平成18年度　九州大学２次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。ただし，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$であること，また，$e$は自然対数の底で，$e<3$であることを用いてよい。

(1) 自然数nに対して，方程式$\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$は$x>0$の範囲にちょうど2つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1)の2つの実数解をα_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$とするとき，

$$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\quad ne<\beta_n$$

が成り立つことを示せ。また，$\lim_{n\to\infty}\alpha_n$を求めよ。

$\boxed{2}$ $\triangle$OABにおいて，辺OBの中点をM，辺ABを$\alpha:1-\alpha$に内分する点をPとする。ただし，$0<\alpha<1$とする。線分OPとAMの交点をQとし，Qを通り，線分AMに垂直な直線が，辺OAまたはその延長と交わる点をRとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$および$\alpha$を用いて表せ。

(2) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$で$\cos\theta=\dfrac{1}{6}$とする。このとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\vec{a}$と$\alpha$を用いて表せ。

(3) (2)の条件のもとで，点Rが辺OAの中点であるときのαの値を求めよ。

$\boxed{3}$ 2つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，$a_1=b_1=1$および，関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n$$
$$b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$$

をみたすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 3$のとき，a_nは3で割り切れるが，b_nは3で割り切れないことを示せ。

(2) $n\geqq 2$のとき，a_nとb_nは互いに素であることを示せ。

4 関数

$$f(x) = \left|\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right|$$

を考える。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。さらに，$0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，

$$F(a) = \int_0^a f(x)f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,dx$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) $F(a)$ を求めよ。

5 区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは,

$$a \leqq x \leqq b \text{ ならば,} \quad a \leqq f(x) \leqq b$$

が成り立つこととする。$f(x) = 4x(1-x)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。

(2) $0 < a < b < 1$ とする。このとき，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。

解答例

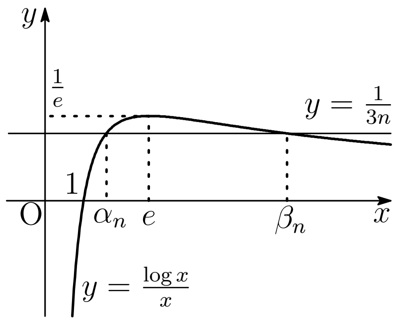
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ のとき　$x=e$

よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$



$\dfrac{1}{3n}\leqq\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{e}$ であるから，上のグラフより，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つ実数解をもつ．

(2) $n\geqq 1$ より　　$e^{\frac{1}{n}}\leqq e\leqq ne$　$\cdots$①

$f(e^{\frac{1}{n}})=\dfrac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}\geqq\dfrac{1}{ne}>\dfrac{1}{3n}>0$ であるから

$$0<\frac{1}{3n}<f(e^{\frac{1}{n}})\quad \text{ゆえに}\quad f(1)<f(\alpha_n)<f(e^{\frac{1}{n}})\quad\cdots②$$

$f(ne)=\dfrac{\log ne}{ne}>\dfrac{\log e}{3n}=\dfrac{1}{3n}$ であるから

$$f(ne)>\frac{1}{3n}\quad \text{ゆえに}\quad f(ne)>f(\beta_n)\quad\cdots③$$

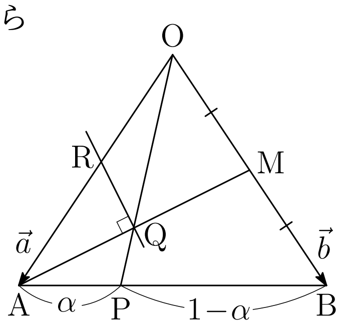
$f(x)$ は，$0<x<e$ において単調増加であり，$e<x$ において単調減少であるから，①，②，③ により

$$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\quad ne<\beta_n$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\mathbf{1}$$

2 (1) P は AB を $\alpha : 1-\alpha$ に内分する点であるから



$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}} \quad \cdots ①$$

Q は OP 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad \cdots ②$$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\{(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \alpha\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\} = s(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2s\alpha\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Q は，AM 上の点であるから

$$s(1-\alpha) + 2s\alpha = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{1}{1+\alpha} \quad \cdots ③$$

①，②，③ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{1+\alpha}\{(1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}\} = \boldsymbol{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t\vec{a}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right)\vec{a} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$

また　$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ であるから

$$\left(t - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)|\vec{a}|^2 + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}|\vec{b}|^2 = 0$$

ここで，$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{6} = 1$ であるから

$$4\left(t - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\} + \frac{9\alpha}{2(1+\alpha)} = 0$$

したがって　$t = \dfrac{1-2\alpha}{1+\alpha}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1-2\alpha}{1+\alpha}\vec{a}}$

(3) R が OA の中点であるから

$$\frac{1-2\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{2} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{\alpha = \frac{1}{5}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 数学的帰納法により示す.

「a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れない」を (A) とする.

［1］$n=3$ のとき

$$a_2 = 2{\cdot}1{\cdot}1 = 2, \qquad b_2 = 2{\cdot}1^2 + 1^2 = 3$$
$$a_3 = 2{\cdot}2{\cdot}3 = 12, \qquad b_3 = 2{\cdot}2^2 + 3^2 = 17$$

よって，$n=3$ のとき，(A) は成り立つ.

［2］$n=k$ のとき $(k \geqq 3)$，(A) が成り立つと仮定すると，

$a_k = 3M$，$b_k = 3N \pm 1$ とおけるから (M, N は整数)

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k b_k = 2{\cdot}3M{\cdot}(3N \pm 1) \\ &= 3{\cdot}2M(3N \pm 1) \\ b_{k+1} &= 2{a_k}^2 + {b_k}^2 \\ &= 2(3M)^2 + (3N \pm 1)^2 \\ &= 18M^2 + (9N^2 \pm 6N + 1) \\ &= 3(6M^2 + 3N^2 \pm 2N) + 1 \end{aligned}$$

［1］,［2］から，$n \geqq 3$ について (A) が成り立つ.

(2) $b_1 = 1$，$b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$ より，b_n は奇数. 以下を背理法により示す.

$a_2 = 2$，$b_2 = 3$ より，$2 \leqq n \leqq m$ のとき，a_n と b_n は互いに素であるが，

a_{m+1} と b_{m+1} は素数 p を約数にもつと仮定する $(p \geqq 3)$.

$a_{m+1} = 2a_m b_m$ より，次の 2 つに場合分けをする.

［1］a_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - 2{a_m}^2 = {b_m}^2$ であるから，

b_m も p で割り切れる.

［2］b_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - {b_m}^2 = 2{a_m}^2$ であるから，

a_m も p で割り切れる.

［1］,［2］より，a_m，b_m がともに p で割り切れて，仮定に反する.

よって，$n \geqq 2$ のとき，a_n，b_n は互いに素である.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=0$ より，$\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}=0$ であるから

$$\sin x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin x=0,\ 1$$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ より $\quad \boldsymbol{x=-\pi,\ 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$

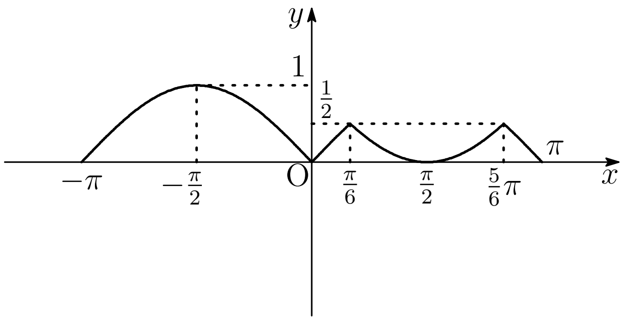
(2) i) $\sin x-\dfrac{1}{2} \geqq 0$ すなわち $\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$f(x)=\left|\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|=|\sin x-1|=1-\sin x$$

ii) $\sin x-\dfrac{1}{2} \leqq 0$ すなわち $-\pi \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$f(x)=\left|\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)-\frac{1}{2}\right|=|\sin x|$$

i)，ii) から，グラフの概形は，次のようになる．



(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x-\dfrac{\pi}{2} \leqq 0$ より，(2) の結果から

$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|=|-\cos x|=\cos x$$

上式および (2) の結果から

$$f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\sin x\cos x & (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}) \\ (1-\sin x)\cos x & (\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})\end{cases}$$

したがって

$0 \leqq a \leqq \frac{\pi}{6}$ のとき $\quad F(a)=\displaystyle\int_0^a \sin x\cos x\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{4}(1-\cos 2a)}$

$\frac{\pi}{6} \leqq a \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき $\quad F(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^a (1-\sin x)\cos\ dx$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\cos 2a+\sin a-\frac{1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)
$$f(x) = -4x^2 + 4x = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

区間 $[0,\ 1]$ において，$0 \leqq f(x) \leqq 1$ であるから，
区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変である．

(2) $f(x) = a$ の解は

$$4x(1-x) = a$$

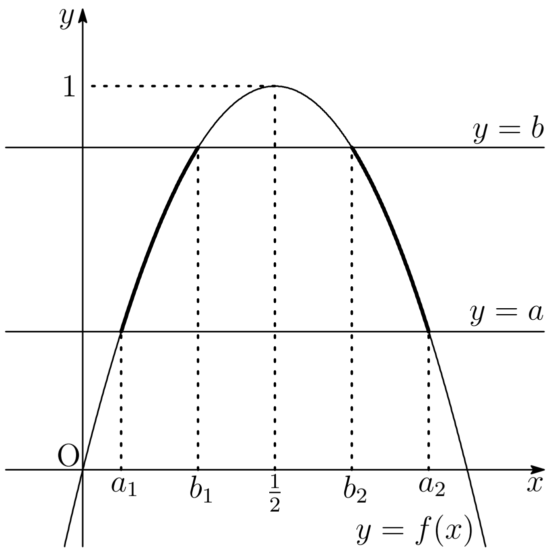
これを解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-a}}{2}$$

同様に，$f(x) = b$ の解は

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-b}}{2}$$

これらの解を



$$a_1 = \frac{1-\sqrt{1-a}}{2},\quad a_2 = \frac{1+\sqrt{1-a}}{2},$$
$$b_1 = \frac{1-\sqrt{1-b}}{2},\quad b_2 = \frac{1+\sqrt{1-b}}{2}$$

とおく．区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であると仮定すると，次の 2 つの場合に分けられる．

i) $[a,\ b] \subset [a_1,\ b_1]$　すなわち　$a_1 \leqq a < b \leqq b_1$ のとき

$b \leqq b_1$ より　$b \leqq \dfrac{1-\sqrt{1-b}}{2}$　ゆえに　$\sqrt{1-b} \leqq 1-2b$　$\cdots$①

$t = \sqrt{1-b}$ とおくと　$0 < t < 1$　$\cdots$②

① から　$t \leqq 2t^2 - 1$　ゆえに　$(t-1)(2t+1) \geqq 0$　$\cdots$③

② において，③ を満たす解はない．

ii) $[a,\ b] \subset [b_2,\ a_2]$　すなわち　$b_2 \leqq a < b \leqq a_2$ のとき

$b_2 \leqq a$ より　$\dfrac{1+\sqrt{1-b}}{2} \leqq a$　ゆえに　$\sqrt{1-b} \leqq 2a-1$　$\cdots$④

$0 < \sqrt{1-b}$ であるから　$0 < 2a-1$　すなわち　$a > \dfrac{1}{2}$

$2a-1 < 2b-1$ であるから，④ から　$\sqrt{1-b} < 2b-1$

したがって　$1-b < (2b-1)^2$　ゆえに　$b(4b-3) > 0$

$b > 0$ であるから　　$b > \dfrac{3}{4}$

④ の両辺を平方すると

$$1-b \leqq (2a-1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad b \geqq 4a-4a^2 \quad \cdots ④'$$

$b \leqq a_2$ より　$b \leqq \dfrac{1+\sqrt{1-a}}{2}$　ゆえに　$2b-1 \leqq \sqrt{1-a}$　$\cdots$⑤

⑤ の両辺を平方すると

$$(2b-1)^2 \leqq 1-a \quad \text{ゆえに} \quad -a \geqq 4b^2-4b \quad \cdots ⑤'$$

④$'$，⑤$'$ の辺々を加えると

$$b-a \geqq 4(b^2-a^2)-4(b-a) \quad \text{ゆえに} \quad 5(b-a) \geqq 4(b+a)(b-a)$$

$b-a > 0$ であるから　$5 \geqq 4(b+a)$　すなわち　$a+b \leqq \dfrac{5}{4}$

これは，$a > \dfrac{1}{2}$，$b > \dfrac{3}{4}$ に反する．

i)，ii) より，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではない．

別解 (2)

区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとき

$$a \leqq f(a),\quad f(b) \leqq b \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq 4a(1-a),\quad 4b(1-b) \leqq b$$

$0<a<b<1$ に注意して，これを解くと　$0 < a \leqq \dfrac{3}{4} \leqq b < 1 \quad \cdots ①$

① に注意して，次の 2 つの場合分けを行う．

i) $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\frac{1}{2} \in [a,\ b],\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \notin [a,\ b]$$

ii) $\dfrac{1}{2} < a \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき
区間 $[a,\ b]$ において，関数 $f(x)$ は単調減少であるから

$$f(a) \leqq b,\quad f(b) \geqq a \quad \text{ゆえに} \quad -4a^2 \leqq -4a+b,\quad 4b^2 \leqq -a+4b$$

上の 2 式の辺々を加えると　$4(b+a)(b-a) \leqq 5(b-a)$

$0<a<b<1$ より，$b-a>0$ であるから　$a+b \leqq \dfrac{5}{4}$

これは，$\dfrac{1}{2} < a$，$\dfrac{3}{4} \leqq b$ に反する．

i)，ii) より，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではない．

ロジスティック写像 (Logistic map)

区間 $[a,\ b]$ が出題された関数について不変であれば

$$x_{n+1} = f(x_n),\ a \leqq x_0 \leqq b$$

とおくと，$a \leqq x_n \leqq b$ $(n=0,1,2,\ldots)$ となる．$\{x_n\}$ の収束・発散などを調べて反例を示すことは，この関数の特殊性から不可能である．写像

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n) : 0 \leqq \lambda \leqq 4,\ 0 \leqq x_0 \leqq 1$$

をロジスティック写像といい，極めて複雑な振舞いをすることで知られている．