

平成19年度 九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工), 理, 医, 歯, 薬, 工, 芸工, 農学部)

問題 1 2 3 4 5

1 $f(x) = xe^x$ とおく。また p を $p \geq 0$ を満たす数とし、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(p, f(p))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とおく。ただし、 e は自然対数の底である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 0$ において $f(x) \geq g(x)$ が成り立つことを示せ。
- (2) L を正の数とする。曲線 $y = f(x)$, 接線 $y = g(x)$, および2直線 $x = 0$, $x = L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき、 $p \geq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。

2 p を $0 < p < 1$ を満たす数とし、行列 A, B, C をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに、行列 A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$A_1 = A, \quad A_{n+1} = A_n B - B A_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) A_2, A_3 を求めよ。
- (2) $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $\Delta_n = a_n d_n - b_n c_n$ とおくとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$ を求めよ。

3 a, b を正の数とし、空間内の3点 $A(a, -a, b)$, $B(-a, a, b)$, $C(a, a, -b)$ を考える。A, B, Cを通る平面を α , 原点Oを中心としA, B, Cを通る球面を S とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB の中点を D とするとき、 $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB}$ であることを示せ。また $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) ベクトル \overrightarrow{DC} と \overrightarrow{DO} のなす角を θ とするとき $\sin \theta$ を求めよ。また、平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき、線分 OH の長さを求めよ。
- (3) 点 P が球面 S 上を動くとき、四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし、P は平面 α 上にはないものとする。

- 4 さいころを3回続けて投げて出た目を順に a, b, c とする。これらの数 a, b, c に対して2次方程式

$$(*) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

を考える。ただし、さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2次方程式(*)が異なる二つの実数の解をもつとき、積 ac の取りうる値を求め、積 ac の各値ごとに可能な a と c の組 (a, c) がそれぞれ何通りあるかを求めよ。
 - (2) 2次方程式(*)が異なる二つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし、一般に自然数 n が自然数の2乗でなければ \sqrt{n} は無理数であることを用いてよい。
- 5 関数 $f(x)$ が0でない定数 p に対して、つねに $f(x+p) = f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい、 p を周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば、関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $y = |\sin x|$ のグラフをかき、関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ。
- (2) 自然数 m, n に対して関数 $f(x)$ を $f(x) = |\sin mx| \sin nx$ とおく。 p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$ が成り立つことを示せ。また、このとき mp は π の整数倍であり、 np は 2π の整数倍であることを示せ。
- (3) m, n は1以外の公約数をもたない自然数とする。(2)の結果を用いて関数 $|\sin mx| \sin nx$ の基本周期を求めよ。

解答例

- 1 (1) $f(x) = xe^x$ を微分すると $f'(x) = (x+1)e^x$
 $P(p, pe^p)$ における接線の方程式は

$$y - pe^p = (p+1)e^p(x-p) \quad \text{ゆえに} \quad y = (p+1)e^px - p^2e^p$$

よって $g(x) = (p+1)e^px - p^2e^p$

ここで、 $h(x) = f(x) - g(x)$ ($x \geq 0$) とおくと

$$h(x) = xe^x - (p+1)e^px + p^2e^p$$

$$h'(x) = (x+1)e^x - (p+1)e^p$$

$$h''(x) = (x+2)e^x$$

$x \geq 0$ において $h''(x) > 0$ より、 $h'(x)$ は単調増加であるから、 $h(x)$ の増減は、右の表のようになる。

x	0	...	p	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		↘	0	↗

したがって、 $x \geq 0$ において $h(x) \geq 0$

よって $x \geq 0$ において $f(x) \geq g(x)$

- (2) (1) の結論から

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^L \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^L xe^x dx - (p+1)e^p \int_0^L x dx + p^2e^p \int_0^L dx \\ &= \int_0^L xe^x dx - \frac{L^2}{2}(p+1)e^p + Lp^2e^p \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S'(p) &= -\frac{L^2}{2}(p+2)e^p + L(p^2+2p)e^p \\ &= \frac{L}{2}e^p(p+2)(2p-L) \end{aligned}$$

よって、 $S(p)$ の増減は右の表のようになり、 $S(p)$ は、 $p = \frac{L}{2}$ で最小値をとる。

p	0	...	$\frac{L}{2}$...
$S'(p)$		-	0	+
$S(p)$		↘	極小	↗

補足 曲線 $y = f(x)$ と曲線上の点 $P(p, f(p))$ における接線 $y = g(x)$ について

$$\begin{aligned}
 f(x) - g(x) &= f(x) - \{f'(p)(x - p) + f(p)\} \\
 &= \int_p^x f'(t) dt - f'(p)(x - p) \\
 &= - \int_p^x (x - t)' f'(t) dt - f'(p)(x - p) \\
 &= - \left[(x - t) f'(t) \right]_p^x + \int_p^x (x - t) f''(t) dx - f'(p)(x - p) \\
 &= \int_p^x (x - t) f''(t) dt = \int_x^p (t - x) f''(t) dt
 \end{aligned}$$

$$f(x) = xe^x \text{ より, } x \geq 0 \text{ において } f''(x) = (x + 2)e^x > 0$$

$$0 \leq x \leq p \text{ のとき } \int_x^p (t - x) f''(t) dt \geq 0,$$

$$p \leq x \text{ のとき } \int_p^x (x - t) f''(t) dt \geq 0$$

$$\text{したがって } f(x) - g(x) \geq 0 \text{ よって } f(x) \geq g(x) \quad \blacksquare$$

2 (1) $A_2 = A_1B - BA_1 + C$ より

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2+p \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+p & 1+p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$A_3 = A_2B - BA_2 + C$ より

$$\begin{aligned} A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+(1+p)^2 \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -p \\ 1+p & 1+p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+p+p^2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 行列 A_n について

$$A_{n+1} = A_nB - BA_n + C \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } A_{n+2} = A_{n+1}B - BA_{n+1} + C \quad \cdots \textcircled{2}$$

も成り立つ.

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より } A_{n+2} - A_{n+1} = (A_{n+1} - A_n)B - B(A_{n+1} - A_n) \quad \cdots \textcircled{3}$$

(1) の結果から

$$A_2 - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 0 & p^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで, $n \geq 1$ のとき

$$A_{n+1} - A_n = \begin{pmatrix} 0 & p^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

と推測し, これを数学的帰納法により証明する.

- [1] $n = 1$ のとき, (*) が成り立つ.
 [2] $n = k$ のとき, (*) が成り立つ, すなわち

$$A_{k+1} - A_k = \begin{pmatrix} 0 & p^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であると仮定すると, ③ より

$$\begin{aligned} A_{k+2} - A_{k+1} &= (A_{k+1} - A_k)B - B(A_{k+1} - A_k) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & p^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & p^k + p^{k+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & p^{k+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, $n = k + 1$ のときも (*) が成り立つ.

- [1], [2] から, すべての自然数 n について (*) が成り立つ.
 $n \geq 2$ とすると, $p \neq 1$ に注意して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (A_{k+1} - A_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & p^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & p^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-p^n}{1-p} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots (**) \end{aligned}$$

(**) は $n = 1$ のときも成り立つので, すべての自然数 n について (**) は成り立つ.

したがって
$$\Delta_n = -1 + \frac{1-p^n}{1-p}$$

$0 < p < 1$ により
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = -1 + \frac{1}{1-p} = \frac{p}{1-p}$$
 ■

3 (1) AB の中点 D は

$$\left(\frac{a+(-a)}{2}, \frac{-a+a}{2}, \frac{b+b}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad (0, 0, b)$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \vec{DC} &= \vec{OC} - \vec{OD} = (a, a, -b) - (0, 0, b) = (a, a, -2b) \\ \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} = (-a, a, b) - (a, -a, b) = (-2a, 2a, 0) \\ \vec{DO} &= -\vec{OD} = -(0, 0, b) = (0, 0, -b) \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \vec{DC} \cdot \vec{AB} = a \cdot (-2a) + a \cdot 2a + (-2b) \cdot 0 = 0$$

$$\vec{DO} \cdot \vec{AB} = 0 \cdot (-2a) + 0 \cdot 2a + (-b) \cdot 0 = 0$$

$$\text{よって} \quad \vec{DC} \perp \vec{AB}, \quad \vec{DO} \perp \vec{AB}$$

DC ⊥ AB より, $a > 0$ に注意して

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \frac{1}{2} \text{AB} \cdot \text{DC} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-2a)^2 + (2a)^2 + 0^2} \sqrt{a^2 + a^2 + (-2b)^2} \\ &= 2a \sqrt{a^2 + 2b^2} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から, $b > 0$ に注意して

$$\cos \theta = \frac{\vec{DC} \cdot \vec{DO}}{|\vec{DC}| |\vec{DO}|} = \frac{2b^2}{\sqrt{2a^2 + 4b^2} \times b} = \frac{\sqrt{2} b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

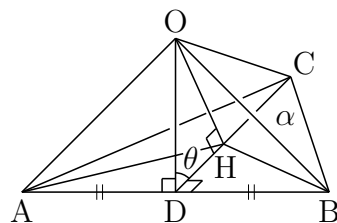
$$\sin \theta \geq 0 \text{ であるから} \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

DO ⊥ AB であるから OA = OB

ゆえに $\triangle OAH \equiv \triangle OBH$ さらに $\triangle HAD \equiv \triangle HBD$

DC ⊥ AB であるから, H は直線 CD 上にある.

$$\text{よって} \quad \text{OH} = \text{DO} \sin \theta = b \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

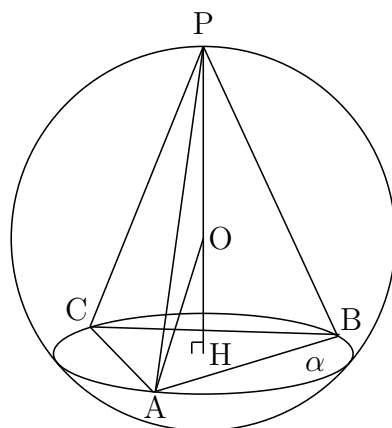


- (3) 直線 OH と球面 S の交点のうち、平面 α に関して、 O と同じ側にある点を P とするとき、四面体 $ABCP$ の体積は最大となる。このとき

$$\begin{aligned} PH &= PO + OH \\ &= OA + OH \\ &= \sqrt{2a^2 + b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} \end{aligned}$$

よって、求める最大値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \Delta ABC \times PH &= \frac{1}{3} \times 2a\sqrt{a^2 + 2b^2} \left(\sqrt{2a^2 + b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} \right) \\ &= \frac{2a}{3} \left(\sqrt{(a^2 + 2b^2)(2a^2 + b^2)} + ab \right) \end{aligned}$$



- 4 (1) 2次方程式(*)が異なる2つの実数解をもつ条件は

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{ゆえに} \quad ac < \frac{b^2}{4}$$

$$\frac{b^2}{4} \leq \frac{6^2}{4} = 9 \quad \text{であるから} \quad ac < \frac{b^2}{4} \leq 9 \quad \text{すなわち} \quad ac \leq 8$$

したがって、 ac のとりうる値は **1, 2, 3, 4, 5, 6, 8**

よって、 ac の値とその組 (a, c) の個数は次のとおりである.

$ac = 1$ のとき $(a, c) = (1, 1)$ の**1通り**

$ac = 2$ のとき $(a, c) = (1, 2), (2, 1)$ の**2通り**

$ac = 3$ のとき $(a, c) = (1, 3), (3, 1)$ の**2通り**

$ac = 4$ のとき $(a, c) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$ の**3通り**

$ac = 5$ のとき $(a, c) = (1, 5), (5, 1)$ の**2通り**

$ac = 6$ のとき $(a, c) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$ の**4通り**

$ac = 8$ のとき $(a, c) = (2, 4), (4, 2)$ の**2通り**

- (2) (1)の場合において、 $D = b^2 - 4ac$ が平方数となる **b** の個数を調べる.

$ac = 1$ のとき $D = b^2 - 4$ より b の値はなし

$ac = 2$ のとき $D = b^2 - 8$ より $b = 3$ の**1通り**

$ac = 3$ のとき $D = b^2 - 12$ より $b = 4$ の**1通り**

$ac = 4$ のとき $D = b^2 - 16$ より $b = 5$ の**1通り**

$ac = 5$ のとき $D = b^2 - 20$ より $b = 6$ の**1通り**

$ac = 6$ のとき $D = b^2 - 24$ より $b = 5$ の**1通り**

$ac = 8$ のとき $D = b^2 - 32$ より $b = 6$ の**1通り**

よって、求める確率は、(1)の結果に注意して

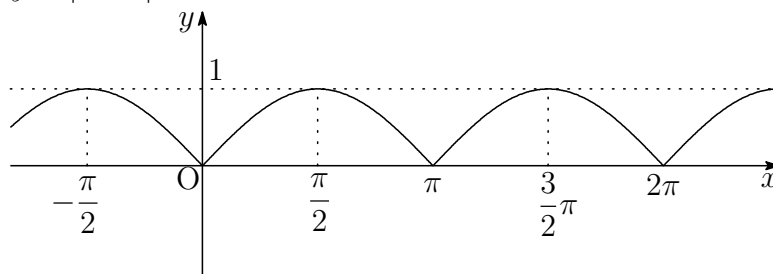
$$\frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{6^3} = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$$



5 (1) $\sin x \geq 0$ のとき $|\sin x| = \sin x$

$\sin x < 0$ のとき $|\sin x| = -\sin x$

$y = |\sin x|$ のグラフは、下の図のようになる。



任意の実数 x について $|\sin(x+p)| = |\sin x|$ が成り立つので、 $x = 0$ のとき

$$|\sin p| = 0$$

これを満たす最小の正の数 p は $p = \pi$

実際、任意の実数 x について $|\sin(x + \pi)| = |\sin x|$ が成り立つ。

よって、求める基本周期は π

(2) 任意の x に対して $f(x+p) = f(x)$

$$\text{これに } x = -\frac{p}{2} \text{ を代入して } f\left(-\frac{p}{2}\right) = f\left(\frac{p}{2}\right) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{また } f(-x) &= |\sin(-mx)| \sin(-nx) \\ &= -|\sin mx| \sin nx = -f(x) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } f\left(-\frac{p}{2}\right) = -f\left(\frac{p}{2}\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } f\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \text{ より } \left|\sin \frac{mp}{2}\right| \sin \frac{np}{2} = 0$$

$$\text{ゆえに } \sin \frac{mp}{2} = 0 \text{ または } \sin \frac{np}{2} = 0$$

したがって $mp = 2k\pi$ または $np = 2l\pi$ (k, l は整数)

i) $mp = 2k\pi$ (k は整数) のとき

$$\begin{aligned} f(x+p) &= |\sin m(x+p)| \sin n(x+p) \\ &= |\sin(mx+mp)| \sin(nx+np) \\ &= |\sin(mx+2k\pi)| \sin(nx+np) \\ &= |\sin mx| \sin(nx+np) \end{aligned}$$

このとき, $f(x+p) = f(x)$ が成り立つ, すなわち

$$|\sin mx| \sin(nx+np) = |\sin mx| \sin nx \quad \cdots (*)$$

任意の実数 x に対して $(*)$ が成り立つとき $\sin(nx+np) = \sin nx$
ゆえに, np は 2π の整数倍.

ii) $np = 2l\pi$ (l は整数) のとき

$$\begin{aligned} f(x+p) &= |\sin m(x+p)| \sin n(x+p) \\ &= |\sin(mx+mp)| \sin(nx+np) \\ &= |\sin(mx+mp)| \sin(nx+2l\pi) \\ &= |\sin(mx+mp)| \sin nx \end{aligned}$$

このとき, $f(x+p) = f(x)$ が成り立つ, すなわち

$$|\sin(mx+mp)| \sin nx = |\sin mx| \sin nx \quad \cdots (**)$$

任意の実数 x に対して $(**)$ が成り立つとき

$$|\sin(mx+mp)| = |\sin mx|$$

上式に $x=0$ を代入すると $|\sin mp| = 0$

ゆえに, mp は π の整数倍である.

実際, mp が π の整数倍であれば, $(**)$ が成り立つ.

i), ii) より, mp は π の整数倍であり, np は 2π の整数倍である.

(3) (2)の結果より, 改めて, $mp = k\pi$, $np = 2l\pi$ とおくと (k, l は整数)

$$p = \frac{k\pi}{m} = \frac{2l\pi}{n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{kn}{m} = 2l$$

m と n は互いに素であるから, k は m の倍数.

ゆえに, $k = mk'$ とおくと (k' は整数), $p = k'\pi \cdots \textcircled{3}$ であるから

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x+k'\pi) \\ &= |\sin m(x+k'\pi)| \sin n(x+k'\pi) \\ &= |\sin(mx+mk'\pi)| \sin(nx+nk'\pi) \\ &= |\sin mx| (\sin nx \cos nk'\pi + \cos nx \sin nk'\pi) \\ &= (-1)^{nk'} |\sin mx| \sin nx \\ &= (-1)^{nk'} f(x) \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

i) n が偶数のとき

$$k' = 1 \text{ とすると, } \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } f(x+\pi) = f(x)$$

したがって, 基本周期は π

ii) n が奇数のとき

$$k' = 2 \text{ とすると, } \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } f(x+2\pi) = f(x)$$

したがって, 基本周期は 2π

よって, 基本周期は, n が偶数のとき π , n が奇数のとき 2π ■