平成16年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $n=1,2,\cdots$ に対して

$$I_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx$$

とおく。ただし，$0!=1$ とする。

(1) I_0 の値を求め，$n=1,2,\cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また，これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2次の正方行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ。ただし，a，b は定数とする。

(1) $(a+b)^4$，$(a-b)^4$ を展開せよ。

(2) A^4 を $(a+b)^4$，$(a-b)^4$ を用いて表せ。

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ。

(4) $0<a<1$ とし $b=1-a$ としたときの A^n の $(1,\ 1)$ 成分を x_n とする。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x(t)=\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ y(t)=\cos(2t) \end{cases}\qquad(0\leqq t<2\pi)$$

で与えられているとし，この点の軌跡を C とする。

(1) P が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。

(2) C が x 軸，y 軸に関して対称であることを示せ。

(3) C の概形を描け。

(4) C が囲む図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad x \geqq y, \quad 0 \leqq z \leqq 1$$

を考え，その xy 平面内の面を S，xz 平面内の面を T とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし，点 A，B は原点 O とは異なるとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。ただし，点 O，A，B，C は同一平面上にないとする。

(3) 点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする。このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A，B の位置をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ n を 3 以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる。これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れたあと，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1) 赤青 $\cdots$ 青，赤赤青 $\cdots$ 青，$\cdots$ のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3) 色の変化がちょうど m 回 $(0 \leqq m \leqq n-1)$ 起きる確率を求めよ。

(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $I_0=\dfrac{(-1)^0}{0!}\displaystyle\int_0^2 x^0e^x\,dx=\int_0^2 e^x\,dx=\Big[\,e^x\,\Big]_0^2=\boldsymbol{e^2-1}$

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^ne^x\,dx=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n(e^x)'\,dx\\&=\frac{(-1)^n}{n!}\Big[\,x^ne^x\,\Big]_0^2-\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2(x^n)'e^x\,dx\\&=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot2^ne^2+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^2 x^{n-1}e^x\,dx=\frac{(-1)^n2^ne^2}{n!}+I_{n-1}\end{aligned}$$

ゆえに　$\boldsymbol{I_n-I_{n-1}=\dfrac{(-1)^n2^ne^2}{n!}}$　$\cdots(*)$

したがって　$I_3=I_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^n2^ne^2}{n!}$

$$=(e^2-1)+\frac{-2e^2}{1!}+\frac{4e^2}{2!}+\frac{-8e^2}{3!}=\boldsymbol{-\frac{1}{3}e^2-1}$$

(2) $0\leqq x\leqq 2$ において，$x^ne^x\leqq x^ne^2$ であるから $(n=1,2,\cdots)$

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^x\,dx\leqq\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^2\,dx=\frac{e^2}{(n+1)!}\Big[\,x^{n+1}\,\Big]_0^2=\frac{e^22^{n+1}}{(n+1)!}\quad\cdots①$$

$n\geqq 2$ のとき　$\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{2\cdot2}{1\cdot2}\times\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdots\dfrac{2}{n+1}\leqq 2\times\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{2}{3}=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　$\cdots②$

$n=1$ のとき ② は等号が成り立つので，② は $n\geqq 1$ について成り立つ．

①，② より　$\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x\,dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$　$(n=1,2,\cdots)$

(3) $(*)$ より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(I_k-I_{k-1})=e^2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}$　ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}=\frac{I_n-I_0}{e^2}$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}=1+\frac{I_n-I_0}{e^2}=\frac{I_n}{e^2}+\frac{1}{e^2}$　$\cdots③$

(2) の結果から　$|I_n|\leqq 2e^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　$(n=1,2,\cdots)$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$　$\cdots④$

③，④ により　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}=\frac{1}{e^2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\boldsymbol{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$

$\boldsymbol{(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4}$

(2) A の固有方程式は　$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0$

A の固有値を $\alpha = a+b,\ \beta = a-b$ とおき，次の 2 つに場合分けをする．

i) $\alpha \neq \beta$　すなわち　$b \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} F &= \frac{A-\beta E}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{1}{2b}\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - (a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ G &= \frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha} \\ &= \frac{1}{-2b}\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - (a+b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このとき　$F^2 = F,\ G^2 = G,\ FG = GF = O,\ A = \alpha F + \beta G \quad \cdots (*)$

したがって　　$A^4 = \alpha^4 F + \beta^4 G$

よって　$A^4 = (a+b)^4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (a-b)^4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \cdots ①$

ii) $\alpha = \beta$　すなわち　$b = 0$ のとき

$A = aE$ であるから　$A^4 = a^4E$

i)，ii) より，$b = 0$ のときも ① は成り立つので

$$\boldsymbol{A^4 = (a+b)^4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (a-b)^4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(3) $(*)$ および $b = 0\ (A = aE)$ のとき次式が成り立つことから

$$\boldsymbol{A^n = (a+b)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (a-b)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(4) (3) の結果から　$x_n = \dfrac{1}{2}(a+b)^n + \dfrac{1}{2}(a-b)^n$

$b = 1 - a$ より　$a + b = 1,\ a - b = 2a - 1$

$0 < a < 1$ より　$-1 < 2a - 1 < 1$　ゆえに　$-1 < a - b < 1$

よって　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}}$

スペクトル分解

固有値と固有ベクトルの考え方が本質にあるので，このことについて簡単にまとめておく．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A\vec{p} = \lambda\vec{p} \quad \cdots ①$$

を満たすベクトル $\vec{p}$ $(\vec{p} \neq \vec{0})$，スカラー λ が存在するとき，$\vec{p}$ を A の**固有ベクトル**，λ を A の**固有値**という．

① より $(A - \lambda E)\vec{p} = \vec{0}$ となり，$\vec{p} \neq \vec{0}$ であるから

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

は逆行列をもたないので

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

すなわち　$$\boldsymbol{\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0} \quad \cdots ②$$

が成り立つ．② を A の**固有方程式**という．② の解を α，β とし，$\lambda = \alpha$ に対する固有ベクトルを $\vec{u}$，$\lambda = \beta$ に対する固有ベクトルを $\vec{v}$ とすると

$$A\vec{u} = \alpha\vec{u} \quad \cdots ③$$
$$A\vec{v} = \beta\vec{v} \quad \cdots ④$$

このとき，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{\alpha \neq \beta} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\vec{u}} \not\parallel \boldsymbol{\vec{v}} \qquad \cdots (*)$$

証明 $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ と仮定すると，零でないスカラー k を用いて $\vec{v} = k\vec{u}$ と表すことがきるので，これを ④ に代入すると

$$A(k\vec{u}) = \beta(k\vec{u})$$

$k \neq 0$ より　$$A\vec{u} = \beta\vec{u} \quad \cdots ⑤$$

③，⑤ から，$(\alpha - \beta)\vec{u} = \vec{0}$ を得る．これは，$\alpha \neq \beta$，$\vec{u} \neq \vec{0}$ に反するので，$(*)$ が成り立つ．　**証終**

行列 A が異なる2つの固有値 α，β をもつとき，固有値 α に対する固有ベクトルを $\vec{u}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$，固有値 β に対する固有ベクトルを $\vec{v}$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ とする．

このとき，2つの1次変換を表す行列 F，G を

$$F\vec{u} = \vec{u}, \quad F\vec{v} = \vec{0}, \quad G\vec{u} = \vec{0}, \quad G\vec{v} = \vec{v}$$

で定義すると，次が成り立つ．

$$F^2 = F, \quad G^2 = G, \quad FG = GF = O, \quad F + G = E, \quad A = \alpha F + \beta G$$

証明 $P = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$ とおくと，$\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ であるから，行列 P は正則である．

$$FP = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}, \ F^2P = F(FP) = F\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}$$

よって，$F^2P = FP$ であり，P は正則であるから　$F^2 = F$ ■

$$FGP = F(GP) = F\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix}$$

よって，$FGP = O$ であり，P は正則であるから　$FG = O$ ■

同様にして　$G^2 = G$，$GF = O$ ■

$$(F+G)P = FP + GP = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$$

よって，$(F+G)P = P$ であり，P は正則であるから　$F + G = E$ ■

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} \alpha\vec{u} & \beta\vec{v} \end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} \\ &= \alpha FP + \beta GP \\ &= (\alpha F + \beta G)P \end{aligned}$$

上式から，P は正則であるから，$A = \alpha F + \beta G$ ■　　**証終**

$\boldsymbol{A = \alpha F + \beta G}$ を A の**スペクトル分解**といい，この式の両辺を n 乗すると

$$\boldsymbol{A^n = \alpha^n F + \beta^n G}$$

なお，F，G は，$\alpha F + \beta G = A$，$F + G = E$ により

$$F = \frac{A - \beta E}{\alpha - \beta}, \qquad G = \frac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}$$

となり，$A = \alpha F + \beta G$ $(\alpha, \beta$は A の固有値$)$ をみたす F，G は一意的に定まる．

2007 東京大学 (理系) 前期

以下の問いに答えよ.

(1) 実数 a に対し，2 次の正方行列 A，P，Q が，5 つの条件

$A = aP + (a+1)Q$，$P^2 = P$，$Q^2 = Q$，$PQ = O$，$QP = O$ をみたすとする．ただし，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．このとき，$(P+Q)A = A$ が成り立つことを示せ.

(2) a は正の数として，行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ を考える．この A に対し，(1) の 5 つの条件をみたす行列 P，Q を求めよ.

(3) n を 2 以上の整数とし，$2 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 k に対して

$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$ とおく．行列の積 $A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2$ を求めよ.

A の固有方程式 $\lambda^2 - (2a+1)\lambda + a(a+1) = 0$ から，a，$a+1$ は A の固有値である．P，Q の条件から，$A = aP + (a+1)Q$ は A のスペクトル分解である.

解答 (1)
$$\begin{aligned}(P+Q)A &= (P+Q)\{aP + (a+1)Q\} \\ &= aP^2 + (a+1)PQ + aQP + (a+1)Q^2 \\ &= aP + (a+1)Q\end{aligned}$$

よって　$(P+Q)A = A$

(2) $\det A = a(a+1) > 0$ より，A は正則であるから，(1) の結果の両辺に A^{-1} を右から掛けると　$P + Q = E$

上式と $A = aP + (a+1)Q$ から　$P = -A + (a+1)E$，$Q = A - aE$

ゆえに　$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

P，Q は (1) の 5 つの条件をみたす.

(3) $k \geqq 2 > 0$ より (2) において $a = k$ とおくと　$A_k = kP + (k+1)Q$

P，Q の性質に注意して

$$\begin{aligned}&A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2 \\ =&n(n-1)(n-2)\cdots 2P + (n+1)n(n-1)\cdots 3Q \\ =&n!P + \frac{1}{2}n!Q = \begin{pmatrix} n! & 0 \\ \frac{1}{2}(n-1)n! & \frac{1}{2}n! \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) P が原点を通るとき，$x(t)=0$，$y(t)=0$ より

$$\begin{cases}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos(2t)=0\end{cases}\quad(0\leqq t<2\pi)\quad \text{これを解いて}\quad t=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

$x'(t)=-\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$，$y'(t)=-2\sin(2t)$ より

$$\begin{cases}x'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1\\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\end{cases}\quad \text{および}\quad \begin{cases}x'\left(\frac{5}{4}\pi\right)=1\\ y'\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-2\end{cases}$$

求める速度ベクトルは　$\boldsymbol{t=\frac{\pi}{4}}$ **のとき** $\mathbf{(-1,-2)}$，$\boldsymbol{t=\frac{5}{4}\pi}$ **のとき** $\mathbf{(1,-2)}$

(2) $t=t_1$ $(0\leqq t_1<2\pi)$ における C 上の点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ と x 軸および y 軸に関して対称な点をそれぞれ $\mathrm{Q}(x_1,-y_1)$，$\mathrm{R}(-x_1,\ y_1)$ とすると

$$\begin{aligned}x_1&=\cos\left(t_1+\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left\{\left(\tfrac{3}{2}\pi-t_1\right)+\tfrac{\pi}{4}\right\}\\ -y_1&=-\cos 2t_1=\cos 2\left(\tfrac{3}{2}\pi-t_1\right)\\ -x_1&=-\cos\left(t_1+\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left\{(t_1+\pi)+\tfrac{\pi}{4}\right\}\\ y_1&=\cos 2t_1=\cos 2\left(t_1+\pi\right)\end{aligned}$$

したがって，Q は $0\leqq t_1\leqq\frac{3}{2}\pi$ のとき, $t=\frac{3}{2}\pi-t_1$ における C 上の点であり，$\frac{3}{2}\pi<t_1<2\pi$ のとき $t=\frac{7}{2}\pi-t_1$ における C 上の点である.
また，R は $0\leqq t_1<\pi$ のとき, $t=t_1+\pi$ における C 上の点であり，$\pi\leqq t_1<2\pi$ のとき $t=t_1-\pi$ における C 上の点である.

(3) $x=\cos(t+\frac{\pi}{4})$，$y=\cos(2t)$ とおくと

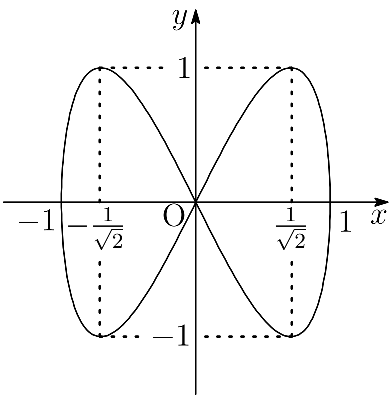
$$y=\cos 2t=\sin 2\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)=\pm 2x\sqrt{1-x^2}$$

$y=2x\sqrt{1-x^2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ のとき

$$y'=\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

増減表は，次のようになる.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

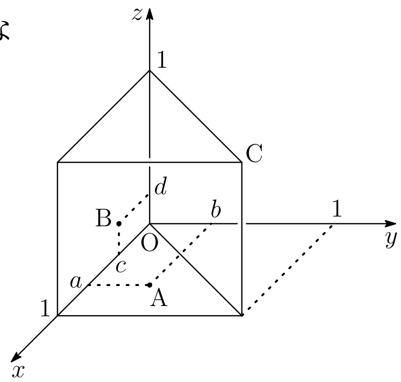


(2) の結果から，C の概形は右の図のようになる.

(4) 求める面積 S は　$S=4\displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx=4\Big[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\mathbf{\frac{8}{3}}$

補足 (2) は，$\frac{\pi}{4}$ ごとに動点 P の位置を調べると，動点 Q，R の取り方がわかる.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ 0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 1,\ 1)$ に垂直なベクトルの1つを



$$\vec{n}=(b, -a,\ a-b)$$

とすると

$$|\vec{n}|=\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}$$

求める単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e}=\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\pm\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}(b, -a,\ a-b)}$$

ゆえに　$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\pm\dfrac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}$

$bc\geqq 0$, $a-b\geqq 0$, $d\geqq 0$ であるから　$|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\boldsymbol{\dfrac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}}$

(2) $\triangle$OAC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}$$

四面体OABCにおいて $\triangle$OAC を底面とすると，高さは $|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから

求める四面体の体積 V は　$V=\dfrac{1}{3}S\times|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\boldsymbol{\dfrac{bc+(a-b)d}{6}}$

(3) $0\leqq b\leqq a\leqq 1$, $0\leqq c\leqq 1$, $0\leqq d\leqq 1$ であるから，(2) の結果より

i) $b>0$, $a-b>0$ のとき　$V\leqq\dfrac{b\cdot 1+(a-b)\cdot 1}{6}=\dfrac{a}{6}\leqq\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V\leqq\dfrac{1}{6}$　(等号は $a=1,\ 0<b<1,\ c=1,\ d=1$ のとき)

ii) $b=0$ のとき　$V=\dfrac{ad}{6}\leqq\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V\leqq\dfrac{1}{6}$　(等号は $a=1,\ 0\leqq c\leqq 1,\ d=1$ のとき)

iii) $a-b=0$ のとき　$V=\dfrac{bc}{6}\leqq\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V\leqq\dfrac{1}{6}$　(等号は $b=c=1,\ 0\leqq d\leqq 1$ のとき)

よって，V の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ で，そのときのA，Bは次の3組である．

$$\mathbf{A(1,\ \boldsymbol{b},\ 0),\ B(1,\ 0,\ 1)\quad (0<\boldsymbol{b}<1)}$$
$$\mathbf{A(1,\ 0,\ 0),\ B(\boldsymbol{c},\ 0,\ 1)\quad (0\leqq \boldsymbol{c}\leqq 1)}$$
$$\mathbf{A(1,\ 1,\ 0),\ B(1,\ 0,\ \boldsymbol{d})\quad (0\leqq \boldsymbol{d}\leqq 1)}$$

ベクトル積

2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表し，その成分は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned} |\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 \\ &= ({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \end{aligned}$$

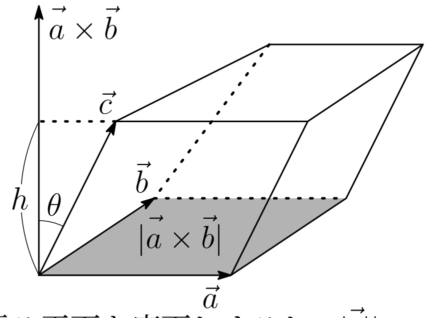
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

補足 本題 (2) で，$\vec{a}=(a,\ b,\ 0)$，$\vec{b}=(c,\ 0,\ d)$，$\vec{c}=(1,1,1)$ とすると

$$\vec{a}\times\vec{c}=(b,-a,\ a-b),\quad (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=bc+(a-b)d$$

よって，四面体の体積 V は　$V=\dfrac{1}{6}|bc+(a-b)d|$

2010 東京大学 (理系) 前期

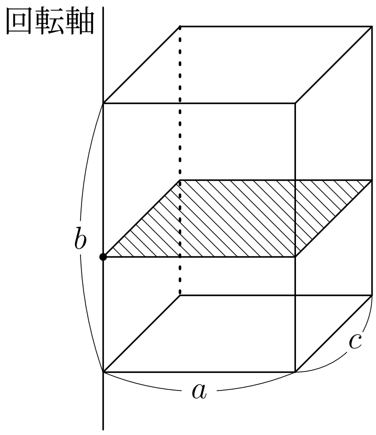
3辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の1辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする．

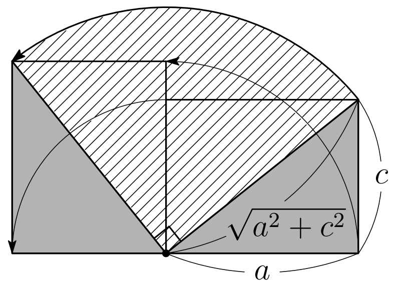
(1) V の体積を a，b，c を用いて表せ．

(2) $a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ．

解答 (1) 下の図から，求める体積 V は

$$V=\left(\frac{\pi}{4}(\sqrt{a^2+c^2})^2+2\times\frac{1}{2}ac\right)b=\boldsymbol{\left\{\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\}b}$$





(2) (V は a，c に関する対称式であるから，a と c をまとめて扱う)

$a^2+c^2=\dfrac{1}{2}\{(a+c)^2+(a-c)^2\}$，　$ac=\dfrac{1}{4}\{(a+c)^2-(a-c)^2\}$ より

$$V=\left\{\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)(a+c)^2+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)(a-c)^2\right\}b$$

$a+b+c=1$ より $a+c=1-b$ となり，$t=a-c$ とおくと

上の2式より　　$2a=(1-b)+t$，$2c=(1-b)-t$

$a>0$，$c>0$ より　　$-(1-b)<t<1-b$

このとき，$0\leqq(a-c)^2<(1-b)^2$ であるから，固定値 b に対して

$$\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)b(1-b)^2\leqq V<\left\{\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)(1-b)^2+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)(1-b)^2\right\}b$$

すなわち　　$\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}\right)b(1-b)^2\leqq V<\dfrac{\pi}{4}b(1-b)^2$

$0<b<1$ において，$0<b(1-b)^2\leqq\dfrac{4}{27}$ となり　　$\boldsymbol{0<V<\dfrac{\pi}{27}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 起こりうる場合の総数は　2^n (通り)

(1) 左端が赤色で，色の変化がちょうど1回起きる場合は，次の $n-1$ 通り．

「赤青青 $\cdots$ 青」,「赤赤青 $\cdots$ 青」,$\cdots$,「赤赤 $\cdots$ 赤青」

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{n-1}{2^n}}$

(2) 色の変化が1回も起きない場合は，次の2通り

「赤赤 $\cdots$ 赤赤」,「青青 $\cdots$ 青青」

色の変化が1回だけ起きる場合は，(1) の左端が赤である場合と，同様に左端が青である場合の $(n-1)\times 2$ 通りである．

したがって，色の変化が1回以下である確率は　$\dfrac{2+(n-1)\times 2}{2^n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$\boldsymbol{1-\dfrac{n}{2^{n-1}}}$

(3) 左端が赤色か青色の2通りに対して，色の変化が2個目，3個目，$\cdots$，n 個目の $n-1$ 個の電球の中から変化する電球 m 個を選ぶ場合の数は

$$2\times {}_{n-1}\mathrm{C}_m\ (\text{通り})$$

求める確率を $P(m)$ とすると $(0\leqq m\leqq n-1)$

$$P(m)=\frac{2\times {}_{n-1}\mathrm{C}_m}{2^n}=\boldsymbol{\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_m}{2^{n-1}}}$$

(4) 求める期待値を E とすると，(3) の結果から

$$E=\sum_{m=0}^{n-1}m\cdot P(m)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=0}^{n-1}m\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_m=\frac{1}{2^{n-1}}\times(n-1)\cdot 2^{n-2}=\boldsymbol{\frac{n-1}{2}}$$

補足

$$\sum_{k=0}^{n}k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=1}^{n}k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=n\cdot 2^{n-1}$$