

## 平成 14 年度 九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分

理系 (経済 (経工), 理, 医, 歯, 薬, 工, 農学部)

1 ~ 3 必答, 4 ~ 6 から 1 題選択, 7 ~ 9 から 1 題選択

- 1 平面上を運動する点  $P(x, y)$  の時刻  $t$  での  $x$  座標と  $y$  座標が

$$\begin{cases} x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$$

で表されている。ただし,  $e$  は自然対数の底である。原点を  $O$ , 点  $(0, 1)$  を  $M$  とする。  $t$  が  $t \geq 0$  の範囲で変化したとき点  $P$  が描く曲線を  $C$  とする。時刻  $t$  において, 曲線  $C$ , 線分  $OM$ , および線分  $OP$  で囲まれる図形の面積を  $A(t)$  で表し, 曲線  $C$  と線分  $MP$  で囲まれる図形の面積を  $S(t)$  で表す。次の問いに答えよ。

- (1) 点  $P(x, y)$  の座標  $x, y$  に対して  $y$  を  $x$  を用いて表せ。
- (2) 時刻  $t$  を用いて  $A(t)$  と  $S(t)$  を表せ。
- (3)  $A(t) - S(t)$  が最大となる時刻  $t$  を求めよ。

- 2 正の整数  $a$  に対し,  $a$  の正の約数全体の和を  $f(a)$  で表す。ただし, 1 および  $a$  自身も約数とする。たとえば  $f(1) = 1$  であり,  $a = 15$  ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので,  $f(15) = 24$  となる。次の問いに答えよ。

- (1)  $a$  が正の奇数  $b$  と正の整数  $m$  を用いて  $a = 2^m b$  と表されるとする。このとき  $f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $a$  が 2 以上の整数  $p$  と正の整数  $q$  を用いて  $a = pq$  と表されるとする。このとき  $f(a) \geq (p+1)q$  が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのは,  $q = 1$  かつ  $p$  が素数であるときに限ることを示せ。
- (3) 正の偶数  $a, b$  は, ある整数  $m, n$  とある奇数  $r, s$  を用いて  $a = 2^m r, b = 2^n s$  のように表すことができる。このとき  $a, b$  が

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$$

をみたせば,  $r, s$  は素数であり, かつ  $r = 2^{n+1} - 1, s = 2^{m+1} - 1$  となることを示せ。

3 次の問いに答えよ。

- (1) すべての正の実数  $x, y$  に対して, 不等式

$$x \log x - x \log y - x + y \geq 0$$

が成り立つことを示せ。ここで  $\log$  は自然対数を表す。

- (2)  $a, b$  は実数で  $a < b$  とする。関数  $f(x)$  と  $g(x)$  は閉区間  $[a, b]$  で正の値をとる連続関数で  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$  をみたす。このとき, 不等式

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x) dx$$

が成り立つことを示せ。

- (3)  $a, b$  は実数で  $a < b$  とする。閉区間  $[a, b]$  で正の値をとる連続関数  $f(x)$  に対し正の実数  $M$  を  $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  とする。不等式

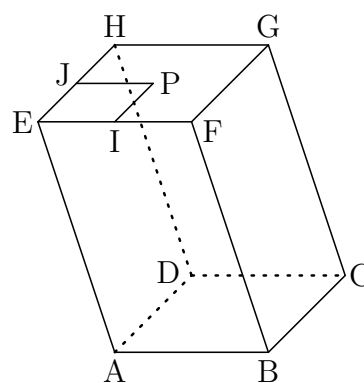
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq M \log M$$

が成り立つことを示せ。

4 空間内の図形について次の問いに答えよ。

- (1)  $\triangle ABC$  の面積は  $\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$  に等しいことを示せ。ここで,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  はベクトル  $\vec{AB}$  とベクトル  $\vec{AC}$  との内積を表す。必要ならば, 二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

- (2) 右図の平行六面体  $ABCD-EFGH$  を考える。 $|\vec{AB}| = |\vec{AD}| = 1, |\vec{AE}| = 2$  とし,  $\angle FBC = \angle BCD = \frac{\pi}{2}, \angle EAB = \theta$  とする。ここで  $\theta$  は  $0 < \theta < \pi$  なる定数とする。面  $EFGH$  上に点  $P$  をとり, 点  $P$  から辺  $EF$  上に垂線  $PI$  を下ろし, 点  $P$  から辺  $EH$  上に垂線  $PJ$  を下ろす。 $x = |\vec{EI}|, y = |\vec{EJ}|$  とするとき,  $\triangle ACP$  の面積を  $\theta, x, y$  を用いて表せ。



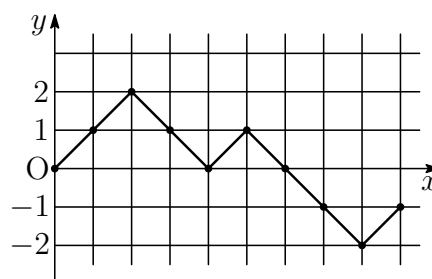
(平行六面体  $ABCD-EFGH$ )

- (3) 問(2)で点  $P$  が面  $EFGH$  上を動くとき,  $\triangle ACP$  の面積の最小値を求めよ。

5 複素数平面上の原点を中心とする半径1の円  $C$  上に相異なる3点  $z_1, z_2, z_3$  をとる. 次の問いに答えよ.

- (1)  $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$  とおく. 点  $w_1$  は3点  $z_1, z_2, z_3$  を頂点とする三角形の垂心になることを示せ. ここで三角形の垂心とは, 各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした3本の垂線の交点のことであり, これら3本の垂線は1点で交わることが知られている.
- (2)  $w_2 = -\bar{z}_1 z_2 z_3$  とおく.  $w_2 \neq z_1$  のとき, 2点  $z_2, z_3$  を通る直線上に点  $z_1$  から下ろした垂線またはその延長線が円  $C$  と交わる点は  $w_2$  であることを示せ. ここで  $\bar{z}_1$  は  $z_1$  に共役な複素数である.
- (3) 2点  $z_2, z_3$  を通る直線とこの直線上に点  $z_1$  から下ろした垂線との交点は, 点  $w_1$  と点  $w_2$  を結ぶ線分の中点であることを示せ. ただし,  $w_1 = w_2$  のときは,  $w_1$  と  $w_2$  の中点は  $w_1$  と解釈する.

6 平面上の点の  $x$  座標と  $y$  座標がどちらも整数であるとき, その点を格子点という. 与えられた格子点を第1番目とし, この点から右斜め  $45^\circ$ , または右斜め  $-45^\circ$  の方向にもっとも近い第2番目の格子点を取り, この2点を線分で結ぶ. 同様にして第2番目の格子点から第3番目の格子点を取り, 第2番目と第3番目を線分で結ぶ. 以下これを有限回繰り返し, こうしてできる線分をつないだものを折れ線グラフということにする. 右図に原点  $O$  と格子点  $(9, -1)$  を結ぶ折れ線グラフの例を示す. 次の問いに答えよ.



(折れ線グラフ)

- (1)  $n$  は正の整数,  $k$  は  $0 \leq k \leq n$  なる整数とする. 原点  $O$  と格子点  $(n, k)$  を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は  $n+k$  が偶数であることを示せ. また, この必要十分条件がみたされているとき, 原点  $O$  と格子点  $(n, k)$  を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ.
- (2)  $n$  は2以上の整数,  $k$  は  $0 \leq k \leq n-2$  なる整数で,  $n+k$  は偶数とする. 原点  $O$  と格子点  $(n, k)$  を結ぶ折れ線グラフであって格子点  $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$  の少なくとも1つを通る折れ線グラフの数は, 原点  $O$  と格子点  $(n-1, k+1)$  を結ぶ折れ線グラフの数の2倍に等しいことを示せ.
- (3) コインを9回投げる. 1回から  $i$  回までの試行において, 表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を  $T_i$  で表す. このとき各格子点  $(i, T_i), i = 0, 1, 2, \dots, 9$ , を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる. ただし,  $T_0 = 0$  とする.  $T_9 = 3$  が起きたとき, どの  $T_i (i = 1, 2, \dots, 7)$  も3にならない条件つき確率を求めよ.

- 7 平面上の点  $P$  の  $x$  座標と  $y$  座標が、変数  $\theta$  の関数  $f(\theta) = \frac{(\theta - \pi)^2}{2\pi^2} + \frac{1}{2}$  を用いて
- $$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$
- と表されている。 $\theta$  が  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  の範囲で変化したとき、点  $P$  が描く曲線を  $C$  とする。点  $P$  を  $P(\theta)$  で表し、 $P_1 = P(0)$ 、 $P_2 = P\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 、 $P_3 = P(\pi)$  とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 方程式  $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) で与えられる楕円が点  $P_1$  を通るとする。このとき、点  $P_3$  がこの楕円の内部に含まれる (ただし、楕円の上にはない) ための必要十分条件を  $\alpha$  のみを用いて表せ。
- (2) 点  $P_2$  における曲線  $C$  の接線を  $l$  とする。 $l$  の方程式を求めよ。
- (3) 次の条件 (i), (ii), (iii) をみたす楕円  $D$  を考える。
  - (i)  $D$  の軸の一つは  $x$  軸上にある。
  - (ii)  $D$  は点  $P_1, P_2$  を通る。
  - (iii) 点  $P_2$  における  $D$  の接線は  $l$  である。

このとき、点  $P_3$  は楕円  $D$  の内部に含まれるかどうか判定せよ。

- 8 正の実数  $a$  の 3 乗根  $\sqrt[3]{a}$  を近似することを考える。与えられた 2 以上の整数  $p$  に対して関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  を

$$\begin{cases} f(x) = x^p - ax^{p-3} \\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

とする。ここで  $f'(x)$  は  $f(x)$  の導関数である。次の問いに答えよ。

- (1)  $g(x) - \sqrt[3]{a}$  は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{x \text{ の 2 次式}}{x \text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

- (2)  $p = 2$  とする。このとき、 $g(x) - \sqrt[3]{a}$  は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^3 \times \frac{x \text{ の 1 次式}}{x \text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

- (3)  $a = 9$ ,  $p = 2$  とする。 $2 < \sqrt[3]{9} < 2.1$  に注意して、不等式

$$0 < \sqrt[3]{9} - g(2) < \frac{1}{1000}$$

が成り立つことを示せ。また、 $\sqrt[3]{9}$  を小数第 3 位まで求めよ (すなわち、小数第 4 位以下を切り捨てよ)。

9 2次の正方行列  $A$  が零行列でなく  $A^2 = A$  をみたすとき、べき等行列という。次の問いに答えよ。

- (1) 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  はべき等行列であり、かつ  $ad - bc \neq 0$  とする。このとき、 $A$  を求めよ。
- (2) 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  は  $ad - bc = 0$  をみたすとする。このとき、 $A$  がべき等行列であるための必要十分条件を  $a$  と  $d$  のみを用いて表せ。
- (3) 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$  はともにべき等行列とする。 $A + B$  がべき等行列になるとき、 $A + B$  を求めよ。また、そのような  $A, B$  の組を一つあげよ。

## 解答例

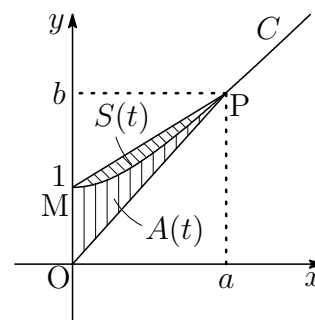
$$\boxed{1} \quad (1) \quad x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, y = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ より } y + x = e^t, y - x = e^{-t}$$

$$\text{ゆえに } (y+x)(y-x) = e^t \cdot e^{-t} \text{ したがって } y^2 - x^2 = 1$$

$$y > 0 \text{ であるから } y = \sqrt{x^2 + 1}$$

- (2)  $P(a, b)$  とすると, 区間  $[0, a]$  における曲線  $C$  および直線  $OP: y = \frac{b}{a}x$  について, (1) の結果から,  $b = \sqrt{a^2 + 1}$  であるから

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} - \frac{b}{a}x &= \frac{a\sqrt{x^2 + 1} - x\sqrt{a^2 + 1}}{a} \\ &= \frac{(a^2 - x^2)}{a(a\sqrt{x^2 + 1} + x\sqrt{a^2 + 1})} \geq 0 \end{aligned}$$



したがって

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^a \left( \sqrt{x^2 + 1} - \frac{b}{a}x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{b}{a}x^2 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{2} \left\{ a\sqrt{a^2 + 1} + \log(a + \sqrt{a^2 + 1}) - ab \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ ab + \log(a + b) - ab \} = \frac{1}{2} \log(a + b) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) = \frac{t}{2} \end{aligned}$$

$$A(t) + S(t) = \frac{1}{2}a \text{ であるから } S(t) = \frac{1}{2}a - A(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{4} - \frac{t}{2}$$

$$(3) \quad f(t) = A(t) - S(t) \text{ とおくと } f(t) = t - \frac{e^t - e^{-t}}{4}$$

$$\text{ゆえに } f'(t) = 1 - \frac{e^t + e^{-t}}{4} = -\frac{e^{-t}}{4}(e^{2t} - 4e^t + 1)$$

$f'(t) = 0$  を解くと ( $t \geq 0$ )

$$t = \log(2 + \sqrt{3})$$

よって, 右の増減表により

$t$	0	...	$\log(2 + \sqrt{3})$	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	極大	↘

$t = \log(2 + \sqrt{3})$  で最大

- 2 (1) 正の奇数  $b$  を, 3 以上の素数  $p_k$  と自然数  $i_k$  を用いて

$$b = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(b) &= (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{i_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{i_2}) \\ &\quad \cdots (1 + p_n + p_n^2 + \cdots + p_n^{i_n}) \\ &= \frac{p_1^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_n^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \end{aligned}$$

$a = 2^m b$  より,  $a = 2^m p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n}$  であるから, 上の結果を利用して

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{p_1^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_n^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \\ &= (2^{m+1} - 1)f(b) \end{aligned}$$

- (2)  $p \geq 2$  より,  $a$  は少なくとも  $pq$ ,  $q$  の 2 個の約数にもつから

$$f(a) \geq pq + q = (p + 1)q$$

等号が成り立つのは,  $a$  の約数が  $pq$ ,  $q$  の 2 個, すなわち,  $pq$  は素数,  $q = 1$  のときである. よって, 等号は  $p$  が素数,  $q = 1$  のときに限り成り立つ.

- (3)  $a = 2^m r$ ,  $b = 2^n s$  を (1) の結果に適用すると

$$f(a) = (2^{m+1} - 1)f(r), \quad f(b) = (2^{n+1} - 1)f(s)$$

$f(a) = 2b$ ,  $f(b) = 2a$  をみたすとき

$$(2^{m+1} - 1)f(r) = 2 \cdot 2^n s, \quad (2^{n+1} - 1)f(s) = 2 \cdot 2^m r$$

ゆえに  $(2^{m+1} - 1)f(r) = 2^{n+1}s$ ,  $(2^{n+1} - 1)f(s) = 2^{m+1}r$  ... ①

①において  $2^{m+1} - 1$  および  $2^{n+1} - 1$  は 2 と互いに素であるから,

$$s = (2^{m+1} - 1)s', \quad r = (2^{n+1} - 1)r' \quad (s', r' \text{ は自然数}) \quad \cdots \text{②}$$

とおける. ②を①に代入すると

$$f(r) = 2^{n+1}s' \cdots \text{③}, \quad f(s) = 2^{m+1}r' \cdots \text{④}$$

②を(2)の結果に適用すると

$$f(s) \geq \{(2^{m+1} - 1) + 1\}s' = 2^{m+1}s' \quad \cdots \text{⑤}$$

$$f(r) \geq \{(2^{n+1} - 1) + 1\}r' = 2^{n+1}r' \quad \cdots \text{⑥}$$

③, ⑥より  $s' \geq r'$  となり, ④, ⑤より  $r' \geq s'$  となるから  $r' = s'$

このとき, ⑤, ⑥において等号が成り立つ.

ゆえに, (2)の結論から,  $2^{m+1} - 1$ ,  $2^{n+1} - 1$  は素数,  $r' = s' = 1$  である. よって, ②より,  $r, s$  は素数であり,  $r = 2^{n+1} - 1$ ,  $s = 2^{m+1} - 1$  となる.

- 3 (1)  $y$  を固定して,  $h(x) = x \log x - (\log y + 1)x + y$  とおくと

$$\begin{aligned} h'(x) &= \log x + 1 - (\log y + 1) \\ &= \log x - \log y \end{aligned}$$

$$h'(x) = 0 \text{ とすると } x = y$$

$h(x)$  の増減表は, 右のようになる.

$x$	0	...	$y$	...
$h'(x)$	/	-	0	+
$h(x)$	/	\	0	/

$$h(x) \geq 0 \text{ であるから } x \log x - x \log y - x + y \geq 0$$

また, 等号が成り立つのは,  $x = y$  のときに限る.

- (2) 閉区間  $[a, b]$  で  $f(x) > 0, g(x) > 0$  であるから, (1) の結果より

$$f(x) \log f(x) - f(x) \log g(x) - f(x) + g(x) \geq 0$$

したがって

$$\int_a^b \{f(x) \log f(x) - f(x) \log g(x) - f(x) + g(x)\} dx \geq 0$$

条件より,  $\int_a^b \{-f(x) + g(x)\} dx = 0$  を上式に代入すると

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x) dx$$

が成り立つ.

$$(3) M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ より } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b M dx$$

したがって, (2) の結果に  $g(x) = M$  を代入して成り立ち,

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log M dx = \log M \int_a^b f(x) dx$$

上式の両辺を  $b - a > 0$  で割ると

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \log M \times \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = M \log M$$

が成り立つ.



## 解説

(1)の結果  $x \log x - x \log y - x + y \geq 0$  について,  $x$  と  $y$  を入れ換えた

$$y \log y - y \log x - y + x \geq 0$$

の両辺を  $y$  で割ると

$$\log y - \log x - 1 + \frac{x}{y} \geq 0$$

ここで,  $a_k > 0$ ,  $p_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$  に対し,

$$\begin{aligned} M &= p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n \\ f(x) &= \log M - \log x - 1 + \frac{x}{M} \end{aligned}$$

とおくと,  $x > 0$  について  $f(x) \geq 0$  が成り立つ. また, 等号が成り立つのは,  $x = M$  のときに限る.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_k f(a_k) &= \sum_{k=1}^n p_k \left( \log M - \log a_k - 1 + \frac{a_k}{M} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( p_k \log M - p_k \log a_k - p_k + \frac{p_k a_k}{M} \right) \\ &= \log M - \sum_{k=1}^n \log a_k^{p_k} - 1 + \frac{M}{M} \\ &= \log M - \log (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}) \end{aligned}$$

$p_k f(a_k) \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) であるから (等号が成り立つのは,  $a_k = M$  のとき)

$$\log M - \log (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}) \geq 0$$

したがって

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n \geq a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは,  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  のとき).

とくに,  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$  とすると, 次式が成り立つ.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

- 4 (1)  $\angle BAC = \theta$  とすると,  $0 < \theta < \pi$  より,  $\sin \theta > 0$  であるから

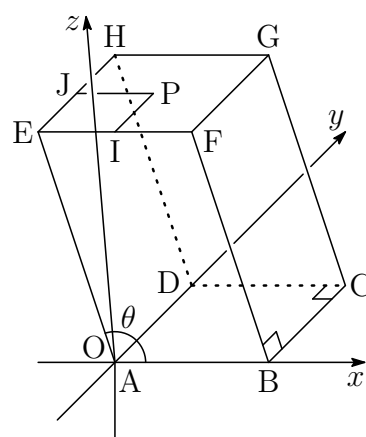
$$\begin{aligned}\Delta ABC &= \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (|\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos \theta)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}\end{aligned}$$

- (2)  $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$  より, 四角形 ABCD は正方形であり,  $\angle FBC = \frac{\pi}{2}$  より, 四角形 FBCD は長方形である. したがって, 面 ABFE  $\perp$  BC. 空間内で点 A, B, D, E の座標を  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $D(0, 1, 0)$ ,  $E(2 \cos \theta, 0, 2 \sin \theta)$  とすると

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= (1, 1, 0) \\ \vec{AP} &= (x + 2 \cos \theta, y, 2 \sin \theta)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}|\vec{AC}|^2 &= 2, \quad |\vec{AP}|^2 = (x + 2 \cos \theta)^2 + y^2 + 4 \sin^2 \theta \\ \vec{AC} \cdot \vec{AP} &= x + 2 \cos \theta + y \text{ であるから} \\ \Delta ACP &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AC}|^2 |\vec{AP}|^2 - (\vec{AC} \cdot \vec{AP})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(y - x - 2 \cos \theta)^2 + 8 \sin^2 \theta}\end{aligned}$$



補足 [http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_kiseki\\_ri.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf) の解説を参照.

- (3)  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  より,  $-1 \leq y - x \leq 1$  であるから, (2) の結果から

- i)  $1 < 2 \cos \theta$  すなわち  $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$  のとき

$$y - x = 1 \text{ で } \Delta ACP \text{ は, 最小値 } \frac{1}{2} \sqrt{9 - 4 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta} \text{ をとる.}$$

- ii)  $-1 \leq 2 \cos \theta \leq 1$  すなわち  $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$  のとき

$$y - x = 2 \cos \theta \text{ で } \Delta ACP \text{ は, 最小値 } \sqrt{2} \sin \theta \text{ をとる.}$$

- iii)  $2 \cos \theta < -1$  すなわち  $\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$  のとき

$$y - x = -1 \text{ で } \Delta ACP \text{ は, 最小値 } \frac{1}{2} \sqrt{9 + 4 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta} \text{ をとる.}$$

5 (1)  $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$  とおく.

点  $A$  を通り,  $BC$  に垂直な直線上の点  $z$  について,  $\frac{z - z_1}{z_3 - z_2}$  は純虚数であるから, その直線の方程式は

$$\frac{z - z_1}{z_3 - z_2} + \overline{\left(\frac{z - z_1}{z_3 - z_2}\right)} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$w_1 = z_1 + z_2 + z_3, |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  であることから, 次式を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{w_1 - z_1}{z_3 - z_2} + \overline{\left(\frac{w_1 - z_1}{z_3 - z_2}\right)} &= \frac{z_2 + z_3}{z_3 - z_2} + \overline{\left(\frac{z_2 + z_3}{z_3 - z_2}\right)} \\ &= \frac{z_2 + z_3}{z_3 - z_2} + \frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2} \\ &= \frac{z_2 + z_3}{z_3 - z_2} + \frac{\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}} = 0 \end{aligned}$$

したがって,  $w_1$  は直線 ① 上にある.

同様にして,  $w_1$  が点  $B$  を通り直線  $CA$  に垂直な直線上の点, および点  $C$  を通り直線  $AB$  に垂直な直線上の点であることを示すことができる. よって,  $w_1$  は  $\triangle ABC$  の垂心である.

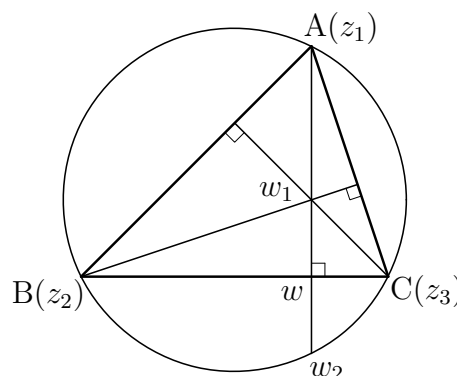
(2) 円  $C$  の方程式は  $|z| = 1$

$w_2 = -\bar{z}_1 z_2 z_3$  より,  $|w_2| = |\bar{z}_1| |z_2| |z_3| = 1$

したがって,  $w_2$  は円  $C$  上の点である. また, 次式を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{w_2 - z_1}{z_3 - z_2} + \overline{\left(\frac{w_2 - z_1}{z_3 - z_2}\right)} &= \frac{-\bar{z}_1 z_2 z_3 - z_1}{z_3 - z_2} + \frac{-z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2} \\ &= \frac{-\bar{z}_1 z_2 z_3 - z_1}{z_3 - z_2} + \frac{-z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_3} - \bar{z}_1}{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}} = 0 \end{aligned}$$

よって,  $w_2$  は, 直線 ① と円  $C$  の交点である.



(3) 2点B, Cを通る直線上の点 $z$ について,  $\frac{z - z_2}{z_3 - z_2}$  は実数であるから, その直線の方程式は

$$\frac{z - z_2}{z_3 - z_2} - \overline{\left(\frac{z - z_2}{z_3 - z_2}\right)} = 0$$

$w_1$  と  $w_2$  の中点を  $w$  とすると  $w = \frac{z_1 + z_2 + z_3 - \bar{z}_1 z_2 z_3}{2}$

このとき

$$\begin{aligned} & \frac{w - z_2}{z_3 - z_2} - \overline{\left(\frac{w - z_2}{z_3 - z_2}\right)} \\ &= \frac{z_1 - z_2 + z_3 - \bar{z}_1 z_2 z_3}{2(z_3 - z_2)} - \overline{\left\{\frac{z_1 - z_2 + z_3 - \bar{z}_1 z_2 z_3}{2(z_3 - z_2)}\right\}} \\ &= \frac{z_1 - z_2 + z_3 - \bar{z}_1 z_2 z_3}{2(z_3 - z_2)} - \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2 + \bar{z}_3 - z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3}{2(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)} \\ &= \frac{z_1 - z_2 + z_3 - \bar{z}_1 z_2 z_3}{2(z_3 - z_2)} - \frac{\bar{z}_1 - \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} - z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_3}}{2\left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}\right)} = 0 \end{aligned}$$

よって,  $w_1$  と  $w_2$  の中点  $w$  は, 直線BC上の点である.

## 解説

3点A( $z_1$ ), B( $z_2$ ), C( $z_3$ )について,  $\triangle ABC$ の外心O, 垂心 $z_1 + z_2 + z_3$ , 重心 $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ が同一直線上にあることがわかる. この直線をオイラー線という.

$w_1$  と  $z_1$  の中点,  $z_2$  と  $z_3$  の中点,  $z_1$  からBCに下ろした垂線の足 $w$ の3点を通る円は,  $\frac{w_1 + z_1}{2}$  と  $\frac{z_2 + z_3}{2}$  を直径の両端とする円で, 中心は

$$\frac{1}{2} \left( \frac{w_1 + z_1}{2} + \frac{z_2 + z_3}{2} \right) = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2}$$

同時に,  $\frac{w_1 + z_2}{2}$  と  $\frac{z_3 + z_1}{2}$ , および  $\frac{w_1 + z_3}{2}$  と  $\frac{z_1 + z_2}{2}$  を直径の両端とする円でもある. この方程式は

$$\left| z - \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

であり, この円を9点円という. その中心もオイラー線上にあり, 外心と垂心の midpoint である. また, その半径は外接円の半径の $\frac{1}{2}$ である.

- 6 (1) 原点  $O$  から格子点  $(n, k)$  を結ぶ折れ線グラフが存在するとき、右斜め  $45^\circ$  の方向に  $\frac{n+k}{2}$  回、右斜め  $-45^\circ$  の方向に  $\frac{n-k}{2}$  回進む。

$$\frac{n-k}{2} = \frac{n+k}{2} - k$$

であるから、 $\frac{n+k}{2}$  が整数であればよい。したがって  $n+k$  は偶数である。逆に  $n+k$  が偶数、すなわち  $n+k = 2m$  をみたす整数  $m$  が存在するとき、折れ線グラフは、右斜め  $45^\circ$  の方向に  $m$  回、右斜め  $-45^\circ$  の方向に  $m-k$  回 (または  $n-m$  回) 進む。

また、原点  $O$  から格子点  $(n, k)$  を結ぶ折れ線グラフの数は  ${}_n C_{\frac{n+k}{2}}$

- (2) 原点  $O$  と格子点  $(n, k)$  を結ぶ折れ線グラフで、最初に直線  $y = k$  と交わる格子点を  $A(a, k)$  とする ( $0 \leq a \leq n-2$ )。  $A$  と格子点  $(n-1, k+1)$  を通る折れ線グラフの数、  $A$  と格子点  $(n-1, k-1)$  を通る数は、直線  $y = k$  に関する対称性によりその数は等しくともに  $N$  とおく。また、原点  $O$  と格子点  $(n, k)$  を結ぶ折れ線グラフで、格子点  $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$  の少なくとも1つを通る数はそれらの和で

$$N + N = 2N$$

である。したがって、原点  $O$  と格子点  $(n, k)$  を結ぶ折れ線グラフで、格子点  $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$  の少なくとも1つを通る数は、原点  $O$  と格子点  $(n-1, k+1)$  を通る折れ線グラフの数の2倍に等しい。

- (3) 2つの事象  $A, B$  を  $A: T_9 = 3, B: \text{すべての } i(i = 1, 2, \dots, 7) \text{ で } T_i \neq 3$  とすると

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = 1 - \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)}$$

原点  $O$  と点  $(9, 3)$  を結ぶ折れ線グラフの数は、(1)の結果より  ${}_9 C_6$  (本)

したがって  $P(A) = \frac{{}_9 C_6}{2^9}$

原点  $O$  と点  $(9, 3)$  を結ぶ折れ線グラフで、少なくとも  $(1, 3), (2, 3), \dots, (7, 3)$  を通る数は、(2)の結果から、 $O$  と  $(8, 4)$  を結ぶ折れ線グラフの数の2倍であるから、(1)の結果より  $2 \times {}_8 C_6$  (本)

したがって  $P(A \cap \bar{B}) = \frac{2 \times {}_8 C_6}{2^9}$

よって  $P_A(B) = 1 - \frac{2 \times {}_8 C_6}{{}_9 C_6} = 1 - \frac{2 \times 8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{3}$

## 解説

1次元ランダム・ウォーク (Random walk) [離散型] の最も基本的なモデルである．右斜め  $45^\circ$ ，または右斜め  $-45^\circ$  の方向に格子点をとっていく確率がともに  $\frac{1}{2}$  であるから，折れ線グラフの数に注目するとよい．

左下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフの総数を示したもので，パスカルの三角形を横に倒した配置になっている．右下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフで，すべての  $i (i = 1, 2, \dots, 7)$  で  $T_i \neq 3$  である数を示したものである．(3) の条件つき確率は，下の 2 つの表における原点と点  $(9, 3)$  を結ぶ折れ線グラフの数から  $\frac{28}{84} = \frac{1}{3}$

		$n$									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$k$	9										1
	8									1	
	7								1		9
	6							1		8	
	5						1		7		36
	4					1		6		28	
	3				1		5		21		<b>84</b>
	2			1		4		15		56	
	1		1		3		10		35		126
	0	1		2		6		20		70	
	-1		1		3		10		35		126
	-2			1		4		15		56	
	-3				1		5		21		84
	-4					1		6		28	
	-5						1		7		36
	-6							1		8	
	-7								1		9
-8									1		
-9										1	

折れ線グラフの数

		$n$									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$k$	3										<b>28</b>
	2			1		3		9		28	
	1		1		3		9		28		90
	0	1		2		6		19		62	
	-1		1		3		10		34		117
	-2			1		4		15		55	
	-3				1		5		21		83
	-4					1		6		28	
	-5						1		7		36
	-6							1		8	
	-7								1		9
	-8									1	
	-9										1

すべての  $i (i = 1, 2, \dots, 7)$  で  $T_i \neq 3$  の数

(1) の結果から，原点  $O$  と格子点  $(n, k)$  を結ぶ折れ線グラフの数は  ${}_n C_{\frac{n+k}{2}}$  である．また，(2) の結果から，原点  $O$  と格子点  $(n, k)$  を結ぶ折れ線グラフであって格子点  $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$  の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点  $O$  と格子点  $(n-1, k+1)$  を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいから， $n$  のときはじめて  $k$  になるグラフの数は

$${}_n C_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1} C_{\frac{n+k}{2}} = {}_n C_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n} \cdot {}_n C_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_n C_{\frac{n+k}{2}}$$

これは，原点  $O$  と格子点  $(n, k)$  を結ぶ折れ線グラフの本数の  $\frac{k}{n}$  倍．

よって，求める条件付き確率は  $\frac{k}{n}$  となる．

$$\boxed{7} \quad (1) \quad f(0) = 1 \text{ より } P_1(1, 0), \quad f(\pi) = \frac{1}{2} \text{ より } P_3\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$P_1 \text{ は } C \text{ 上にあるから} \quad \frac{(1-\alpha)^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$$

$$P_3 \text{ は } C \text{ の内部にあるから} \quad \frac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} < 1$$

$$\text{上の2式から} \quad \frac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} < \frac{(1-\alpha)^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}$$

$$\text{ゆえに} \quad \left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2 < (1-\alpha)^2 \quad \text{よって} \quad \alpha < \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{8} \text{ より } P_2\left(0, \frac{5}{8}\right), \quad f'(\theta) = \frac{\theta - \pi}{\pi^2} \text{ であるから } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta \text{ より}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \quad \frac{dx}{d\theta} = -\frac{5}{8}, \quad \frac{dy}{d\theta} = -\frac{1}{2\pi}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^{-1} = \frac{4}{5\pi}$$

$$\text{よって, } l \text{ の方程式は} \quad y = \frac{4}{5\pi}x + \frac{5}{8}$$

(3)  $D$  の軸の一つは  $x$  軸上にあるから, その中心を  $(k, 0)$  とする. また,  $D$  は  $P_1$  を通るから, 楕円  $D$  を  $\frac{(x-k)^2}{(1-k)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  とおく.

$$\text{また, } D \text{ は } P_2 \text{ を通るから} \quad \frac{k^2}{(1-k)^2} + \frac{25}{64b^2} = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$P_2 \text{ における } D \text{ の接線の方程式は} \quad \frac{(0-k)(x-k)}{(1-k)^2} + \frac{5y}{8b^2} = 1$$

この接線の傾き  $\frac{8b^2k}{5(1-k)^2}$  が  $l$  の傾きと等しいので

$$\frac{4}{5\pi} = \frac{8b^2k}{5(1-k)^2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{b^2} = \frac{2\pi k}{(1-k)^2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

②を①に代入し, 整理すると

$$\frac{k^2}{(1-k)^2} + \frac{25\pi k}{32(1-k)^2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad (25\pi + 64)k = 32$$

$$\text{ゆえに} \quad k = \frac{32}{25\pi + 64} < \frac{32}{64 + 64} = \frac{1}{4}$$

よって, (1)の結果により,  $P_3$  は  $D$  の内部にある.

補足 頂点  $(2k-1, 0)$  により  $2k-1 < -\frac{1}{2}$  を示してもよい

8 (1)  $\alpha = \sqrt[3]{a}$  とおくと,  $f(x) = x^p - \alpha^3 x^{p-3}$  より

$$\begin{aligned} g(x) - \alpha &= x - \frac{x^p - \alpha^3 x^{p-3}}{px^{p-1} - (p-3)\alpha^3 x^{p-4}} - \alpha \\ &= x - \alpha - \frac{x(x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{px^3 - (p-3)\alpha^3} \\ &= (x-\alpha) \times \frac{px^3 - (p-3)\alpha^3 - x(x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{px^3 - (p-3)\alpha^3} \\ &= (x-\alpha)^2 \times \frac{(p-1)x^2 + (p-2)\alpha x + (p-3)\alpha^2}{px^3 - (p-3)\alpha^3} \end{aligned}$$

よって, 次式が成り立ち,  $p \geq 2$ ,  $p-1 \geq 1$  より, 題意をみtas.

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{(p-1)x^2 + (p-2)\sqrt[3]{a}x + (p-3)\sqrt[3]{a}^2}{px^3 - (p-3)a}$$

(2) (1) の結果に  $p=2$  を代入すると, 次式が成り立ち, 題意をみtas.

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{x^2 - \sqrt[3]{a}^2}{2x^3 + a} = (x - \sqrt[3]{a})^3 \times \frac{x + \sqrt[3]{a}}{2x^3 + a}$$

(3) (2) の結果から  $\sqrt[3]{a} - g(x) = (\sqrt[3]{a} - x)^3 \times \frac{x + \sqrt[3]{a}}{2x^3 + a}$

これに  $x=2$ ,  $a=9$  を代入すると

$$\sqrt[3]{9} - g(2) = (\sqrt[3]{9} - 2)^3 \times \frac{2^2 + \sqrt[3]{2}}{2 \cdot 2^3 + 9}$$

$2 < \sqrt[3]{9} < 2.1$  より

$$0 < (\sqrt[3]{9} - 2)^3 \times \frac{2^2 + \sqrt[3]{2}}{2 \cdot 2^3 + 9} < (2.1 - 2)^3 \times \frac{2^2 + 2.1}{2 \cdot 2^3 + 9} < \frac{1}{1000}$$

したがって  $0 < \sqrt[3]{9} - g(2) < \frac{1}{1000}$  ゆえに  $g(2) < \sqrt[3]{9} < g(2) + 0.001$

このとき,  $f(x) = x^2 - \frac{9}{x}$ ,  $f'(x) = 2x + \frac{9}{x^2}$  より

$$f(2) = 2^2 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}, \quad f'(2) = 2 \cdot 2 + \frac{9}{2^2} = \frac{25}{4}$$

ゆえに  $g(2) = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \div \frac{25}{4} = 2.08$

したがって  $2.08 < \sqrt[3]{9} < 2.081$

よって,  $\sqrt[3]{9}$  の小数第4位を切り捨てると 2.080



## 解説

求解アルゴリズムの一つであるニュートン法 (Newton's method) に基づく出題である。方程式  $f(x) = 0$  の解  $a$  の近くの  $x_1$  をとり、その点における接線

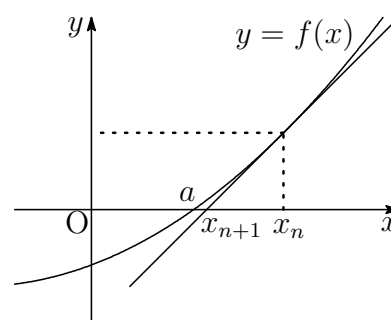
$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

が  $x$  軸と交わる点の  $x$  座標  $x_2$  とすると

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

これをアルゴリズム化した

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \dots (*)$$



による近似解析をニュートン法という。なお、 $\{x_n\}$  は  $a$  に収束する場合が多いが、必ずしも保証されたものではない。

本題 (3) において、 $0 < x_n < \sqrt[3]{9}$  のとき

$$f(x_n) = x_n^2 - \frac{9}{x_n} = \frac{x_n^3 - 9}{x_n^3} < 0, \quad f'(x_n) = 2x_n + \frac{9}{x_n^2} > 0$$

であるから、(\*) より  $x_{n+1} > x_n$

本題 (2) から

$$\sqrt[3]{9} - x_{n+1} = (\sqrt[3]{9} - x_n)^3 \times \frac{x_n + \sqrt[3]{9}}{2x_n^3 + 9} \quad \dots (**)$$

したがって  $x_{n+1} < \sqrt[3]{9}$  ゆえに  $0 < x_n < x_{n+1} < \sqrt[3]{9}$

このとき、(\*\*) から

$$0 < \sqrt[3]{9} - x_{n+1} < (\sqrt[3]{9} - x_n)^3 \times \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{9}}{2 \cdot 0^3 + 9} < (\sqrt[3]{9} - x_n)^3$$

したがって  $0 < \sqrt[3]{9} - x_n < (\sqrt[3]{9} - x_1)^{3^{n-1}}$

$x_1 = 2$  とすると  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[3]{9}$

なお、 $x_1 = 2$ 、 $x_2 = 2.08$  であるが、 $n = 3$  ではかなり精度が向上する。

$$\sqrt[3]{9} \doteq 2.080083823051904 \dots$$

$$x_3 = 2.080083823051814$$

9 (1)  $\det A = ad - bc \neq 0$  より,  $A$  は正則である.

よって,  $A^2 = A$  の両辺に  $A^{-1}$  を掛けると  $A = E$

(2) ハミルトン・ケリーの公式により

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O \quad \dots(*)$$

これに  $A^2 = A$ ,  $ad - bc = 0$  を代入すると  $(a + d - 1)A = O$

$A \neq O$  であるから,  $a + d - 1 = 0$  ゆえに  $a + d = 1$

逆に,  $a + d = 1$  のとき,  $ad - bc = 0$  であるから, これを (\*) に代入すると,  $A^2 = A$  が成り立つ.

よって,  $ad - bc = 0$  のとき,  $A$  がべき等行列であるための必要十分条件は

$$a + d = 1$$

(3) (1),(2) の結果から, 次のことが分かる.

べき等行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  について,  $\operatorname{tr} A = a + d$  とすると

$$\det A \neq 0 \text{ のとき } \operatorname{tr} A = 2 \quad (A = E \text{ より})$$

$$\det A = 0 \text{ のとき } \operatorname{tr} A = 1$$

が成り立つ.

一般に,  $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$  が成り立つ.

したがって,  $A, B, A + B$  がべき等行列であるとき, 上式より

$$\operatorname{tr} A = 1, \quad \operatorname{tr} B = 1, \quad \operatorname{tr}(A + B) = 2$$

である. よって  $A + B = E$

これを満たす  $A, B$  の組の一つは

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

補足 (3) は一般には,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 - a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

ただし,  $a(1 - a) - bc = 0$ .