平成17年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

$\boxed{1}$ 直線 $\ell : y = x + a$ が曲線 $C : y = 2\sin x\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ に接しているとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq 0$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の $y \geqq 0$ の範囲にある部分を，x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。

$\boxed{2}$ 行列 A と列ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，列ベクトル $\vec{p_n}\ (n = 1, 2, \cdots)$ を

$$\vec{p_1} = \vec{a},\quad \vec{p_{n+1}} = A\vec{p_n} + \vec{b}\quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ を満たす列ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

(2) $\vec{q_n} = \vec{p_n} - \vec{p}\ (n = 1, 2, \cdots)$ とおく。$\vec{q}_{n+1}$ と $\vec{q}_n$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) $n = 1, 2, \cdots$ に対して A^n を求めよ。

(4) $\vec{p_n}\ (n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ t を実数とするとき，2次方程式

$$z^2 + tz + t = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この2次方程式が異なる2つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3) 複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，

$$w = \frac{iz}{z + 1}$$

で表される点 w が動く図形を求め，図示せよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば，$\left[\frac{3}{2}\right] = 1$，$[2] = 2$ である。このとき，$0 < \theta < \pi$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\dfrac{3}{2} + \log_2\sin\theta\right] \geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq \left[\dfrac{3}{2} + \log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 実数 t が $t \geqq 0$ の範囲を動くとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}(t^2,\ e^{-t})$ が描く曲線を C とする。a を正の実数とし，曲線 C と x 軸，y 軸および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) $a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} ae^{-a} = 0$ であることを用いてよい。

(3) $S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ。ただし，必要なら $2.5 < e < 3$ であることを用いてよい。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y = 2\sin x$ を微分すると　　$y' = 2\cos x$

$y' = 1\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を解くと　　$x = \pm\dfrac{\pi}{3}$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ における C の接線の方程式は

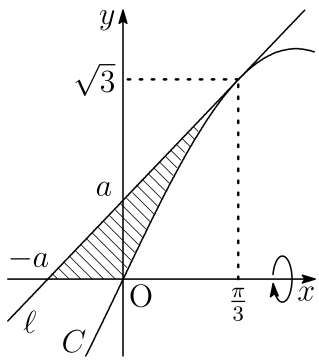
$$y - 2\sin\frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{3} \quad \text{すなわち} \quad y = x + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$x = -\dfrac{\pi}{3}$ における C の接線の方程式は

$$y - 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = x + \frac{\pi}{3} \quad \text{すなわち} \quad y = x - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

$a > 0$ であるから　　$\boldsymbol{a = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}}$

(2) 求める立体の体積を V とすると



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\cdot\pi(\sqrt{3})^2\cdot\left(\frac{\pi}{3} + a\right) - \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x)^2\,dx \\ &= \sqrt{3}\pi - 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1 - \cos 2x)\,dx \\ &= \sqrt{3}\pi - 2\pi\Big[\,x - \frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi - \frac{2}{3}\pi^2} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\vec{p}=A\vec{p}+\vec{b}$ より　$(E-A)\vec{p}=\vec{b}$

$E-A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ は正則であり，$(E-A)^{-1}=2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

よって　$\vec{p}=(E-A)^{-1}\vec{b}=2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$

(2) $\vec{p}_{n+1}=A\vec{p}_n+\vec{b}$，$\vec{p}=A\vec{p}+\vec{b}$ より　　$\vec{p}_{n+1}-\vec{p}=A(\vec{p}_n-\vec{p})$

$\vec{q}_n=\vec{p}_n-\vec{p}$ により　　$\boldsymbol{\vec{q}_{n+1}=A\vec{q}_n}$

(3) $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ にハミルトン・ケーリーの定理を適用すると

$$A^2-A+\frac{1}{4}E=O\quad\text{すなわち}\quad\left(A-\frac{1}{2}E\right)^2=O$$

ここで，$B=A-\dfrac{1}{2}E=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ とおくと　$B^2=O$

$A=\dfrac{1}{2}E+B$ であるから

$$\begin{aligned}A^n&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}E\right)^{n-k}B^k\\&=\frac{1}{2^n}E+\frac{n}{2^{n-1}}B+B^2\sum_{k=2}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}E\right)^{n-k}B^{k-2}\\&=\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{n}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

(4) (2) より　　$\vec{q}_n=A^{n-1}\vec{q}_1$

$\vec{q}_1=\vec{p}_1-\vec{p}=\vec{a}-\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ であるから

$$\vec{q}_n=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}1&n-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}-2n+1\\-2\end{pmatrix}$$

よって　　$\vec{p}_n=\vec{q}_n+\vec{p}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix}2^n-2n+1\\2^n-2\end{pmatrix}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2次方程式 $z^2+tz+t=0\cdots$ ① が異なる2つの虚数解をもつとき，$D<0$ であるから

$$t^2-4\cdot1\cdot t<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{0<t<4}$$

このとき，方程式 ① の解は $\boldsymbol{z=\dfrac{-t\pm\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}}$

(2) $z=z(t)$ とおくと，解と係数の関係により　$z+\overline{z}=-t$，$z\overline{z}=t$

上の2式から t を消去すると

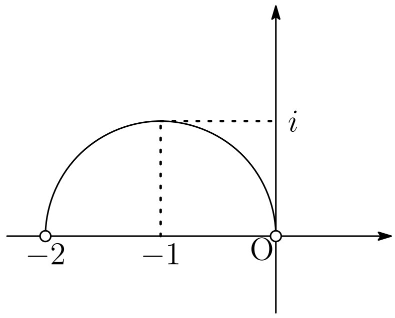
$$z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$

$$(z+1)(\overline{z}+1)=1$$

したがって　$|z+1|^2=1$

よって　$|z+1|=1$

ゆえに，$z(t)$ は，-1 を中心とする半径1の円周上で，虚部が正である点である．

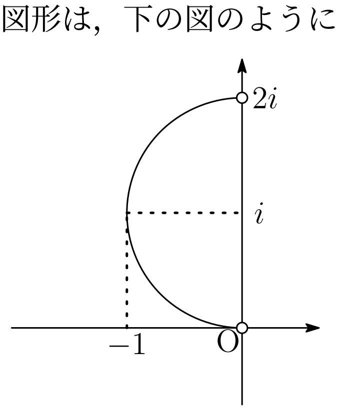


よって，$z(t)$ が描く図形 C は，右の図のようになる．

(3) (2) の結果から，$z=-1+(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(0^\circ<\theta<180^\circ)$

$$\begin{aligned} w&=\frac{iz}{z+1}=\frac{i\{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)\}}{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)+1}\\ &=\frac{-i+i(\cos\theta+i\sin\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta}\\ &=-i\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\ &=(\cos270^\circ+i\sin270^\circ)\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\ &=i+\cos(270^\circ-\theta)+i\sin(270^\circ-\theta) \qquad (90^\circ<270^\circ-\theta<270^\circ)\end{aligned}$$

よって，w が描く図形は，下の図のようになる．



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 1$ より　$\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 2$

したがって　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 2$

ゆえに　$\dfrac{5}{2}+\cos\theta < 3$　すなわち　$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$

$0<\theta<\pi$ より　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < \theta < \pi}$

(2) $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right] \geqq 1$ より

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\sin\theta \geqq \log_2\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0<\theta<\pi$ より　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi}$

(3) $\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{5}{2}+\cos\theta \leqq \dfrac{7}{2} \cdots$ ① であるから　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]=1,\ 2,\ 3$ より

$$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=0,\ 1,\ \log_2 3$$

$\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta \leqq \dfrac{3}{2} \cdots$ ② であるから　$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right] \leqq 1$

与えられた不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ から

$$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=0,\ 1 \quad \text{ゆえに} \quad \left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1,\ 2$$

上式について，次の 2 つに場合分けをする．

[1] $\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]=1$ のとき，① に注意して

$$\frac{3}{2} \leqq \frac{5}{2}+\cos\theta < 2 \quad \text{ゆえに} \quad -1 \leqq \cos\theta < -\frac{1}{2}$$

$0<\theta<\pi$ より　$\dfrac{2}{3}\pi < \theta < \pi \quad \cdots$ ③

与えられた不等式から　$0 \leqq \left[\dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\right] \leqq 1$

② に注意して　$0 \leqq \dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta \leqq \dfrac{3}{2}$

$-\dfrac{3}{2} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq 0$

ゆえに　$\log_2 \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq \log_2 1$

したがって　$\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq \sin\theta \leqq 1$

$0 < \theta < \pi$ より　$\alpha \leqq \theta \leqq \pi - \alpha \quad \cdots ④$

$\sin\dfrac{2}{3}\pi > \sin(\pi - \alpha)$ であるから $\dfrac{2}{3}\pi < \pi - \alpha$ に注意して,

③，④ の共通範囲を求めると

$$\frac{2}{3}\pi < \theta \leqq \pi - \alpha$$

[2]　$\left[\dfrac{5}{2} + \cos\theta\right] = 2$ のとき

$2 \leqq \dfrac{5}{2} + \cos\theta < 3$　ゆえに　$-\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta < \dfrac{1}{2}$

$0 < \theta < \pi$ より　$\dfrac{\pi}{3} < \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi \quad \cdots ⑤$

与えられた不等式から　$\left[\dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\right] = 1$

② に注意して　$1 \leqq \dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta \leqq \dfrac{3}{2}$

$-\dfrac{1}{2} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq 0$

ゆえに　$\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq \log_2 1$

したがって　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\theta \leqq 1$

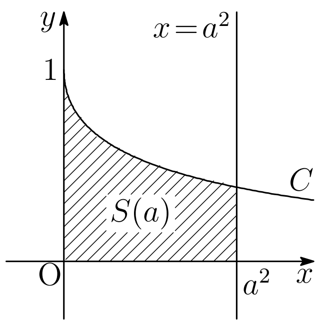
$0 < \theta < \pi$ より　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi \quad \cdots ⑥$

⑤，⑥ の共通範囲を求めると

$$\frac{\pi}{3} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$$

求める θ の値の範囲は, [1] または [2] であるから　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < \theta \leqq \pi - \alpha}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = e^{-t} \end{cases}$ $(t \geqq 0)$ より，$y \geqq 0$ であるから

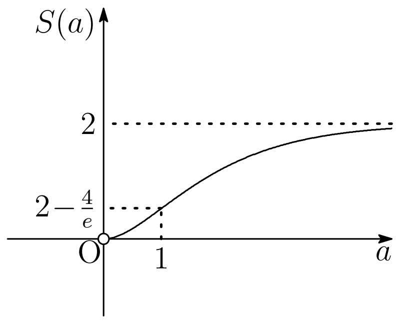


$$
\begin{aligned}
S(a) &= \int_0^{a^2} y\,dx = \int_0^a e^{-t}\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^a e^{-t}\cdot 2t\,dt = 2\int_0^a te^{-t}\,dt \\
&= -2\Big[\ (t+1)e^{-t}\ \Big]_0^a \\
&= \boldsymbol{-2(a+1)e^{-a}+2}
\end{aligned}
$$

(2) $S'(a) = 2ae^{-a}$，$S''(a) = 2(1-a)e^{-a}$

$S(a)$ の増減，凹凸は下の表のようなる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	$+$	$+$
$S''(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$	0	⤴	変曲点	⤵



また，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(a+1)e^{-a} = 0$ であるから

$$\lim_{a\to\infty} S(a) = 2$$

よって，$S(a)$ のグラフは，右の図のようになる。

(3) $\dfrac{5}{2} < e < 3$ であるから

$$
\begin{aligned}
S(2) &= 2(1-3e^{-2}) = 2\left(1-\frac{3}{e^2}\right) < 2\left(1-\frac{3}{3^2}\right) = \frac{4}{3} < 1.35 \\
S(3) &= 2(1-4e^{-3}) = 2\left(1-\frac{4}{e^3}\right) > 2\left\{1-4\left(\frac{2}{5}\right)^3\right\} = \frac{186}{125} > 1.35
\end{aligned}
$$

したがって　　$S(2) < 1.35 < S(3)$

よって，中間値の定理により，$S(a) = 1.35$ を満たす a が $2 < a < 3$ の範囲に存在する．