平成14年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

問題 1 2 3 必答， 4 5 6 から1題選択， 7 8 9 から1題選択

1 平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$$

で表されている。ただし，e は自然対数の底である。原点を O，点 $(0,\ 1)$ を M とする。t が $t \geqq 0$ の範囲で変化したとき点 P が描く曲線を C とする。時刻 t において，曲線 C，線分 OM，および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し，曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 x，y に対して y を x を用いて表せ。

(2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ。

(3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ。

2 正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。たとえば $f(1) = 1$ であり，$a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15) = 24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$ が成り立つことを示せ。

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする。このとき $f(a) \geqq (p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3) 正の偶数 a，b は，ある整数 m，n とある奇数 r，s を用いて $a = 2^m r$，$b = 2^n s$ のように表すことができる。このとき a，b が

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$$

をみたせば，r，s は素数であり，かつ $r = 2^{n+1} - 1$，$s = 2^{m+1} - 1$ となることを示せ。

3 次の問いに答えよ。

(1) すべての正の実数 x，y に対して，不等式

$$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2) a，b は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ をみたす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) a，b は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とする。不等式

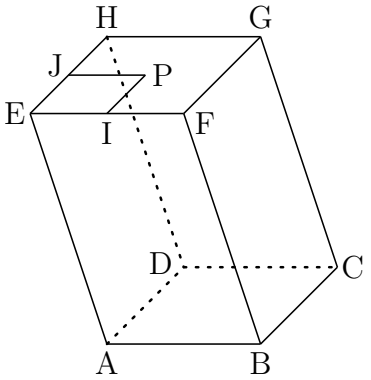
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。

4 空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) △ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) 右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = 2$ とし，$\angle\mathrm{FBC} = \angle\mathrm{BCD} = \dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{EAB} = \theta$ とする。ここで θ は $0 < \theta < \pi$ なる定数とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x = |\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y = |\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△ACP の面積を θ，x，y を用いて表せ。



(平行六面体 ABCD-EFGH)

(3) 問 (2) で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ。

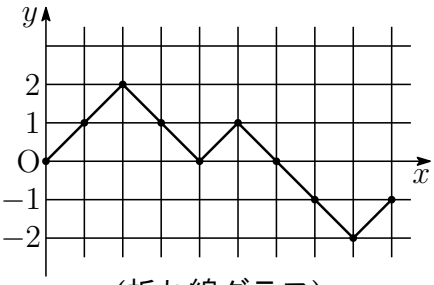
5 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 をとる．次の問いに答えよ。

(1) $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで三角形の**垂心**とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これら 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。

(2) $w_2 = -\overline{z}_1 z_2 z_3$ とおく。$w_2 \neq z_1$ のとき，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで $\overline{z}_1$ は z_1 に共役な複素数である。

(3) 2 点 z_2，z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点は，点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点であることを示せ。ただし，$w_1 = w_2$ のときは，w_1 と w_2 の中点は w_1 と解釈する。

6 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という。与えられた格子点を第 1 番目とし，この点から右斜め 45°，または右斜め −45° の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ。同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点をとり，第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする。右図に原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す。次の問いに答えよ。



(折れ線グラフ)

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n+k$ が偶数であることを示せ。また，この必要十分条件がみたされているとき，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。

(2) n は 2 以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq n-2$ なる整数で，$n+k$ は偶数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいことを示せ。

(3) コインを 9 回投げる。1 回から i 回までの試行において，表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i,\ T_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, 9$，を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる。ただし，$T_0 = 0$ とする。$T_9 = 3$ が起きたとき，どの T_i $(i = 1, 2, \cdots, 7)$ も 3 にならない条件つき確率を求めよ。

7 平面上の点 P の x 座標と y 座標が，変数 θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2}+\dfrac{1}{2}$ を用いて $\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$ と表されている。θ が $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で変化したとき，点 P が描く曲線を C とする。点 P を $\mathrm{P}(\theta)$ で表し，$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}(0)$，$\mathrm{P}_2=\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{P}_3=\mathrm{P}(\pi)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする。このとき，点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる (ただし，楕円の上にない) ための必要十分条件を α のみを用いて表せ。

(2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする。l の方程式を求めよ。

(3) 次の条件 (i)，(ii)，(iii) をみたす楕円 D を考える。

(i) D の軸の一つは x 軸上にある。

(ii) D は点 P_1，P_2 を通る。

(iii) 点 P_2 における D の接線は l である。

このとき，点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ。

8 正の実数 a の 3 乗根 $\sqrt[3]{a}$ を近似することを考える。与えられた 2 以上の整数 p に対して関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x)=x^p-ax^{p-3} \\ g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

とする。ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。次の問いに答えよ。

(1) $g(x)-\sqrt[3]{a}$ は

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^2\times\frac{x\text{ の 2 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(2) $p=2$ とする。このとき，$g(x)-\sqrt[3]{a}$ は

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^3\times\frac{x\text{ の 1 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(3) $a=9$，$p=2$ とする。$2<\sqrt[3]{9}<2.1$ に注意して，不等式

$$0<\sqrt[3]{9}-g(2)<\frac{1}{1000}$$

が成り立つことを示せ。また，$\sqrt[3]{9}$ を小数第 3 位まで求めよ (すなわち，小数第 4 位以下を切り捨てよ)。

9 2 次の正方行列 A が零行列でなく $A^2 = A$ をみたすとき，**べき等行列**という。次の問いに答えよ。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ はべき等行列であり，かつ $ad - bc \neq 0$ とする。このとき，A を求めよ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad - bc = 0$ をみたすとする。このとき，A がべき等行列であるための必要十分条件を a と d のみを用いて表せ。

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ はともにべき等行列とする。$A + B$ がべき等行列になるとき，$A + B$ を求めよ。また，そのような A，B の組を一つあげよ。

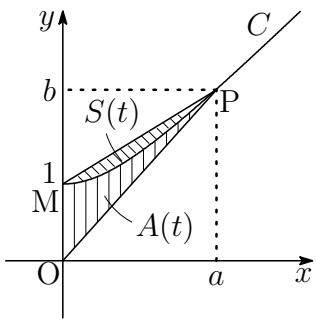
解答例

1 (1) $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$，$y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ より　$y+x=e^t$，$y-x=e^{-t}$

ゆえに　$(y+x)(y-x)=e^t\cdot e^{-t}$　したがって　$y^2-x^2=1$

$y>0$ であるから　$\boldsymbol{y=\sqrt{x^2+1}}$

(2) $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，区間 $[0,\ a]$ における曲線 C および直線 $\mathrm{OP}: y=\dfrac{b}{a}x$ について，(1) の結果から，$b=\sqrt{a^2+1}$ であるから



$$\sqrt{x^2+1}-\frac{b}{a}x=\frac{a\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{a^2+1}}{a}$$
$$=\frac{(a^2-x^2)}{a(a\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{a^2+1})}\geqq 0$$

したがって

$$\begin{aligned}A(t)&=\int_0^a\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{b}{a}x\right)dx\\&=\frac{1}{2}\left[\,x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{b}{a}x^2\,\right]_0^a\\&=\frac{1}{2}\left\{a\sqrt{a^2+1}+\log(a+\sqrt{a^2+1})-ab\right\}\\&=\frac{1}{2}\{ab+\log(a+b)-ab\}=\frac{1}{2}\log(a+b)\\&=\frac{1}{2}\log\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{t}{2}}\end{aligned}$$

$A(t)+S(t)=\dfrac{1}{2}a$ であるから　$S(t)=\dfrac{1}{2}a-A(t)=\boldsymbol{\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}-\dfrac{t}{2}}$

(3) $f(t)=A(t)-S(t)$ とおくと　$f(t)=t-\dfrac{e^t-e^{-t}}{4}$

ゆえに　$f'(t)=1-\dfrac{e^t+e^{-t}}{4}=-\dfrac{e^{-t}}{4}(e^{2t}-4e^t+1)$

$f'(t)=0$ を解くと $(t\geqq 0)$

$t=\log(2+\sqrt{3})$

よって，右の増減表により

t	0	$\cdots$	$\log(2+\sqrt{3})$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

$\boldsymbol{t=\log(2+\sqrt{3})}$ **で最大**　■

2 (1) 正の奇数 b を，3 以上の素数 p_k と自然数 i_k を用いて

$$b = {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n} \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(b) &= (1 + p_1 + {p_1}^2 + \cdots + {p_1}^{i_1})(1 + p_2 + {p_2}^2 + \cdots + {p_2}^{i_2}) \\ &\qquad \cdots (1 + p_n + {p_n}^2 + \cdots + {p_n}^{i_n}) \\ &= \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \end{aligned}$$

$a = 2^m b$ より，$a = 2^m {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n}$ であるから，上の結果を利用して

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \\ &= (2^{m+1} - 1)f(b) \end{aligned}$$

(2) $p \geqq 2$ より，a は少なくとも pq，q の 2 個の約数にもつから

$$f(a) \geqq pq + q = (p + 1)q$$

等号が成り立つのは，a の約数が pq，q の 2 個，すなわち，pq は素数，$q = 1$ のときである．よって，等号は p が素数，$q = 1$ のときに限り成り立つ．

(3) $a = 2^m r$，$b = 2^n s$ を (1) の結果に適用すると

$$f(a) = (2^{m+1} - 1)f(r), \quad f(b) = (2^{n+1} - 1)f(s)$$

$f(a) = 2b$，$f(b) = 2a$ をみたすとき

$$(2^{m+1} - 1)f(r) = 2{\cdot}2^n s, \quad (2^{n+1} - 1)f(s) = 2{\cdot}2^m r$$

ゆえに $\quad (2^{m+1} - 1)f(r) = 2^{n+1}s, \quad (2^{n+1} - 1)f(s) = 2^{m+1}r \quad \cdots ①$

① において $2^{m+1} - 1$ および $2^{n+1} - 1$ は 2 と互いに素であるから，

$$s = (2^{m+1} - 1)s', \quad r = (2^{n+1} - 1)r' \quad (s', r' \text{は自然数}) \quad \cdots ②$$

とおける．② を ① に代入すると

$$f(r) = 2^{n+1}s' \cdots ③, \quad f(s) = 2^{m+1}r' \cdots ④$$

② を (2) の結果に適用すると

$$f(s) \geqq \{(2^{m+1} - 1) + 1\}s' = 2^{m+1}s' \quad \cdots ⑤$$
$$f(r) \geqq \{(2^{n+1} - 1) + 1\}r' = 2^{n+1}r' \quad \cdots ⑥$$

③，⑥ より $s' \geqq r'$ となり，④，⑤ より $r' \geqq s'$ となるから $\quad r' = s'$

このとき，⑤，⑥ において等号が成り立つ．

ゆえに，(2) の結論から，$2^{m+1} - 1$，$2^{n+1} - 1$ は素数，$r' = s' = 1$ である．

よって，② より，r，s は素数であり，$r = 2^{n+1} - 1$，$s = 2^{m+1} - 1$ となる．

■

3 (1) y を固定して，$h(x) = x\log x - (\log y + 1)x + y$ とおくと

$$\begin{aligned} h'(x) &= \log x + 1 - (\log y + 1) \\ &= \log x - \log y \end{aligned}$$

$h'(x) = 0$ とすると　$x = y$

$h(x)$ の増減表は，右のようになる．

x	0	$\cdots$	y	$\cdots$
$h'(x)$	／	$-$	0	$+$
$h(x)$	／	$\searrow$	0	$\nearrow$

$h(x) \geqq 0$ であるから　$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$

また，等号が成り立つのは，$x = y$ のときに限る．

(2) 閉区間 $[a,\ b]$ で $f(x) > 0$，$g(x) > 0$ であるから，(1) の結果より

$$f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x) \geqq 0$$

したがって

$$\int_a^b \{f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x)\}\,dx \geqq 0$$

条件より，$\displaystyle\int_a^b \{-f(x) + g(x)\}\,dx = 0$ を上式に代入すると

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つ．

(3) $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ より　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b M\,dx$

したがって，(2) の結果に $g(x) = M$ を代入して成り立ち，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log M\,dx = \log M\int_a^b f(x)\,dx$$

上式の両辺を $b - a > 0$ で割ると

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \log M \times \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = M\log M$$

が成り立つ．

解説

(1) の結果 $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ について，x と y を入れ換えた

$$y\log y - y\log x - y + x \geqq 0$$

の両辺を y で割ると

$$\log y - \log x - 1 + \frac{x}{y} \geqq 0$$

ここで，$a_k > 0,\ p_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ に対し，

$$M = p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n$$
$$f(x) = \log M - \log x - 1 + \frac{x}{M}$$

とおくと，$x > 0$ について $f(x) \geqq 0$ が成り立つ．また，等号が成り立つのは，$x = M$ のときに限る．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p_kf(a_k) &= \sum_{k=1}^{n} p_k\left(\log M - \log a_k - 1 + \frac{a_k}{M}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(p_k\log M - p_k\log a_k - p_k + \frac{p_ka_k}{M}\right)\\ &= \log M - \sum_{k=1}^{n}\log {a_k}^{p_k} - 1 + \frac{M}{M}\\ &= \log M - \log\left({a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots {a_n}^{p_n}\right)\end{aligned}$$

$p_kf(a_k) \geqq 0\ (k = 1, 2, \cdots n)$ であるから (等号が成り立つのは，$a_k = M$ のとき)

$$\log M - \log\left({a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots {a_n}^{p_n}\right) \geqq 0$$

したがって

$$\boldsymbol{p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n \geqq {a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots {a_n}^{p_n}}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき)．

とくに，$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，次式が成り立つ．

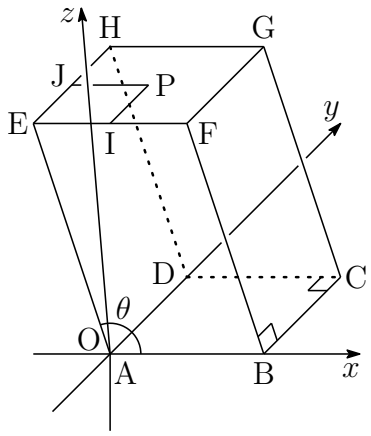
$$\boldsymbol{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$$

■

4 (1) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とすると，$0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\end{aligned}$$

(2) $\angle\mathrm{BCD}=\frac{\pi}{2}$ より，四角形 ABCD は正方形であり，$\angle\mathrm{FBC}=\frac{\pi}{2}$ より，四角形 FBCD は長方形である．したがって，面 ABFE$\perp$BC．空間内で点 A，B，D，E の座標を A(0, 0, 0)，B(1, 0, 0)，D(0, 1, 0)，E$(2\cos\theta,\ 0,\ 2\sin\theta)$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x+2\cos\theta,\ y,\ 2\sin\theta)$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(x+2\cos\theta)^2+y^2+4\sin^2\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x+2\cos\theta+y$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACP}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(y-x-2\cos\theta)^2+8\sin^2\theta}}\end{aligned}$$

補足 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf の解説を参照．

(3) $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ より，$-1\leqq y-x\leqq 1$ であるから，(2) の結果から

i) $1<2\cos\theta$　すなわち　$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ のとき

$y-x=1$ で $\triangle$ACP は，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{9-4\cos\theta-4\cos^2\theta}}$ をとる．

ii) $-1\leqq 2\cos\theta\leqq 1$　すなわち　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{2\pi}{3}$ のとき

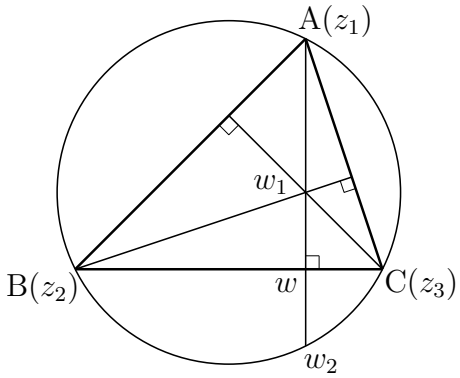
$y-x=2\cos\theta$ で $\triangle$ACP は，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\theta}$ をとる．

iii) $2\cos\theta<-1$　すなわち　$\frac{2\pi}{3}<\theta<\pi$ のとき

$y-x=-1$ で $\triangle$ACP は，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{9+4\cos\theta-4\cos^2\theta}}$ をとる．

■

5 (1) $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ とおく．



点 A を通り，BC に垂直な直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right)}=0 \quad \cdots ①$$

$w_1=z_1+z_2+z_3$，$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ であることから，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}\right)}&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}\right)}\\&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\overline{z}_2+\overline{z}_3}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

したがって，w_1 は直線 ① 上にある．

同様にして，w_1 が点 B を通り直線 CA に垂直な直線な直線上の点，および点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点であることを示すことができる．

よって，w_1 は △ABC の垂心である．

(2) 円 C の方程式は　　$|z|=1$

$w_2=-\overline{z}_1z_2z_3$ より，$|w_2|=|\overline{z}_1||z_2||z_3|=1$

したがって，w_2 は円 C 上の点である．また，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}\right)}&=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\overline{z}_2\overline{z}_3-\overline{z}_1}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\&=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}-\overline{z}_1}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

よって，w_2 は，直線 ① と円 C の交点である．

(3) 2 点 B，C を通る直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_2}{z_3-z_2}$ は実数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_2}{z_3-z_2}-\overline{\left(\frac{z-z_2}{z_3-z_2}\right)}=0$$

w_1 と w_2 の中点を w とすると　$w=\dfrac{z_1+z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2}$

このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{w-z_2}{z_3-z_2}-\overline{\left(\frac{w-z_2}{z_3-z_2}\right)}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\overline{\left\{\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}\right\}}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\frac{\overline{z}_1-\overline{z}_2+\overline{z}_3-z_1\overline{z}_2\overline{z}_3}{2(\overline{z}_3-\overline{z}_2)}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\frac{\overline{z}_1-\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}}{2\left(\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}\right)}=0
\end{aligned}$$

よって，w_1 と w_2 の中点 w は，直線 BC 上の点である．

解説

3 点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ について，△ABC の外心 O，垂心 $z_1+z_2+z_3$，重心 $\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$ が同一直線上にあることがわかる．この直線を**オイラー線**という．

w_1 と z_1 の中点，z_2 と z_3 の中点，z_1 から BC に下ろした垂線の足 w の 3 点を通る円は，$\dfrac{w_1+z_1}{2}$ と $\dfrac{z_2+z_3}{2}$ を直径の両端とする円で，中心は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w_1+z_1}{2}+\frac{z_2+z_3}{2}\right)=\frac{z_1+z_2+z_3}{2}$$

同時に，$\dfrac{w_1+z_2}{2}$ と $\dfrac{z_3+z_1}{2}$，および $\dfrac{w_1+z_3}{2}$ と $\dfrac{z_1+z_2}{2}$ を直径の両端とする円でもある．この方程式は

$$\left|z-\frac{z_1+z_2+z_3}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

であり，この円を **9 点円**という．その中心もオイラー線上にあり，外心と垂心の中点である．また，その半径は外接円の半径の $\frac{1}{2}$ である．■

6 (1) 原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，右斜め 45° の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め -45° の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．

$$\frac{n-k}{2}=\frac{n+k}{2}-k$$

であるから，$\dfrac{n+k}{2}$ が整数であればよい．したがって $n+k$ は偶数である．逆に $n+k$ が偶数，すなわち $n+k=2m$ をみたす整数 m が存在するとき，折れ線グラフは，右斜め 45° の方向に m 回，右斜め -45° の方向に $m-k$ 回 (または $n-m$ 回) 進む．

また，原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は　${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$

(2) 原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，最初に直線 $y=k$ と交わる格子点を $\mathrm{A}(a,\ k)$ とする $(0 \leqq a \leqq n-2)$．A と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数，A と格子点 $(n-1,\ k-1)$ を通る数は，直線 $y=k$ に関する対称性によりその数は等しくともに N とおく．また，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数はそれらの和で

$$N+N=2N$$

である．したがって，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数の 2 倍に等しい．

(3) 2 つの事象 A，B を $A: T_9=3$，$B:$ すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ とすると

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap \overline{B})}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(A)}$$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数は，(1) の結果より　${}_9\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A)=\dfrac{{}_9\mathrm{C}_6}{2^9}$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフで，少なくとも $(1,\ 3)$，$(2,\ 3)$，$\cdots$，$(7,3)$ を通る数は，(2) の結果から，O と $(8,\ 4)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍であるから，(1) の結果より　$2\times{}_8\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A\cap \overline{B})=\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{2^9}$

よって　　$P_A(B)=1-\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{{}_9\mathrm{C}_6}=1-\dfrac{2\times 8\cdot 7}{2\cdot 1}\times\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{9\cdot 8\cdot 7}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

解説

1 次元ランダム・ウォーク (Random walk)[離散型] の最も基本的なモデルである．右斜め 45°，または右斜め −45° の方向に格子点をとっていく確率がともに $\frac{1}{2}$ であるから，折れ線グラフの数に注目するとよい．

左下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフの総数を示したもので，パスカルの三角形を横に倒した配置になっている．右下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフで，すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ である数を示したものである．(3) の条件つき確率は，下の 2 つの表における原点と点 (9, 3) を結ぶ折れ線グラフの数から $\dfrac{\mathbf{28}}{\mathbf{84}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	9										1
	8									1	
	7								1		9
	6							1		8	
	5						1		7		36
	4					1		6		28	
	3				1		5		21		**84**
	2			1		4		15		56	
	1		1		3		10		35		126
	0	1		2		6		20		70	
	−1		1		3		10		35		126
	−2			1		4		15		56	
	−3				1		5		21		84
	−4					1		6		28	
	−5						1		7		36
	−6							1		8	
	−7								1		9
	−8									1	
	−9										1

折れ線グラフの数

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	3										**28**
	2			1		3		9		28	
	1		1		3		9		28		90
	0	1		2		6		19		62	
	−1		1		3		10		34		117
	−2			1		4		15		55	
	−3				1		5		21		83
	−4					1		6		28	
	−5						1		7		36
	−6							1		8	
	−7								1		9
	−8									1	
	−9										1

すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ の数

(1) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ である．また，(2) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいから，n のときはじめて k になるグラフの数は

$$ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n} \cdot {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} $$

これは，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの本数の $\dfrac{k}{n}$ 倍．

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{k}{n}$ となる． ■

7 (1) $f(0)=1$ より $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$，$f(\pi)=\dfrac{1}{2}$ より $\mathrm{P}_3\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

P_1 は C 上にあるから　$\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}=1$

P_3 は C の内部にあるから　$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}<1$

上の 2 式から　$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}<\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}$

ゆえに　$\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2<(1-\alpha)^2$　よって　$\boldsymbol{\alpha<\dfrac{1}{4}}$

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{8}$ より $\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$，$f'(\theta)=\dfrac{\theta-\pi}{\pi^2}$ であるから $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2\pi}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$ より

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{dx}{d\theta}=-\dfrac{5}{8}$，$\dfrac{dy}{d\theta}=-\dfrac{1}{2\pi}$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^{-1}=\dfrac{4}{5\pi}$

よって，l の方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{4}{5\pi}x+\dfrac{5}{8}}$

(3) D の軸の一つは x 軸上にあるから，その中心を $(k,\ 0)$ とする．また，D は P_1 を通るから，楕円 D を $\dfrac{(x-k)^2}{(1-k)^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおく．

また，D は P_2 を通るから　$\dfrac{k^2}{(1-k)^2}+\dfrac{25}{64b^2}=1$　$\cdots$①

P_2 における D の接線の方程式は　$\dfrac{(0-k)(x-k)}{(1-k)^2}+\dfrac{5y}{8b^2}=1$

この接線の傾き $\dfrac{8b^2k}{5(1-k)^2}$ が l の傾きと等しいので

$$\frac{4}{5\pi}=\frac{8b^2k}{5(1-k)^2}\quad すなわち\quad \frac{1}{b^2}=\frac{2\pi k}{(1-k)^2}\quad\cdots②$$

② を ① に代入し，整理すると

$$\frac{k^2}{(1-k)^2}+\frac{25\pi k}{32(1-k)^2}=1\quad すなわち\quad (25\pi+64)k=32$$

ゆえに　$k=\dfrac{32}{25\pi+64}<\dfrac{32}{64+64}=\dfrac{1}{4}$

よって，(1) の結果により，P_3 は D の内部にある．

補足　頂点 $(2k-1,\ 0)$ により $2k-1<-\dfrac{1}{2}$ を示してもよい　■

8 (1) $\alpha=\sqrt[3]{a}$ とおくと，$f(x)=x^p-\alpha^3x^{p-3}$ より

$$\begin{aligned}g(x)-\alpha&=x-\frac{x^p-\alpha^3x^{p-3}}{px^{p-1}-(p-3)\alpha^3x^{p-4}}-\alpha\\&=x-\alpha-\frac{x(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{px^3-(p-3)\alpha^3}\\&=(x-\alpha)\times\frac{px^3-(p-3)\alpha^3-x(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{px^3-(p-3)\alpha^3}\\&=(x-\alpha)^2\times\frac{(p-1)x^2+(p-2)\alpha x+(p-3)\alpha^2}{px^3-(p-3)\alpha^3}\end{aligned}$$

よって，次式が成り立ち，$p\geqq 2$，$p-1\geqq 1$ より，題意をみたす．

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^2\times\frac{(p-1)x^2+(p-2)\sqrt[3]{a}\,x+(p-3)\sqrt[3]{a^2}}{px^3-(p-3)a}$$

(2) (1) の結果に $p=2$ を代入すると，次式が成り立ち，題意をみたす．

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^2\times\frac{x^2-\sqrt[3]{a^2}}{2x^3+a}=(x-\sqrt[3]{a})^3\times\frac{x+\sqrt[3]{a}}{2x^3+a}$$

(3) (2) の結果から　$\sqrt[3]{a}-g(x)=(\sqrt[3]{a}-x)^3\times\dfrac{x+\sqrt[3]{a}}{2x^3+a}$

これに $x=2$，$a=9$ を代入すると

$$\sqrt[3]{9}-g(2)=(\sqrt[3]{9}-2)^3\times\frac{2^2+\sqrt[3]{2}}{2\cdot 2^3+9}$$

$2<\sqrt[3]{9}<2.1$ より

$$0<(\sqrt[3]{9}-2)^3\times\frac{2^2+\sqrt[3]{2}}{2\cdot 2^3+9}<(2.1-2)^3\times\frac{2^2+2.1}{2\cdot 2^3+9}<\frac{1}{1000}$$

したがって　$0<\sqrt[3]{9}-g(2)<\dfrac{1}{1000}$　ゆえに　$g(2)<\sqrt[3]{9}<g(2)+0.001$

このとき，$f(x)=x^2-\dfrac{9}{x}$，$f'(x)=2x+\dfrac{9}{x^2}$ より

$$f(2)=2^2-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2},\quad f'(2)=2\cdot 2+\frac{9}{2^2}=\frac{25}{4}$$

ゆえに　$g(2)=2-\dfrac{f(2)}{f'(2)}=2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\div\dfrac{25}{4}=2.08$

したがって　　$2.08<\sqrt[3]{9}<2.081$

よって，$\sqrt[3]{9}$ の小数第 4 位を切り捨てると　**2.080**

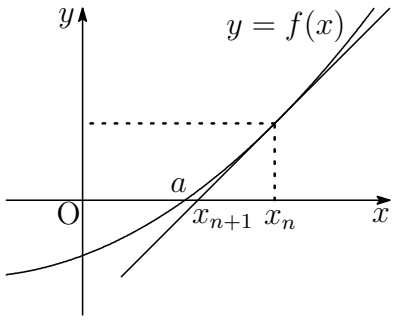
解説

求解アルゴリズムの一つであるニュートン法 (Newton's method) に基づく出題である．方程式 $f(x)=0$ の解 a の近くの x_1 をとり，その点における接線

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

が x 軸と交わる点の x 座標 x_2 とすると

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



これをアルゴリズム化した

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \cdots (*)$$

による近似解析をニュートン法という．なお，$\{x_n\}$ は a に収束する場合が多いが，必ずしも保証されたものではない．

本題 (3) において，$0 < x_n < \sqrt[3]{9}$ のとき

$$f(x_n) = {x_n}^2 - \frac{9}{x_n} = \frac{{x_n}^3 - 9}{{x_n}^3} < 0, \quad f'(x_n) = 2x_n + \frac{9}{{x_n}^2} > 0$$

であるから，$(*)$ より　　$x_{n+1} > x_n$

本題 (2) から

$$\sqrt[3]{9} - x_{n+1} = (\sqrt[3]{9} - x_n)^3 \times \frac{x_n + \sqrt[3]{9}}{2{x_n}^3 + 9} \quad \cdots (**)$$

したがって　　$x_{n+1} < \sqrt[3]{9}$　ゆえに　$0 < x_n < x_{n+1} < \sqrt[3]{9}$

このとき，$(**)$ から

$$0 < \sqrt[3]{9} - x_{n+1} < (\sqrt[3]{9} - x_n)^3 \times \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{9}}{2{\cdot}0^3 + 9} < (\sqrt[3]{9} - x_n)^3$$

したがって　　$0 < \sqrt[3]{9} - x_n < (\sqrt[3]{9} - x_1)^{3^{n-1}}$

$x_1 = 2$ とすると　　$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{9}$

なお，$x_1 = 2$，$x_2 = 2.08$ であるが，$n = 3$ ではかなり精度が向上する．

$$\sqrt[3]{9} \fallingdotseq 2.080083823051904\cdots$$
$$x_3 = 2.080083823051814$$

■

9 (1) $\det A = ad - bc \neq 0$ より，A は正則である．
よって，$A^2 = A$ の両辺に A^{-1} を掛けると　$\boldsymbol{A = E}$

(2) ハミルトン・ケリーの公式により

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \quad \cdots (*)$$

これに $A^2 = A$，$ad - bc = 0$ を代入すると　$(a+d-1)A = O$
$A \neq O$ であるから，$a + d - 1 = 0$　ゆえに　$a + d = 1$
逆に，$a + d = 1$ のとき，$ad - bc = 0$ であるから，これを $(*)$ に代入すると，$A^2 = A$ が成り立つ．
よって，$ad - bc = 0$ のとき，A がべき等行列であるための必要十分条件は

$$\boldsymbol{a + d = 1}$$

(3) (1),(2) の結果から，次のことが分かる．
べき等行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$\mathrm{tr}\, A = a + d$ とすると

$\det A \neq 0$ のとき　$\mathrm{tr}\, A = 2$　　$(A = E$ より$)$
$\det A = 0$ のとき　$\mathrm{tr}\, A = 1$

が成り立つ．
一般に，$\mathrm{tr}\,(A + B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$ が成り立つ．
したがって，A，B，$A + B$ がべき等行列であるとき，上式より

$$\mathrm{tr}\, A = 1, \quad \mathrm{tr}\, B = 1, \quad \mathrm{tr}(A + B) = 2$$

である．よって　　$\boldsymbol{A + B = E}$

これを満たす A，B の組の一つは

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

補足　(3) は一般には，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$．
ただし，$a(1-a) - bc = 0$．

■