平成19年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

1 $f(x) = xe^x$ とおく。また p を $p \geqq 0$ を満たす数とし，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) L を正の数とする。曲線 $y = f(x)$，接線 $y = g(x)$，および2直線 $x = 0$，$x = L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき，$p \geqq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。

2 p を $0 < p < 1$ を満たす数とし，行列 A，B，C をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに，行列 A_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$A_1 = A,\quad A_{n+1} = A_nB - BA_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A_2，A_3 を求めよ。

(2) $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$，$\Delta_n = a_nd_n - b_nc_n$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Delta_n$ を求めよ。

3 a，b を正の数とし，空間内の3点 $\mathrm{A}(a, -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a, -b)$ を考える。A，B，C を通る平面を α，原点 O を中心とし A，B，C を通る球面を S とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。

$\boxed{\textbf{4}}$ さいころを3回続けて投げて出た目を順に a，b，c とする。これらの数 a，b，c に対して2次方程式

$$(*) \qquad ax^2+bx+c=0$$

を考える。ただし，さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 2次方程式 $(*)$ が異なる二つの実数の解をもつとき，積 ac の取りうる値を求め，積 ac の各値ごとに可能な a と c の組 $(a,\ c)$ がそれぞれ何通りあるかを求めよ。

(2) 2次方程式 $(*)$ が異なる二つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし，一般に自然数 n が自然数の2乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい。

$\boxed{\textbf{5}}$ 関数 $f(x)$ が0でない定数 p に対して，つねに $f(x+p)=f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい，p を周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば，関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=|\sin x|$ のグラフをかき，関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ。

(2) 自然数 m，n に対して関数 $f(x)$ を $f(x)=|\sin mx|\sin nx$ とおく。p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f\left(\dfrac{p}{2}\right)=f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=0$ が成り立つことを示せ。また，このとき mp は π の整数倍であり，np は 2π の整数倍であることを示せ。

(3) m，n は1以外の公約数をもたない自然数とする。(2)の結果を用いて関数 $|\sin mx|\sin nx$ の基本周期を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=xe^x$ を微分すると　$f'(x)=(x+1)e^x$

$\mathrm{P}(p,\ pe^p)$ における接線の方程式は

$$y-pe^p=(p+1)e^p(x-p)\quad \text{ゆえに}\quad y=(p+1)e^px-p^2e^p$$

よって　　$g(x)=(p+1)e^px-p^2e^p$

ここで，$h(x)=f(x)-g(x)\ (x\geqq 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} h(x)&=xe^x-(p+1)e^px+p^2e^p\\ h'(x)&=(x+1)e^x-(p+1)e^p\\ h''(x)&=(x+2)e^x \end{aligned}$$

$x\geqq 0$ において $h''(x)>0$ より，$h'(x)$ は単調増加であるから，$h(x)$ の増減は，右の表のようになる．

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって，$x\geqq 0$ において　$h(x)\geqq 0$

よって　　$x\geqq 0$ において　$f(x)\geqq g(x)$

(2) (1) の結論から

$$\begin{aligned} S(p)&=\int_0^L\{f(x)-g(x)\}\,dx\\ &=\int_0^L xe^x\,dx-(p+1)e^p\int_0^L x\,dx+p^2e^p\int_0^L dx\\ &=\int_0^L xe^x\,dx-\frac{L^2}{2}(p+1)e^p+Lp^2e^p \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S'(p)&=-\frac{L^2}{2}(p+2)e^p+L(p^2+2p)e^p\\ &=\frac{L}{2}e^p(p+2)(2p-L) \end{aligned}$$

よって，$S(p)$ の増減は右の表のようになり，$S(p)$ は，$\boldsymbol{p=\dfrac{L}{2}}$ で最小値をとる．

p	0	$\cdots$	$\frac{L}{2}$	$\cdots$
$S'(p)$		$-$	0	$+$
$S(p)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

補足 曲線 $y = f(x)$ と曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 $y = g(x)$ について

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= f(x) - \{f'(p)(x-p) + f(p)\} \\ &= \int_p^x f'(t)\,dt - f'(p)(x-p) \\ &= -\int_p^x (x-t)'f'(t)\,dt - f'(p)(x-p) \\ &= -\Big[\ (x-t)f'(t)\ \Big]_p^x + \int_p^x (x-t)f''(t)\,dx - f'(p)(x-p) \\ &= \int_p^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_x^p (t-x)f''(t)\,dt \end{aligned}$$

$f(x) = xe^x$ より，$x \geqq 0$ において　$f''(x) = (x+2)e^x > 0$

$$0 \leqq x \leqq p \text{ のとき} \quad \int_x^p (t-x)f''(t)\,dt \geqq 0,$$

$$p \leqq x \text{ のとき} \quad \int_p^x (x-t)f''(t)\,dt \geqq 0$$

したがって　$f(x) - g(x) \geqq 0$　よって　$f(x) \geqq g(x)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $A_2 = A_1B - BA_1 + C$ より

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2+p \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+p & 1+p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1}+\boldsymbol{p} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$A_3 = A_2B - BA_2 + C$ より

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+(1+p)^2 \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -p \\ 1+p & 1+p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1}+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

(2) 行列 A_n について

$$A_{n+1} = A_nB - BA_n + C \qquad \cdots ①$$

① より $\quad A_{n+2} = A_{n+1}B - BA_{n+1} + C \quad \cdots ②$

も成り立つ．

② − ① より $\quad A_{n+2} - A_{n+1} = (A_{n+1} - A_n)B - B(A_{n+1} - A_n) \quad \cdots ③$

(1) の結果から

$$A_2 - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 0 & p^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで，$n \geqq 1$ のとき

$$A_{n+1} - A_n = \begin{pmatrix} 0 & p^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

と推測し，これを数学的帰納法により証明する．

［1］ $n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$A_{k+1}-A_k=\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

であると仮定すると，③ より

$$\begin{aligned}A_{k+2}-A_{k+1}&=(A_{k+1}-A_k)B-B(A_{k+1}-A_k)\\&=\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & p^k+p^{k+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & p^{k+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

$n \geqq 2$ とすると，$p \neq 1$ に注意して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(A_{k+1}-A_k)&=\sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\A_n&=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1-p^n}{1-p}\\ -1 & -1\end{pmatrix}\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

$(**)$ は $n=1$ のときも成り立つので，すべての自然数 n について $(**)$ は成り立つ．

したがって　　$\Delta_n=-1+\dfrac{1-p^n}{1-p}$

$0<p<1$ により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Delta_n=-1+\frac{1}{1-p}=\boldsymbol{\frac{p}{1-p}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) AB の中点 D は

$$\left(\frac{a+(-a)}{2},\ \frac{-a+a}{2},\ \frac{b+b}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (0,\ 0,\ b)$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = (a,\ a, -b) - (0,\ 0,\ b) = (a,\ a, -2b)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-a,\ a,\ b) - (a, -a,\ b) = (-2a,\ 2a,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{DO}} = -\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -(0,\ 0,\ b) = (0,\ 0, -b)$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = a\cdot(-2a) + a\cdot 2a + (-2b)\cdot 0 = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0\cdot(-2a) + 0\cdot 2a + (-b)\cdot 0 = 0$

よって $\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

DC⊥AB より，$a > 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(-2a)^2 + (2a)^2 + 0^2}\sqrt{a^2 + a^2 + (-2b)^2} \\ &= \boldsymbol{2a\sqrt{a^2 + 2b^2}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$b > 0$ に注意して

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}||\overrightarrow{\mathrm{DO}}|} = \frac{2b^2}{\sqrt{2a^2 + 4b^2} \times b} = \frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

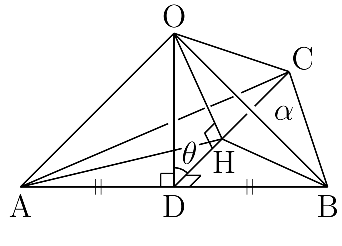
$\sin\theta \geqq 0$ であるから $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \boldsymbol{\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}}$

DO⊥AB であるから OA = OB

ゆえに △OAH ≡ △OBH　さらに　△HAD ≡ △HBD

DC⊥AB であるから，H は直線 CD 上にある．

よって $\mathrm{OH} = \mathrm{DO}\sin\theta = b \times \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} = \boldsymbol{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}}$

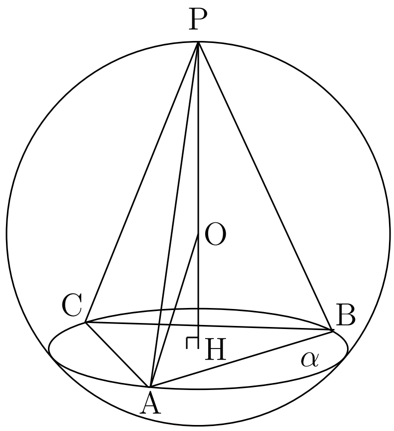


(3) 直線 OH と球面 S の交点のうち，平面 α に関して，O と同じ側にある点を P とするとき，四面体 ABCP の体積は最大となる．このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{PH} &= \mathrm{PO} + \mathrm{OH} \\ &= \mathrm{OA} + \mathrm{OH} \\ &= \sqrt{2a^2 + b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}\end{aligned}$$

よって，求める最大値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC} \times \mathrm{PH} &= \frac{1}{3} \times 2a\sqrt{a^2 + 2b^2}\left(\sqrt{2a^2 + b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{2a}{3}\left(\sqrt{(a^2 + 2b^2)(2a^2 + b^2)} + ab\right)}\end{aligned}$$



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は

$$b^2-4ac>0 \quad \text{ゆえに} \quad ac<\frac{b^2}{4}$$

$\dfrac{b^2}{4} \leqq \dfrac{6^2}{4}=9$ であるから　$ac<\dfrac{b^2}{4} \leqq 9$　すなわち　$ac \leqq 8$

したがって，ac のとりうる値は　**1，2，3，4，5，6，8**

よって，ac の値とその組 $(a,\ c)$ の個数は次のとおりである．

$ac=1$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 1)$ の **1 通り**

$ac=2$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ の **2 通り**

$ac=3$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ の **2 通り**

$ac=4$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ の **3 通り**

$ac=5$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)$ の **2 通り**

$ac=6$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$ の **4 通り**

$ac=8$ のとき　$(a,\ c)=(2,\ 4),\ (4,\ 2)$ の **2 通り**

(2) (1) の場合において，$D=b^2-4ac$ が平方数となる b の個数を調べる．

$ac=1$ のとき　$D=b^2-4$ より　b の値はなし

$ac=2$ のとき　$D=b^2-8$ より　$b=3$ の 1 通り

$ac=3$ のとき　$D=b^2-12$ より　$b=4$ の 1 通り

$ac=4$ のとき　$D=b^2-16$ より　$b=5$ の 1 通り

$ac=5$ のとき　$D=b^2-20$ より　$b=6$ の 1 通り

$ac=6$ のとき　$D=b^2-24$ より　$b=5$ の 1 通り

$ac=8$ のとき　$D=b^2-32$ より　$b=6$ の 1 通り

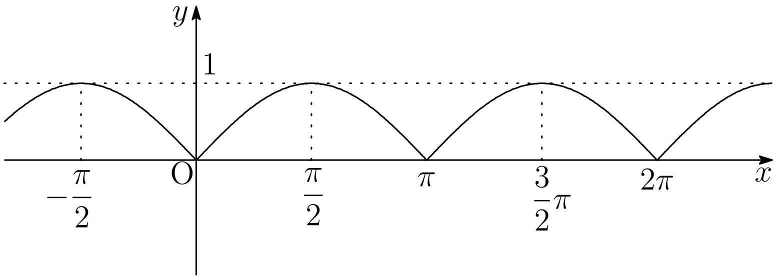
よって，求める確率は，(1) の結果に注意して

$$\frac{2\cdot1+2\cdot1+3\cdot1+2\cdot1+4\cdot1+2\cdot1}{6^3}=\frac{15}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{72}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\sin x \geqq 0$ のとき　$|\sin x| = \sin x$

$\sin x < 0$ のとき　$|\sin x| = -\sin x$

$y = |\sin x|$ のグラフは，下の図のようになる．



任意の実数 x について $|\sin(x+p)| = |\sin x|$ が成り立つので，$x = 0$ のとき

$$|\sin p| = 0$$

これを満たす最小の正の数 p は　　$p = \pi$

実際，任意の実数 x について $|\sin(x+\pi)| = |\sin x|$ が成り立つ．

よって，求める基本周期は　　$\boldsymbol{\pi}$

(2) 任意の x に対して　　$f(x+p) = f(x)$

これに $x = -\dfrac{p}{2}$ を代入して　　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = f\left(\dfrac{p}{2}\right)$　$\cdots$①

また　$f(-x) = |\sin(-mx)|\sin(-nx)$

$\qquad = -|\sin mx|\sin nx = -f(x)$

ゆえに　　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = -f\left(\dfrac{p}{2}\right)$　$\cdots$②

①，② より　$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = 0$

$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = 0$ より　　$\left|\sin\dfrac{mp}{2}\right|\sin\dfrac{np}{2} = 0$

ゆえに　$\sin\dfrac{mp}{2} = 0$　または　$\sin\dfrac{np}{2} = 0$

したがって　$mp = 2k\pi$　または　$np = 2l\pi$　(k，l は整数)

i) $mp = 2k\pi$ (k は整数) のとき

$$
\begin{aligned}
f(x+p) &= |\sin m(x+p)| \sin n(x+p) \\
&= |\sin(mx+mp)| \sin(nx+np) \\
&= |\sin(mx+2k\pi)| \sin(nx+np) \\
&= |\sin mx| \sin(nx+np)
\end{aligned}
$$

このとき，$f(x+p) = f(x)$ が成り立つ，すなわち

$$|\sin mx| \sin(nx+np) = |\sin mx| \sin nx \quad \cdots (*)$$

任意の実数 x に対して $(*)$ が成り立つとき　$\sin(nx+np) = \sin nx$
ゆえに，np は 2π の整数倍.

ii) $np = 2l\pi$ (l は整数) のとき

$$
\begin{aligned}
f(x+p) &= |\sin m(x+p)| \sin n(x+p) \\
&= |\sin(mx+mp)| \sin(nx+np) \\
&= |\sin(mx+mp)| \sin(nx+2l\pi) \\
&= |\sin(mx+mp)| \sin nx
\end{aligned}
$$

このとき，$f(x+p) = f(x)$ が成り立つ，すなわち

$$|\sin(mx+mp)| \sin nx = |\sin mx| \sin nx \quad \cdots (**)$$

任意の実数 x に対して $(**)$ が成り立つとき

$$|\sin(mx+mp)| = |\sin mx|$$

上式に $x = 0$ を代入すると　$|\sin mp| = 0$
ゆえに，mp は π の整数倍である.
実際，mp が π の整数倍であれば，$(**)$ が成り立つ.

i)，ii) より，mp は π の整数倍であり，np は 2π の整数倍である.

(3) (2) の結果より，改めて，$mp = k\pi$，$np = 2l\pi$ とおくと (k，l は整数)

$$p = \frac{k\pi}{m} = \frac{2l\pi}{n} \quad ゆえに \quad \frac{kn}{m} = 2l$$

m と n は互いに素であるから，k は m の倍数.

ゆえに，$k = mk'$ とおくと (k' は整数)，$p = k'\pi \cdots$ ③ であるから

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x+k'\pi) \\ &= |\sin m(x+k'\pi)|\sin n(x+k'\pi) \\ &= |\sin(mx+mk'\pi)|\sin(nx+nk'\pi) \\ &= |\sin mx|(\sin nx\cos nk'\pi + \cos nx\sin nk'\pi) \\ &= (-1)^{nk'}|\sin mx|\sin nx \\ &= (-1)^{nk'}f(x) \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

i) n が偶数のとき

$k' = 1$ とすると，③，④ より　$f(x+\pi) = f(x)$

したがって，基本周期は π

ii) n が奇数のとき

$k' = 2$ とすると，③，④ より　$f(x+2\pi) = f(x)$

したがって，基本周期は 2π

よって，基本周期は，n が偶数のとき $\boldsymbol{\pi}$，n が奇数のとき $\boldsymbol{2\pi}$