平成15年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，農学部)

$\boxed{1}$～$\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$～$\boxed{6}$ から1題選択，$\boxed{7}$～$\boxed{9}$ から1題選択

$\boxed{1}$ xy 平面上で，　$x = r(t)\cos t,\ \ y = r(t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$
で表される曲線を C とする。

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ。

(2) 一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t\, dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right) dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積は $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t\, dt$ と表せることを示せ。

$\boxed{2}$ 座標平面上で，不等式　$2|x-4| + |y-5| \leqq 3,\quad 2\Big||x|-4\Big| + \Big||y|-5\Big| \leqq 3$
が表す領域を，それぞれ A，B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x |y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが1である正方形(周は含まない)を単位正方形と呼ぶことにする。p，n を自然数とし，領域

$$D_n = \{(x,\ y) \mid 0 \leqq x,\ x^p \leqq y \leqq n\}$$

を考え，その面積を S_n とする。L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1) グラフ $y = x^p$ $(0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}})$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また，面積 S_n を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 空間内に四面体 OABC があり，$\angle$AOB，$\angle$BOC，$\angle$COA はすべて 90° であるとする。辺 OA，OB，OC の長さを，それぞれ a，b，c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle$OGA，$\angle$OGB，$\angle$OGC がすべて 90° であるための条件を a，b，c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ $0 < a < 1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を ℓ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が ℓ 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2) 直線 ℓ を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 座標平面上に $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$ を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて，$y \leqq x(a-x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし，$0 < a \leqq 2$ とする。

(1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。

(2) 1 回目は $a = \dfrac{1}{2}$，2 回目は $a = \dfrac{3}{2}$ として，ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。

(3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であり，当たりの数の期待値が $\dfrac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 座標平面上に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ があり，P は $|a| \leqq \dfrac{1}{2}$，$|b| \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動く。また，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標は連立１次方程式 $AX = B$ の解になっている。

ただし，　$A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}$　である。

(1) 点 P が原点 O にあるときの点 Q の位置を点 R とする。$\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ のとき，$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}$ の最大値を求め，その最大値を与える点 P の全体を図示せよ。

(2) OQ の最小値と，その最小値を与える点 P の座標を求めよ。

$\boxed{\mathbf{8}}$ θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2 > 4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ に引いた二つの接線の接点を Q，R とし，接線 PQ，PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle\mathrm{QPR} = \theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1) $m_1 < 0 < m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2) G を数式で表せ。

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。

$\boxed{\mathbf{9}}$ n を２以上の自然数とする。数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}$ で与えられている。

(1) 不等式　$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$　が成り立つことを示せ。

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおく。数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ。

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log_n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ。

解答例

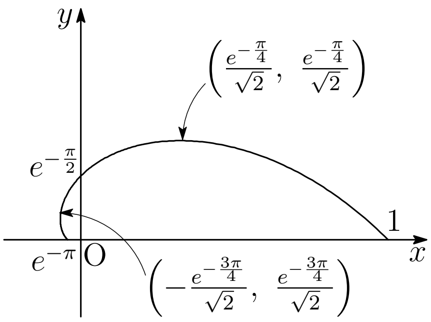
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$ を t で微分すると

$$x'=-e^{-t}(\sin t+\cos t)=-\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$y'=-e^{-t}(\sin t-\cos t)=-\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

x, y の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
x'		$-$	0	$+$	
x	1	$\searrow$	$-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$-e^{-\pi}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0



x は $t=\frac{3\pi}{4}$ で最小値 $\boldsymbol{-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$ をとり，y は $t=\frac{\pi}{4}$ で最大値 $\boldsymbol{\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$ をとる．

したがって，C の概形は右の図のようになる．

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^2r'(t)\sin^2t\cos t\,dt &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{(r(t))^3\}'\sin^2t\cos t\,dt\\ &= \frac{1}{3}\Big[\ \{r(t)\}^3\sin^2t\cos t\ \Big]_0^{\pi}\\ &\qquad -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3(\sin^2t\cos t)'\,dt\\ &= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3(2\sin t\cos^2t-\sin^3t)\,dt\\ &= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\{2\sin t(1-\sin^2t)-\sin^3t\}\,dt\\ &= \int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\left(\sin^3t-\frac{2}{3}\sin t\right)dt\end{aligned}$$

(3) $y_1 = e^{-t}\sin t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $y_2 = e^{-t}\sin t \quad \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq t \leqq \pi\right)$,

$\alpha = -\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$, $\beta = e^{-\pi}$ とおくと

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{\alpha}^{1} {y_1}^2\,dx - \pi\int_{\alpha}^{\beta} {y_2}^2\,dx \\
&= \pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} y^2\frac{dx}{dt}\cdot dt - \pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} y^2\frac{dx}{dt}\cdot dt \\
&= -\pi\int_0^{\pi} y^2\frac{dx}{dt}dt = -\int_0^{\pi}(r(t)\sin t)^2\{r(t)\cos t\}'dt \\
&= -\pi\int_0^{\pi}(r(t))^2\sin^2 t\cdot\{r'(t)\cos t - r(t)\sin t\}\,dt \\
&= -\pi\int_0^{\pi}(r(t))^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt + \pi\int_0^{\pi}(r(t))^3\sin^3 t\,dt
\end{aligned}$$

これに (2) の等式を適用すると

$$\begin{aligned}
V &= -\pi\int_0^{\pi}(r(t))^3\left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right)dt + \pi\int_0^{\pi}(r(t))^3\sin^3 t\,dt \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(r(t))^3\sin t\,dt = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t\,dt
\end{aligned}$$

極方程式による曲線の回転体の体積

極方程式 $r = r(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線を x 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

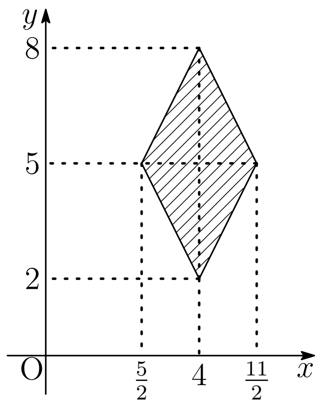
$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\{r(\theta)\}^3\sin\theta\,d\theta}$$

2009 京都大学 (理系) 前期

xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式 $r = 2+\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ により表される曲線を C とする．C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

解答 $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \dfrac{2\pi}{3}\left[\ -\dfrac{1}{4}(2+\cos\theta)^4\ \right]_0^{\pi} = \dfrac{40}{3}\pi$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 不等式 $2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域は，4 点 $(\frac{3}{2},\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(-\frac{3}{2},\ 0)$，$(0, -3)$ を頂点とする四角形の周およびその内部である．
不等式 $2|x-4|+|y-5| \leqq 3$ の表す領域 A は，$2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものであるから，A の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



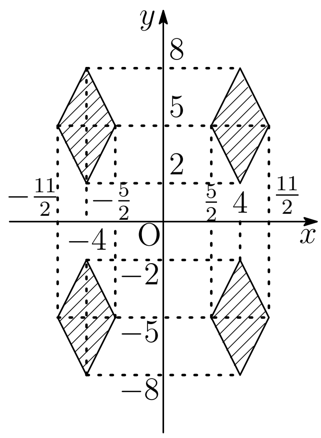
(2) $f(x,\ y)=2|x-4|+|y-5|$，$g(x,\ y)=2\Big||x|-4\Big|+\Big||y|-5\Big|$ とおく．
$f(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域 A の点 $(x_1,\ y_1)$ は，(1) の結果から $x_1>0$，$y_1>0$ であり，$g(x,\ y)=f(|x|,\ |y|)$ が成り立つから

$$g(\pm x_1, \pm y_1)=f(x_1,\ y_1) \leqq 3$$

$g(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域は B であるから

$$(x_1,\ y_1) \in A \quad \Longrightarrow \quad (\pm x_1, \pm y_1) \in B$$

したがって，B の表す領域は，A および A を x 軸，y 軸，原点に関して対称移動したものである．よって，B の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



(3) x，$|y|$ は正の整数であるから，領域 B 内の点において，これを満たす $(x,\ |y|)$ の組は，次のとおりである．

$$\begin{aligned}(x,\ |y|)=&(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\\ &(4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7),\ (4,\ 8),\\ &(5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6)\end{aligned}$$

$\log_x |y| = \dfrac{m}{n}$ (m，n は整数) とおくと

$$x^{\frac{m}{n}}=|y| \quad \text{ゆえに} \quad x^m=|y|^n \quad \cdots①$$

素因数分解の一意性により，① を満たすものは

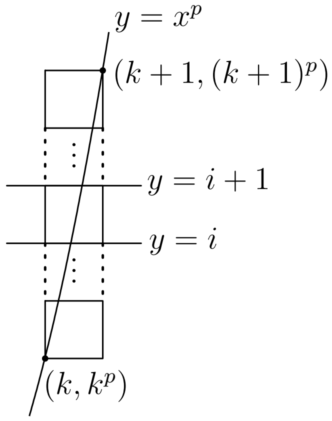
$$(x,\ |y|)=(4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 8),\ (5,\ 5)$$

よって，求める $(x,\ y)$ の組は次の 8 組である．

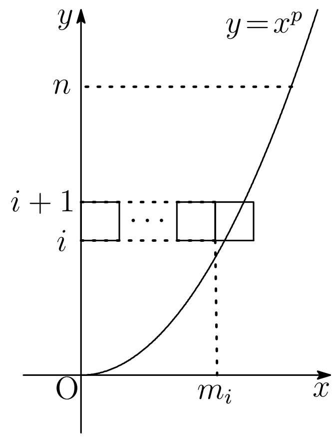
$$\boldsymbol{(x,\ y)=(4, \pm 2),\ (4, \pm 4),\ (4, \pm 8),\ (5, \pm 5)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 右の図は，$k \leqq x \leqq k+1$ において，$y = x^p$ と交わる単位正方形を図示したものである．$y = x^p$ は単調増加であり，$x = k$ および $x = k+1$ において格子点を通る．
ゆえに，$i \leqq y \leqq i+1$ で $y = x^p$ と交わる単位正方形は 1 個である $(k^p \leqq i < (k+1)^p)$．
したがって，$0 \leqq y \leqq n$ で $y = x^p$ と交わる単位正方形の個数は

$$n \text{ (個)}$$



(2) 右の図のように $y = x^p$ と y 軸，直線 $y = i$，$y = i+1$ で囲まれた領域の面積を S_i，この領域内の単位正方形の個数を m_i とすると $(0 \leqq i \leqq n-1)$



$$m_i < S_i < m_i + 1$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} m_i < \sum_{i=0}^{n-1} S_i < \sum_{i=0}^{n-1}(m_i + 1)$

よって $M_n < S_n < M_n + n \quad \cdots ①$

また $S_n = \displaystyle\int_0^n x\,dy = \int_0^n y^{\frac{1}{p}}\,dy = \boldsymbol{\frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}}}$

(3) 直線 $y = i$ $(i = 0, 1, \cdots n-1)$ 上にある格子点は，次の $m_i + 1$ 個である．

$$(0,\ i),\ (1,\ i),\ (2,\ i),\ \cdots,\ (m_i,\ i)$$

また，直線 $y = n$ 上にある格子点は，次の $[n^{\frac{1}{p}}] + 1$ 個である．

$$(0,\ n),\ (1,\ n),\ (2,\ n),\ \cdots,\ ([n^{\frac{1}{p}}],\ n)$$

したがって，D_n 内にある格子点の個数 L_n は

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1}(m_i + 1) + ([n^{\frac{1}{p}}] + 1) = M_n + n + [n^{\frac{1}{p}}] + 1$$

$n^{\frac{1}{p}} - 1 < [n^{\frac{1}{p}}] \leqq n^{\frac{1}{p}}$ であるから

$$M_n + n + n^{\frac{1}{p}} < L_n \leqq M_n + n + n^{\frac{1}{p}} + 1 \quad \cdots ②$$

①，② より　　$S_n + n^{\frac{1}{p}} < L_n < S_n + n + n^{\frac{1}{p}} + 1$

これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n^{\frac{1}{p}} < L_n < \frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n + n^{\frac{1}{p}} + 1$$

したがって

$$\frac{p}{p+1} + n^{-1} < n^{-\frac{p+1}{p}} L_n < \frac{p}{p+1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-1} + n^{-\frac{p+1}{p}}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{p}{p+1} + n^{-1} \right) = \frac{p}{p+1},$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{p}{p+1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-1} + n^{-\frac{p+1}{p}} \right) = \frac{p}{p+1}$$

よって，はさみうちの原理により　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n = \frac{p}{p+1}}$

別解

(3) 領域 D_n の直線 $y = i$ $(0 \leqq i \leqq n)$ 上にある格子点の個数は　$[i^{\frac{1}{p}}] + 1$ (個)

したがって　　$L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} ([i^{\frac{1}{p}}] + 1)$

$i^{\frac{1}{p}} - 1 < [i^{\frac{1}{p}}] \leqq i^{\frac{1}{p}}$ であるから

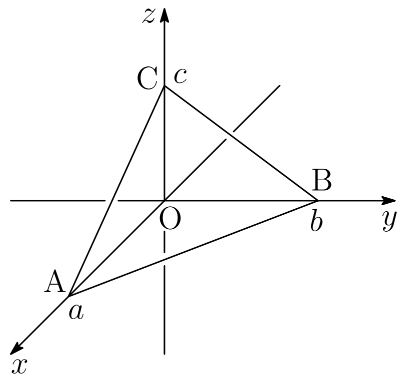
$$\sum_{i=0}^{n} i^{\frac{1}{p}} < L_n \leqq \sum_{i=0}^{n} (i^{\frac{1}{p}} + 1)$$
$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} \right)^{\frac{1}{p}} < n^{-\frac{p+1}{p}} L_n \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} \right)^{\frac{1}{p}} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}$$

ここで　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = \int_0^1 x^{\frac{1}{p}}\, dx = \frac{p}{p+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}} \right) = 0$$

よって，はさみうちの原理により　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n = \frac{p}{p+1}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\angle$AOB，$\angle$BOC，$\angle$COA はすべて 90° であるから座標空間に 3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ を定めると，$\triangle$ABC の重心 G の座標は



$$\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$$

3 点 A,B,C を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

この平面の法線ベクトル $\vec{n}$ は　　$\vec{n}=\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}/\!/\vec{n}$ であるから，定数 k を用いて

$$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)=k\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)\quad \text{ゆえに}\quad a^2=b^2=c^2=3k$$

よって，$a>0,\ b>0,\ c>0$ より　　$\boldsymbol{a=b=c}$

(2) D は線分 BC を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P は直線 AD 上の A 以外の点であるから $(t\neq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$\triangle$APQ の重心が G であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\quad \text{すなわち}\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

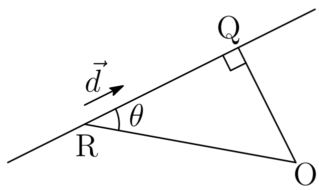
したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$=(-a,\ b,\ c)+\frac{t}{3}(3a,-2b,-c)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-a,\ b,\ c)$，$\vec{d}=(3a,-2b,-c)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{t}{3}\vec{d}\quad\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\vec{d}$ のベクトルのなす角を θ とすると
$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$，OQ が最小となるとき



$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\sin\theta, \qquad \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\vec{d}|}$$

上の 2 式から　$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} \quad \cdots ②$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \vec{d}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \vec{d} = 0$ であるから，① をこれに代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d} + \frac{t}{3}|\vec{d}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{3(\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d})}{|\vec{d}|^2}$$

したがって　$$t = \frac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2} \neq 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d} = (bc,\ 2ca, -ab)$ であるから，② より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{\sqrt{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}}{\sqrt{9a^2 + 4b^2 + c^2}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}}$$

法ベクトル

座標平面 (2 次元) における直線 $ax + by + c = 0$(1 次元) および座標空間 (3 次元) における平面 $ax + by + cz + d = 0$(2 次元) の法ベクトル (法線ベクトルともいう) は，それぞれ $(a,\ b)$，$(a,\ b,\ c)$ である．また，法ベクトルの次元は $2 - 1$ および $3 - 2$ で，ともに 1 次元である．

直線 $ax + by + c = 0$，平面 $ax + by + cx + d = 0$ は，n 次元空間における $n - 1$ 次元の多様体であり，法ベクトルの次元は 1(多様体の余次元) である．

したがって，これらの多様体 (ここでは，直線と平面) は同形であり，関連する公式も同形である．

たとえば，点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ から平面 $ax + by + cz + d = 0$ までの距離は

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であり，点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離と同形である．

$\boxed{5}$ (1) $z = t + ai$ より

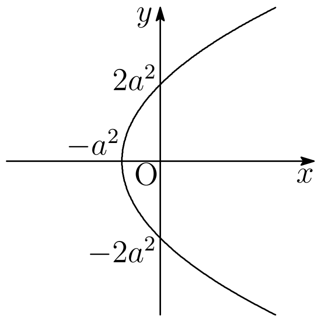
$$z^2 = (t+ai)^2 = (t^2 - a^2) + 2ati$$

$x = t^2 - a^2$, $y = 2at$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x = \frac{y^2}{4a^2} - a^2$$

ゆえに　　$\boldsymbol{4a^2(x + a^2) = y^2}$　$\cdots$①

よって，求める軌跡は右の図のようになる．



(2) m は ℓ を原点を中心に θ だけ回転させたものであるから

$$\begin{aligned} z(\cos\theta + i\sin\theta) &= (t + ai)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (t\cos\theta - a\sin\theta) + i(t\sin\theta + a\cos\theta) \end{aligned}$$

$x = t\cos\theta - a\sin\theta$, $y = t\sin\theta + a\cos\theta$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x\sin\theta - y\cos\theta + a = 0 \quad \cdots②$$

i) $\sin\theta = 0$ のとき
②は $y = \pm a$ の直線であり，①，②の共有点は 1 個

ii) $\sin\theta \neq 0$ のとき
①，②から x を消去して整理すると

$$(\sin\theta)y^2 - (4a^2\cos\theta)y - 4a^3(a\sin\theta - 1) = 0 \quad \cdots(*)$$

これは y に関する 2 次方程式であるから，その係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= 4a^4\cos^2\theta + 4a^3\sin\theta(a\sin\theta - 1) \\ &= 4a^3(a - \sin\theta) \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ に注意して

$-1 \leqq \sin\theta < a$ のとき	$(*)$ の実数解は 2 個
$\sin\theta = a$ のとき	$(*)$ の実数解は 1 個
$a < \sin\theta \leqq 1$ のとき	$(*)$ の実数解は 0 個

i)，ii) より，①，②の共有点の個数は

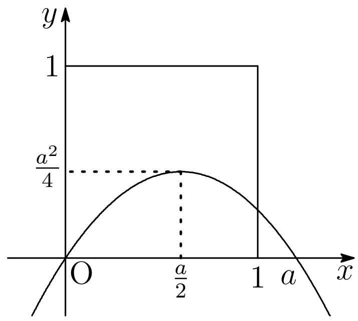
$$\begin{cases} \boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta < 0,\ 0 < \sin\theta < a} \textbf{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{\sin\theta = 0,\ a} \textbf{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a < \sin\theta \leqq 1} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 正方形の面積は　1

正方形の周および内部と放物線 $y = x(a - x)$ で囲まれた部分の面積を S とし，求める確率を $P(a)$ とすると　$P(a) = \dfrac{S}{1} = S$

i) $0 < a \leqq 1$ のとき

$$P(a) = \int_0^a x(a - x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a^3}{6}}$$



ii) $1 < a \leqq 2$ のとき

$$P(a) = \int_0^1 x(a - x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a}{2} - \frac{1}{3}}$$

(2) 求める確率は

$$P\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - P\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \left(1 - P\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot P\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{48}\left(1 - \frac{5}{12}\right) + \left(1 - \frac{1}{48}\right) \times \frac{5}{12} = \boldsymbol{\frac{121}{288}}$$

(3) 3 回ともはずれる確率は　$(1 - P(a))^3$ である．

少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であるから

$$1 - (1 - P(a))^3 \geqq \frac{19}{27} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \geqq \frac{1}{3} \quad \cdots①$$

当たりの数の期待値 E は

$$E = \sum_{k=0}^{3} k \cdot {}_3\mathrm{C}_k (P(a))^k (1 - P(a))^{3-k} = 3P(a)$$

この期待値 E が $\dfrac{3}{2}$ 以下であるから

$$3P(a) \leqq \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots②$$

①，② から　$\dfrac{1}{3} \leqq P(a) \leqq \dfrac{1}{2}$

これを満たす a は (1) の ii) の場合について調べればよいので

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \leqq \frac{1}{2} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{\frac{4}{3} \leqq a \leqq \frac{5}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ より $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ である．$AX=B$ より

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b+1 \\ a+2b-1 \end{pmatrix}$$

したがって，$\mathrm{Q}(2a+b+1,\ a+2b-1)$，$\mathrm{R}(1,-1)$ となり

$$\frac{\mathrm{RQ}^2}{\mathrm{OP}^2}=\frac{(2a+b)^2+(a+2b)^2}{a^2+b^2}=9-\frac{4(a-b)^2}{a^2+b^2}\leqq 9$$

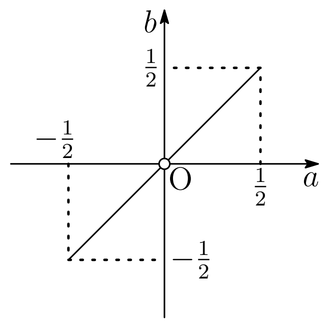
ゆえに　$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}\leqq 3$

等号が成り立つのは $a=b$ のときである．

ゆえに，$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}$ の最大値は　$\mathbf{3}$

最大値を与える点 P の方程式は，$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ および a，b の範囲に注意して

$$\boldsymbol{a=b}\ \left(\mathbf{0}<|\boldsymbol{a}|\leqq\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$$



よって，P の表す図形は右の図のようになる．

(2) A^{-1} の固有方程式は　$\lambda^2-4\lambda+3=0$

$\lambda=3,\ 1$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

とおくと，$B=\dfrac{a+b}{2}\vec{u}+\dfrac{a-b+2}{2}\vec{v}$ であるから

$$A^{-1}B=\frac{a+b}{2}A^{-1}\vec{u}+\frac{a-b+2}{2}A^{-1}\vec{v}=\frac{3(a+b)}{2}\vec{u}+\frac{a-b+2}{2}\vec{v}$$

したがって

$$\mathrm{OQ}^2=\frac{9(a+b)^2}{4}|\vec{u}|^2+\frac{(a-b+2)^2}{4}|\vec{v}|^2=\frac{9}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b+2)^2$$

$|a|\leqq\dfrac{1}{2}$，$|b|\leqq\dfrac{1}{2}$ より　$-1\leqq a+b\leqq 1$，$1\leqq a-b+2\leqq 3$

ゆえに，OQ が最小となるとき

$$a+b=0,\ a-b+2=1 \quad \text{すなわち} \quad a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$$

よって　$\mathbf{P}\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$ のとき，**最小値** $\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$ をとる

対称行列の固有ベクトル

本題で与えられた行列 A は対称行列であり，その逆行列も対称行列である．対称行列の固有ベクトルは直交することに注目して本題の解答を行った．

このことに関して，次の定理とその証明をしておく．

定理

対称行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有ベクトルは直交する．ただし，$A \neq kE$ とする．

証明 A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2)=0$$

この方程式の判別式 D は

$$D=\{-(a+c)\}^2-4\cdot1(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2>0$$

ゆえに，異なる 2 つの固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ u_1，u_2 とする．ここで，内積 $u_1\cdot u_2$ は行列の積 ${}^t u_1 u_2$ であることに留意する．

$$(Au_1)\cdot u_2={}^t(Au_1)u_2={}^t u_1{}^t A u_2={}^t u_1 A u_2=u_1\cdot(Au_2)$$

$Au_1=\lambda_1 u_1$，$Au_2=\lambda_2 u_2$ であるから上式より

$$(\lambda_1 u_1)\cdot u_2=u_1\cdot(\lambda_2 u_2) \quad \text{すなわち} \quad (\lambda_1-\lambda_2)u_1\cdot u_2=0$$

$\lambda_1-\lambda_2\neq 0$ であるから　$u_1\cdot u_2=0$　よって　$u_1 \perp u_2$ **証終**

補足

$m\times n$ 行列 A の (i,j) 成分と (j,i) 成分を入れ換えた行列を A の転置行列 (transposed matrix) といい，${}^t A$ と表す．

たとえば，2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の転置行列は，${}^t A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$l\times m$ 行列 A と $m\times n$ 行列 B の積 AB は $l\times n$ 行列であり，$n\times m$ 行列 ${}^t B$ と $m\times l$ 行列 ${}^t A$ の積 ${}^t B{}^t A$ は $n\times l$ 行列である．また，次式が成り立つ．

$${}^t(AB)={}^t B\,{}^t A$$

正方行列 A が対称行列であることと ${}^t A=A$ が成立することは同値である．

上の証明でベクトルを $\vec{u}_1$ とせず u_1 と表したのは，行列の計算により証明を行ったからである．本来，ベクトルは行列の一部であり，大学等では，$\vec{v}$ などと表記しないのが一般的である．

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) 2直線PQ，PRがx軸の正の向きとなす角をそれぞれθ_1，θ_2とすると

$$m_1 = \tan\theta_1, \quad m_2 = \tan\theta_2$$

$m_1 < 0 < m_2$ より，$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$ であるから

$$\tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2} = \boldsymbol{\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}$$

(2) $y = \dfrac{1}{4}x^2$ を微分すると　$y' = \dfrac{1}{2}x$

Qの座標を$(\alpha,\ \frac{1}{4}\alpha^2)$とすると，Qにおける接線の傾きは$m_1$であるから

$$m_1 = \frac{1}{2}\alpha$$

ゆえに　$\alpha = 2m_1$　点Qの座標は　$(2m_1,\ {m_1}^2)$

Qにおける接線の方程式は

$$y - {m_1}^2 = m_1(x - 2m_1) \quad \text{すなわち} \quad y = m_1 x - {m_1}^2 \quad \cdots ①$$

同様に，Rにおける接線の方程式は　$y = m_2 x - {m_2}^2 \cdots ②$

①，② の交点がPであるから，$m_1 \neq m_2$ に注意してこれを解くと

$$a = m_1 + m_2, \quad b = m_1 m_2$$

また　$(m_1 - m_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 = a^2 - 4b > 0$

$m_1 - m_2 < 0$ より　$m_1 - m_2 = -\sqrt{a^2 - 4b}$

よって，Gの表す方程式は(1)の結果から　$\boldsymbol{\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{a^2 - 4b}}{1 + b}}$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき(2)の結果より

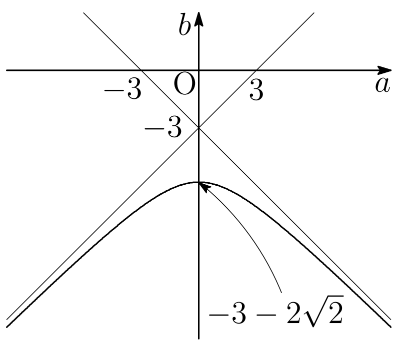
$$1 + b = -\sqrt{a^2 - 4b} \quad \cdots ③$$

③ の両辺を平方して

$$1 + 2b + b^2 = a^2 - 4b$$

上式および ③ から

$$\boldsymbol{(b + 3)^2 - a^2 = 8,\ b < -1}$$



よって，Gの表す図形は，右の図のような双曲線の一部である．

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $k \geqq 1$ のとき $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ すなわち $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < S_n$

よって $\log(n+1) < S_n \quad \cdots①$

$k \geqq 2$ のとき $\displaystyle\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$

ゆえに $\displaystyle 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$ すなわち $\displaystyle S_n < 1 + \int_1^{n} \frac{dx}{x}$

よって $S_n < 1 + \log n \quad \cdots②$

①，② より $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$

(2)
$$\begin{aligned} a_k\Delta b_k + b_{k+1}\Delta a_k &= a_k(b_{k+1} - b_k) + b_{k+1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k \end{aligned}$$

ゆえに
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(a_k\Delta b_k + b_{k+1}\Delta a_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k) \\ &= a_n b_n - a_1 b_1 \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k\Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}\Delta a_k \quad \cdots(*)$

$(*)$ に $a_k = S_k$，$\Delta b_k = k$ を適用すると，

$\Delta a_k = \dfrac{1}{k+1}$，$b_k = \dfrac{1}{2}k(k-1)$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k &= S_n \cdot \frac{1}{2}n(n-1) - S_1 \cdot 0 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}k(k+1) \cdot \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)S_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}k \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)S_n - \frac{1}{4}n(n-1) \\ &= \left(S_n - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{P(n) = \dfrac{1}{2}n(n-1)}$

(3) (2) の結果から $\quad \dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = S_n - \dfrac{1}{2}$

ゆえに $\quad \dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n = S_n - \log n - \dfrac{1}{2} \quad \cdots ③$

(1) の結果から $\quad \log(n+1) - \log n - \dfrac{1}{2} < S_n - \log n - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$

ゆえに $\quad -\dfrac{1}{2} < \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2} < S_n - \log n - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} \quad \cdots ④$

③，④ より $\quad -\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n < \dfrac{1}{2}$

よって $\quad \left|\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n\right| < \dfrac{1}{2}$

補足

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

が発散することは容易に示すことができる．

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&> 1 + \frac{1}{2^1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}^{2^{n-1}\text{個}}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2} = \infty
\end{aligned}$$

次式で定義される

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

をオイラーの定数 (Euler's constant) といい，$\gamma \fallingdotseq 0.577215665\cdots$ であるが (オイラー自身は小数以下 6 桁まで計算)，γ が有理数か無理数かも今でも分かっていない．

これまでに阪大 (理系) 後期で e と π の無理性を証明させる問題が出題された．

1997 大阪大学 (理系) 後期

自然数 n に対して，関数 $f_n(x) = x^n e^{1-x}$ と，その定積分 $a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を考える．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上で $0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ であることを示し，さらに $0 < a_n < 1$ が成り立つことを示せ．

(2) a_1 を求めよ．$n > 1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，等式 $\dfrac{a_n}{n!} = e - \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ．

(4) いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数とならないことを示せ．

解答 (1) $f_n(x)$ を微分すると　$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{1-x}$

$0 < x < 1$ において $f_n'(x) > 0$ であるから，$f_n(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で単調増加である．よって，$f_n(0) = 0$，$f_n(1)$ より　$0 \leqq f_n(x) \leqq 1$

$f_n(x)$ は，つねには 0 または 1 ではないので

$$\int_0^1 0\,dx < \int_0^1 f_n(x)\,dx < \int_0^1 1\,dx \quad よって \quad 0 < a_n < 1$$

(2) $a_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^{1-x} = \Big[-(x+1)e^{1-x}\Big]_0^1 = \boldsymbol{e-2}$

また

$$a_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx = \int_0^1 x^n(-e^{1-x})'\,dx$$

$$= \Big[-x^n e^{1-x}\Big]_0^1 + n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}\,dx = \boldsymbol{-1 + na_{n-1}}$$

(3) (2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき　$\dfrac{a_n}{n!} - \dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!} = -\dfrac{1}{n!}$

ゆえに

$$\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{a_k}{k!} - \frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right\} = -\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

したがって　$\dfrac{a_n}{n!} - a_1 = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$　よって　$\boldsymbol{\dfrac{a_n}{n!} = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}$

(4) (3) の結果から　$a_n = n!e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$

$n!e$ が整数であれば，上式において，右辺は整数となり，$0 < a_n < 1$ に反し，矛盾を生じる．よって，$n!e$ は整数とならない．■

$e = \dfrac{q}{p}$ を有理数 (p，q は自然数) と仮定すると，$p!e$ は整数となり，前ページ (4) の結論に反する．よって，e は無理数である．

オイラーは，このことについて，次のエレガントな証明 (1744 年) を与えている．

$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad \text{は無理数である．}$$

証明 n を自然数とすると

$$e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$

であるから

$$\begin{aligned} n!e - \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n} \leqq 1 \end{aligned}$$

したがって
$$0 < n!e - \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} < 1$$

ここで，$e = \dfrac{q}{p}$ を有理数 (p，q は自然数) と仮定すると，$n = p$ のとき $n!e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$ は整数となり，上式に反する． **証終**

補足

実数を有理数と無理数に分類するように，複素数を**代数的数**と**超越数**に分類する．代数的数とは，有理数を係数とする代数方程式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n = 0 \quad (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \text{は有理数})$$

の解で表されるものをいい，超越数とは，代数的数でない複素数をいう．

たとえば，$-2 + x^2 = 0$，$1 + x^2 = 0$ などの解 $\pm\sqrt{2}$，$\pm i$ は代数的数である．有理数は 1 次の代数方程式の解であるから，有理数は代数的数である．この対偶をとると，実数の超越数は無理数であることがわかる．

1873 年にエルミート (Hermite) により，e は超越数であることが証明された．

有理数における整数の存在は限られたものであるように，複素数における代数的数の存在は限られたものであることが知られている．つまり複素数のほとんどが超越数であるが (その割合を極限でいえば 1)，われわれがこれまでに知り得た超越数は，e，π などのごく僅かである．

2003 大阪大学 (理系) 後期

π を円周率とする．次の積分について考える．

$$I_0 = \pi \int_0^1 \sin \pi t \, dt, \quad I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^n \sin \pi t \, dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(1) n が自然数であるとき，不等式

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < e^x \quad (x > 0)$$

が成立することを数学的帰納法により示せ．これを用いて，不等式

$$I_0 + uI_1 + u^2 I_2 + \cdots + u^n I_n < \pi e^{\pi u} \quad (u > 0)$$

が成立することを示せ．

(2) I_0，I_1 の値を求めよ．また，漸化式

$$I_{n+1} = \frac{4n+2}{\pi} I_n - I_{n-1} \quad (n = 1, 2 \cdots)$$

が成立することを示せ．

(3) π が無理数であることを背理法により証明しよう．π が無理数でないとし，正の整数 p，q によって $\pi = \dfrac{p}{q}$ として表されると仮定する．$A_0 = I_0$，$A_n = p^n I_n$ とおくとき，A_0，A_1，A_2，$\cdots$ は正の整数になることを示せ．さらに，これから矛盾を導け．

解答 (1) $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} < e^x \quad (x > 0) \quad \cdots$(A) とおく．

$n = 1$ のとき，$\displaystyle\int_0^x 1 \, dt < \int_0^x e^t \, dt$ より $x < e^x - 1$ となり (A) は成り立つ．

$n = k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると，$x > 0$ に対して

$$\int_0^x \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right) dt < \int_0^x e^t \, dt$$

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^x - 1$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^x$$

よって，$n = k + 1$ のときも (A) は成り立つ．

したがって，すべての自然数 n について (A) は成り立つ．

$0 < t < 1$ において $0 < t^j(1-t)^j \sin \pi t < 1$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} u^j I_j &= \sum_{j=0}^{k} u^j \cdot \frac{\pi^{j+1}}{j!} \int_0^1 t^j(1-t)^j \sin \pi t\, dt \\ &< \pi \sum_{j=0}^{k} \frac{(\pi u)^j}{j!} \int_0^1 dt < \pi e^{\pi u}\end{aligned}$$

よって　$I_0 + uI_1 + u^2 I_2 + \cdots + u^n I_n < \pi e^{\pi u} \quad (u > 0)$

(2)　$$I_0 = \pi \int_0^1 \sin \pi t\, dt = \Big[-\cos \pi t \Big]_0^1 = \mathbf{2}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \pi^2 \int_0^1 t(1-t) \sin \pi t\, dt = -\pi \int_0^1 t(1-t)(\cos \pi t)'\, dt \\ &= -\pi \Big[t(1-t) \cos \pi t \Big]_0^1 + \pi \int_0^1 (1-2t) \cos \pi t\, dt \\ &= \int_0^1 (1-2t)(\sin \pi t)'\, dt \\ &= \Big[(1-2t) \sin \pi t \Big]_0^1 - \int_0^1 (-2) \sin \pi t\, dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \Big[\cos \pi t \Big]_0^1 = \boldsymbol{\frac{4}{\pi}}\end{aligned}$$

$g_n(t) = \{t(1-t)\}^n$ とおくと　$g_{n+1}(t) = \{t(1-t)\}^{n+1}$

$$\begin{aligned}g'_{n+1}(t) &= (n+1)(1-2t)g_n(t) \quad \cdots ① \\ g''_{n+1}(t) &= (n+1)\{-2g_n(t) + (1-2t)g'_n(t)\} \\ &= (n+1)\{-2g_n(t) + (1-2t) \cdot n(1-2t)g_{n-1}(t)\} \\ &= -2(n+1)g_n(t) + n(n+1)\{1 - 4t(1-t)\}g_{n-1}(t) \\ &= -2(n+1)g_n(t) + n(n+1)\{g_{n-1}(t) - 4g_n(t)\} \\ &= -2(n+1)(2n+1)g_n(t) + n(n+1)g_{n-1}(t) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt &= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 g_{n+1}(t)(\cos\pi t)'\,dt\\ &= -\frac{1}{\pi}\Big[\,g_{n+1}(t)\cos\pi t\,\Big]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1 g'_{n+1}(t)\cos\pi t\,dt\\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g'_{n+1}(t)(\sin\pi t)'\,dt\\ &= \frac{1}{\pi^2}\Big[\,g'_{n+1}(t)\sin\pi t\,\Big]_0^1-\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g''_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

① より $g'_{n+1}(0)=g'_{n+1}(1)=0$ であるから

$$\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g''_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt$$

これに ② を代入すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = \frac{2(n+1)(2n+1)}{\pi^2}&\int_0^1 g_n(t)\sin\pi t\,dt\\ -\frac{n(n+1)}{\pi^2}&\int_0^1 g_{n-1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

上式の両辺に $\dfrac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = \frac{4n+2}{\pi}\cdot\frac{\pi^{n+1}}{n!}&\int_0^1 g_n(t)\sin\pi t\,dt\\ -\frac{\pi^n}{(n-1)!}&\int_0^1 g_{n-1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

よって　　$I_{n+1}=\dfrac{4n+2}{\pi}I_n-I_{n-1}$

(3) 正の整数 p，q によって，$\pi = \dfrac{p}{q}$ と表されると仮定すると，

$$A_0 = I_0 = 2,\ \ A_1 = pI_1 = p\cdot\frac{4}{\pi} = 4q$$

(3) の結果の両辺に p^{n+1} を掛けると

$$p^{n+1}I_{n+1} = (4n+2)q\cdot p^n I_n - p^2\cdot p^{n-1}I_{n-1}$$

ゆえに　$A_{n+1} = (4n+2)qA_n - p^2A_{n-1}$　$\cdots$③

A_0，A_1 は整数であるから，③ により，A_n $(n = 0, 1, \cdots)$ は整数である．
また，I_n の定義により，$I_n > 0$ であるから，A_n は自然数である．

(1) の結果において，$u = p$ とすると

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n < \pi e^{\pi p}$$

$\pi e^{\pi p}$ は定数であるから，$\pi e^{\pi p}$ を超える自然数 n が存在し，上式より

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n < n \quad \cdots ④$$

また，A_n $(n = 0, 1, \cdots)$ は自然数であるから

$$n + 1 \leqq A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad \cdots ⑤$$

このとき，④ は ⑤ に反する．よって，π は無理数である．

補足

π の無理性は，1761 年にランベルト (Lambert) によって証明され，その超越性は，1882 年にリンデマン (Lindemann) によって証明された．

解説

阪大の π の無理性の証明は，漸化式による誘導問題になっている．漸化式を利用しない次の解法もある．

問題に与えられた

$$I_0 = \pi\int_0^1 \sin\pi t\,dt, \quad I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\sin\pi t\,dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

に対して，$J_n = u^n\pi^n I_n$ とおくと $(n = 0, 1, 2\cdots)$

$$J_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 u^n(\pi t)^n(\pi - \pi t)^n \sin\pi t\cdot\pi\,dt$$

$\theta = \pi t$ とすると

$$J_n = \frac{1}{n!}\int_0^\pi u^n\theta^n(\pi-\theta)^n \sin\theta\, d\theta \quad \cdots ①$$

$0 < \theta < \pi$ のとき $0 < \theta(\pi-\theta) < \pi^2$，したがって

$$0 < u^n\theta^n(\pi-\theta)^n \sin\theta < u^n\pi^{2n} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$0 < J_n < \frac{(u\pi^2)^n}{n!}\pi \quad \cdots ③$$

ここで，$a = u\pi^2$，$m = [2a]+1$ とすると

$$\frac{(u\pi^2)^n}{n!} = \frac{a^m}{m!}\cdot\frac{a}{m+1}\cdot\frac{a}{m+2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n} < \frac{a^m}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$$

上式により，u に対して n を十分大きくとれば，③ より

$$0 < J_n < 1 \quad \cdots ④$$

次に

$$f(\theta) = \frac{1}{n!}u^n\theta^n(\pi-\theta)^n \quad \cdots ⑤$$

とおくと，① から

$$J_n = \int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\, d\theta \quad \cdots ⑥$$

部分積分により

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\, d\theta &= \Big[-f(\theta)\cos\theta\Big]_0^\pi + \int_0^\pi f'(\theta)\cos\theta\, d\theta \\
&= f(\pi) + f(0) + \int_0^\pi f'(\theta)\cos\theta\, d\theta \\
\int_0^\pi f'(\theta)\cos\theta\, d\theta &= \Big[\,f'(\theta)\sin\theta\,\Big]_0^\pi - \int_0^\pi f''(\theta)\sin\theta\, d\theta \\
&= -\int_0^\pi f''(\theta)\sin\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

ゆえに $\displaystyle\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\, d\theta = f(\pi) + f(0) - \int_0^\pi f''(\theta)\sin\theta\, d\theta$

したがって，この部分積分を順次行うと，$f^{(2n+2)}(\theta)=0$ であるから

$$\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\,d\theta=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(f^{(2k)}(\pi)+f^{(2k)}(0)) \quad \cdots ⑦$$

$f(\pi-\theta)=f(\theta)$ であるから，合成関数の微分律により

$$f^{(j)}(\theta)=(-1)^j f^{(j)}(\pi-\theta)$$

上式より，$f^{(2k)}(\pi)=f^{(2k)}(0)$ であるから，⑥，⑦ より

$$J_n=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(0) \quad \cdots ⑧$$

⑤ の $(\pi-\theta)^n$ を展開すると

$$f(\theta)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k u^n\pi^{n-k}\theta^{n+k}$$

ゆえに　$f^{(k)}(0)=0 \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$

$$f^{(n+k)}(0)=(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k\frac{(n+k)!}{n!}u^n\pi^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

自然数 p，q を用いて，$\pi=\dfrac{p}{q}$ と表されると仮定すると，$u=q$ のとき

$$u^n\pi^{n-k}=q^n\left(\frac{p}{q}\right)^{n-k}=p^{n-k}q^k$$

このとき，$f^{(i)}(0)$ は整数であるから $(i=0,1,2,\cdots,2n)$，⑧ より J_n は整数となり，④ に反する．したがって，π は無理数である．

2006 京都大学 (理系) 後期

$\tan 1^\circ$ は有理数か.

解答 $\tan 1^\circ$ を有理数と仮定する．88 以下の整数 n に対して，$\tan n^\circ$ が有理数ならば

$$\tan(n+1)^\circ=\frac{\tan n^\circ+\tan 1^\circ}{1-\tan n^\circ\tan 1^\circ}$$

より，$\tan(n+1)^\circ$ は有理数である．したがって，数学的帰納法により，$1\leqq n\leqq 89$ の自然数 n について，$\tan n^\circ$ は有理数となる．

このとき，$\tan 30^\circ$ は無理数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，上の結論に反する．

よって，$\tan 1^\circ$ は無理数である．■