frac{5\vec{OA} + 3\vec{OB}}{3+5-6} = \frac{5\vec{OA} + 3\vec{OB}}{2}$$



別解 (3) OP は $\triangle OAB$ の O の内角の二等分線であるから, 実数 s を用いて

$$\vec{OP} = s \left(\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|} \right) = \frac{s}{3}\vec{OA} + \frac{s}{5}\vec{OB}$$

AP は $\triangle OAB$ の A の外角の二等分線であるから, 実数 t を用いて

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + t \left(\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \right) = \vec{OA} + t \left(\frac{\vec{OA}}{3} + \frac{\vec{OB} - \vec{OA}}{6} \right) \\ &= \left(1 + \frac{t}{6} \right) \vec{OA} + \frac{t}{6} \vec{OB} \end{aligned}$$

$$\text{上の2式より } \frac{s}{3} = 1 + \frac{t}{6}, \frac{s}{5} = \frac{t}{6} \quad \text{ゆえに } s = \frac{15}{2}, t = 9$$

$$\text{よって } \vec{OP} = \frac{5\vec{OA} + 3\vec{OB}}{2}$$

■

4 (1) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

点 P の x 座標を p とすると $f(p) = g(p)$, $f'(p) = g'(p)$

したがって $a + \log p = \sqrt{p-1}$ … ①, $\frac{1}{p} = \frac{1}{2\sqrt{p-1}}$ … ②

② から $p = 2\sqrt{p-1}$ ($p > 1$)

この式の両辺を平方すると $p^2 = 4(p-1)$ ゆえに $(p-2)^2 = 0$

$p > 1$ に注意して $p = 2$

$a > 0$ に注意しながら, ① に代入して $a = 1 - \log 2$

よって, P の座標は **P(2, 1)**

点 P における接線の傾きは $\frac{1}{2}$ であるから, 接線 l の方程式は

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{1}{2}x$$

(2) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと ($x \geq 1$)

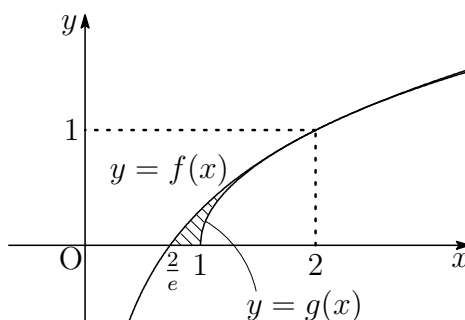
$$\begin{aligned} h(x) &= a + \log x - \sqrt{x-1} \\ h'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1} - x}{2x\sqrt{x-1}} \\ &= -\frac{(x-2)^2}{2x\sqrt{x-1}(2\sqrt{x-1} + x)} \end{aligned}$$

x	1	...	2	...
$h'(x)$		-	0	-
$h(x)$	a	\searrow	0	\searrow

$h(x) = 0$ の解は $x = 2$ のみであり, 2 曲線は点 P 以外に共有点を持たない.

(3) 求める面積を S とすると, 下の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{2}{e}}^2 (1 - \log 2 + \log x) dx - \int_1^2 \sqrt{x-1} dx \\ &= \left[(1 - \log 2)x + x \log x - x \right]_{\frac{2}{e}}^2 - \frac{2}{3} \left[(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\ &= \left[x \log x - x \log 2 \right]_{\frac{2}{e}}^2 - \frac{2}{3} = \frac{2}{e} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

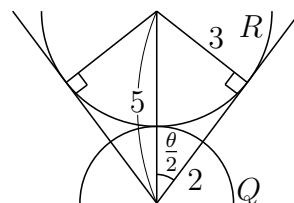


5 (1) 右の図から $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$

$0 < \theta < \pi$ より, $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

よって $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$



(2) $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから $\sin \frac{\pi}{6} < \sin \frac{\theta}{2} < \sin \frac{\pi}{4}$

したがって $\frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$ よって $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$

- (3) $\alpha = \frac{\pi}{5}$ とする. $BC = 1$, $A = \alpha$, $B = C = 2\alpha$ である二等辺三角形について, $\angle B$ の二等分線と CA との交点を D とする. $BC = BD = AD = 1$. $CD = x$ とおくと, $AB : BC = BC : CD$ であるから

$$(1+x) : 1 = 1 : x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$x > 0$ に注意してこれを解くと $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$\triangle BCD$ に余弦定理を適用すると, $x^2 = 1 - x$ であることに注意して

$$\cos \alpha = \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{x+1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

ここで $\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{4}{5} = \frac{5\sqrt{5}-11}{20} = \frac{\sqrt{125}-\sqrt{121}}{20} > 0$

したがって $\cos \alpha > \cos \frac{\theta}{2}$ ゆえに $\alpha < \frac{\theta}{2}$ すなわち $\frac{2}{5}\pi < \theta$

上式および (2) の結果から $\frac{2}{5}\pi < \theta < \frac{\pi}{2}$

これから $4 < \frac{2\pi}{\theta} < 5$

よって, 配置できる半径 3 の円の最大個数は 4 (個)

