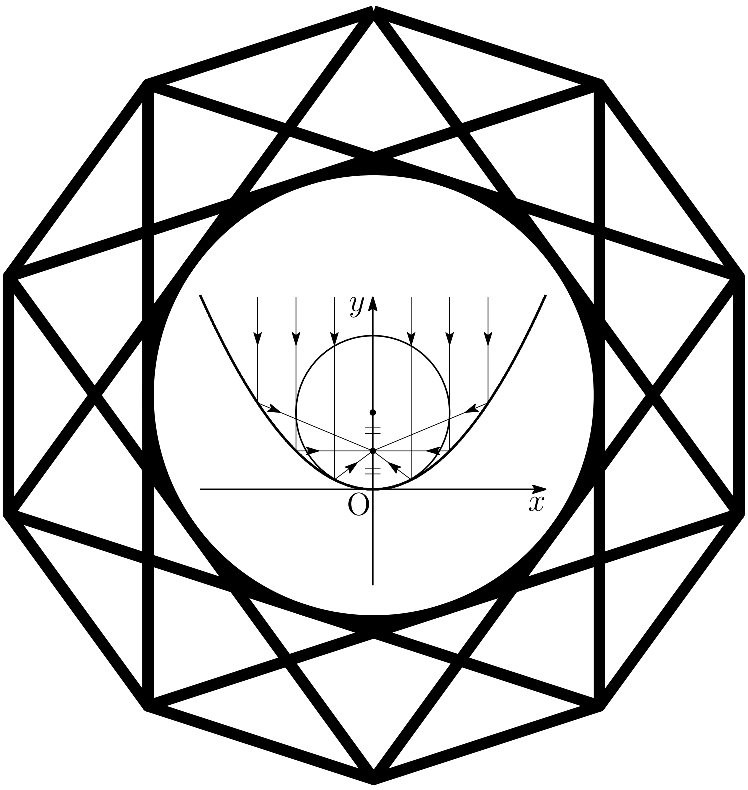
入試の軌跡

九州大学　理系

2001 − 2010

数　学



2025 年 4 月 3 日

Typed by LaTeX 2ε

序

本書には，九州大学 (理系) が実施した平成 13 年 (2001 年) 度から平成 22 年 (2010 年) 度までの一般前期試験問題 (数学) および解答例をすべて掲載した．
本書の作成にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．

2. ICT 教材として，電子黒板やプロジェクターでの使用を視野に入れており，この機能を利用する際には，全画面表示 ($\boxed{\text{Ctrl}}$+L) および描画領域に合わせる ($\boxed{\text{Ctrl}}$+3) と見やすくなる．ページスクロールには，($\boxed{\text{Ctrl}}$+▲，$\boxed{\text{Ctrl}}$+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る ($\boxed{\text{Alt}}$+◀)，進む ($\boxed{\text{Alt}}$+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには $\boxed{\text{ESC}}$．

3. スマートフォンでの使用も想定し，ページリンクの操作性を配慮した ICT 教材でもある．問題および解答には相互リンクを施した．各問の解答の終わりにある ■ をクリックすると，各大学の出題分野に戻る．また，出題分野の左上にある ◀ をクリックすると，最初のページに戻る．

上の 2，3 の機能をサポートする PDF ブラウザとして，Adobe Reader をご使用ください (フリーソフト)．スマートフォンには，同アプリがインストールされていない場合が多いので，同アプリをインストールされてからご使用ください．

令和 7 年 4 月　西村　信一

目 次

第 10 章　九州大学

出題分野 (2001-2010) 150 分

◀	九州大学	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
	数と式										
I	2 次関数										
	図形と計量										1
	データの分析										
	式と証明										
	複素数と方程式										
II	図形と方程式			2							
	三角関数					4		5	5		
	指数関数と対数関数					4					
	微分法と積分法	1		8							
	式と曲線										
	複素数平面	4	5	5		3					
	関数						5				
III	極限	8		3							3
	微分法とその応用	2	7·8			5	1		1	5	3
	積分法		3	9	1		4				
	積分法の応用	3·7	1	1	3	1		1	4	3	4
	場合の数と確率	5	6	6	5			4	2	2	2
A	整数の性質		2								
	図形の性質										
	平面上のベクトル						2		3	1	
	空間のベクトル		4	4	4			3			
B	数列						3				
	確率分布と統計										
	コンピュータ	6									
C	行列 (旧課程)	9	9	7	2	2		2		4	5

数字は問題番号

10.1 2001 年 (150 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 1 題選択，$\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ から 1 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a = 0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) 直線 $mx + ny = 0$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。ただし m，n は共には 0 でないとする。

(4) G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は一辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。$0 < r \leqq \sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

(1) 高さが $z = t$ $(-r \leqq t \leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2) K の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3) $0 < r \leqq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。

4 複素数平面上の点 z を考える。

(1) 実数 a，c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p，q に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q}) = \overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか。

5 サイコロを n 回振って，出た目を小さい方から順に並べ，第 i 番目を X_i $(i = 1, \cdots, n)$ とする。

(1) $n = 7$ のとき，3 の目が 3 回，5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。

(2) 一般の n に対して，$X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ。

(3) 一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(E(X_1) - 1)$ を求めよ。ここで log は自然対数を表す。

(5) 一般の n に対して，期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ。

6 m，n を自然数とする。次の算法を考える。

(a) $i = m$，$j = n$，$k = 0$.

(b) $i = 1$ ならば $\mathrm{Ans} = k + j$ として終了する.

(c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする.

(d) $i = [i/2]$.　(e) $j = 2 * j$.　(f) (b) にもどる.

(ここで，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。)

(1) $m = 100$ のとき，3 周目と 4 週目の (b) における i，j，k の値を求めよ。たとえば 1 周目では $i = 100$，$j = n$，$k = 0$ である。

(2) 一般の m に対して，(b) における i，j，k の値について $i * j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。

(3) 一般の m に対して，Ans を求めよ。

(4) l を自然数とする。$m = 3{\cdot}2^l$ のとき，終了するまでに何回 (d) を実行するか。

7 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし，関数 $y = f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし，$\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2} < \theta(t) < \dfrac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする。また，点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2) $\alpha(t)$，$\beta(t)$ を求めよ。

(3) t が a から b $(a < b)$ まで変化するとき，点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1，L_2 とする。$L_2 - L_1$ を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。

8 (1) e を自然対数の底とし，$f(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2}x^2\right)$ とおく。
$0 < x < 1$ においては $0 < f(x) < x^3$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ を示せ。
必要であれば $e < 3$ を使ってよい。

(2) 関数 $g(x) = e^x$ を考える。区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 個の小区間に等分して，各小区間を底辺，小区間の左端の点における関数 $g(x)$ の値を高さとする長方形の面積の和を K_n とする。$n \to \infty$ のとき

$$n^k \left| \int_0^1 g(x)\,dx - K_n \right|$$

が有限の値に収束するような最大の自然数 k とそのときの極限値を求めよ。

9 p，q を整数とし，x，y を未知数とする連立 1 次方程式 $\begin{cases} 4x + 9y = p \\ 2x + 6y = q \end{cases}$ を考える。

(1) この方程式を行列を用いて表し，係数行列の逆行列を求めよ。

(2) 上の連立方程式の解 x，y が共に整数であるような組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。ただし $0 \leqq p \leqq 5$，$0 \leqq q \leqq 5$ とする。

(3) 正の整数 d で，「d のどんな倍数 p，q に対しても上の連立方程式の解 x，y が整数になる」ものが存在することを示せ。

(4) (3) における d のうちで最小のものを求めよ。

解答例

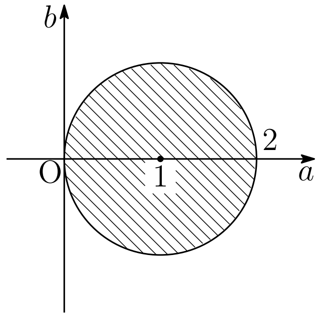
$\boxed{1}$ (1) $f(x)$ を微分すると，$f'(x) = 2ax^2 + 2(a+b)x + b + 1 \qquad \cdots (*)$

$a \neq 0$ のとき，すべての自然数 x に対して，$f'(x) \geqq 0$ となるための条件は

$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると　　$2a > 0,\ \ D \leqq 0$

$D/4 = (a+b)^2 - 2a(b+1) = a^2 + b^2 - 2a \cdots$ ① により

$$a > 0,\ \ (a-1)^2 + b^2 \leqq 1$$



$a = 0$ のとき　$f(x) = bx^2 + (b+1)x$ となる．

これがつねに増加するためには　$b = 0$

すなわち $f(x) = x$ となり，条件を満たす．

よって　$a > 0$ のとき　$(a-1)^2 + b^2 \leqq 1$

　　　　$a = 0$ のとき　$b = 0$

したがって　$(a-1)^2 + b^2 \leqq 1$

これを ab 平面上に図示すると，右の図のような円 $(a-1)^2 + b^2 = 1$ の内部で，境界線を含む．

(2) $a = 0$ のとき　$f(x) = bx^2 + (b+1)x$

$b \geqq 0$ は，$x > -1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$f(x)$ を微分すると　　$f'(x) = 2bx + b + 1$

$b > 0$ のとき，$f'(-1) \geqq 0$ であることが条件であるから

$$b > 0,\ \ 2b(-1) + b + 1 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < b \leqq 1$$

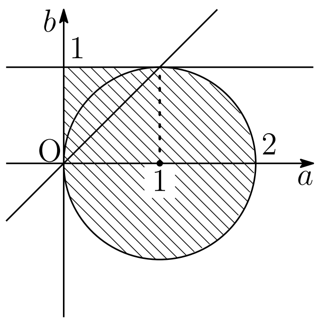
$b = 0$ のとき　$f(x) = x$ となり，これは条件を満たす．

よって　　　　$\mathbf{0 \leqq b \leqq 1}$

(3) $a \geqq 0$ は，$x > -1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$a = 0$ の場合が (2) であり，$a > 0$，$D \leqq 0$ の場合が (1) である．

したがって，$a > 0$，$D > 0$ の場合を求める．



$(*)$ より

$$f'(x) = 2a\left(x + \frac{a+b}{2a}\right)^2 - \frac{a^2 + b^2 - 2a}{2a}$$

ゆえに　$-\dfrac{a+b}{2a} \leqq -1$，$f'(-1) = -b + 1 \geqq 0$

$D > 0$ であるから，① より　$a^2 + b^2 - 2a > 0$

これを解いて　$a > 0$，$b \geqq a$，$b \leqq 1$，$(a-1)^2 + b^2 > 1$

求める領域は，右の図のように (1)，(2) の結果および上式をまとめた領域で，境界線を含む．　■

2 (1) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$\dfrac{x+X}{2}=p$，$\dfrac{y+Y}{2}=q$

よって，求める点の座標は　$\boldsymbol{(2p-X,\ 2q-Y)}$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおくと，任意の定数 p に対して

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+(x-p)^3 \quad \cdots ①$$

が成り立つ．G の点 $(p,\ f(p))$ に関して $y=f(x)$ と対称なグラフは

$$2f(p)-y=f(2p-x) \quad \text{ゆえに} \quad y=2f(p)-f(2p-x) \quad \cdots ②$$

② のグラフは ① より

$$\begin{aligned} y &= 2f(p)-\{f(p)+f'(p)(2p-x-p) \\ &\qquad +\frac{1}{2}f''(p)(2p-x-p)^2+(2p-x-p)^3\} \\ &= f(p)+f'(p)(x-p)-\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+(x-p)^3 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

$f''(p)=0$，すなわち $p=-\dfrac{a}{3}$ とすると，①，③ は一致する．

したがって，G は変曲点に関して対称である．

(3) 直線 $mx+ny=0$ の方向ベクトル $\vec{d}$，法線ベクトル $\vec{n}$ を

$$\vec{d}=\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix},\quad \vec{n}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

とする．実数 s，t を用いて

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=s\vec{d}+t\vec{n}=s\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ns+mt \\ -ms+nt \end{pmatrix}$$

とすると　$s=\dfrac{nX-mY}{m^2+n^2}$，$t=\dfrac{mX+nY}{m^2+n^2}$

したがって，直線 $mx+ny=0$ に関して点 $(X,\ Y)$ と対称な点は

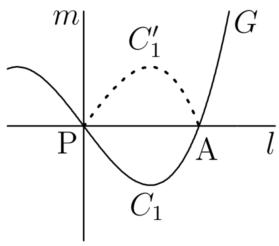
$$\begin{aligned} s\vec{d}-t\vec{n} &= \frac{nX-mY}{m^2+n^2}\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix}-\frac{mX+nY}{m^2+n^2}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2+n^2}\begin{pmatrix} -(m^2-n^2)X-2mnY \\ -2mnX+(m^2-n^2)Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\left(\dfrac{-(m^2-n^2)X-2mnY}{m^2+n^2},\ \dfrac{-2mnX+(m^2-n^2)Y}{m^2+n^2}\right)}$

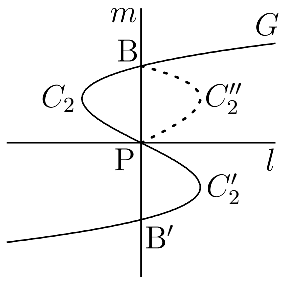
(4) G がある直線 l に関して対称であるとき，G の変曲点 P が l 上にないと仮定すると，P と l に関して対称な変曲点 P' が G にあり，G に 2 個の変曲点が存在することとなる．このことは G が 3 次関数のグラフであることに反する．したがって，P は l 上にある．

P を通り，l に垂直な直線を m とする．G は P に関して対称であるから，G と l，m の位置関係について次のようになる．

i) G が P 以外に l と共有点 A をもつと仮定すると，P から A までの G の曲線部分を C_1 とすると，C_1 と l に関して対称な曲線部分 C_1' があり，C_1 および C_1' によるループ (loop) ができ，これは G が 3 次関数であることに反する．

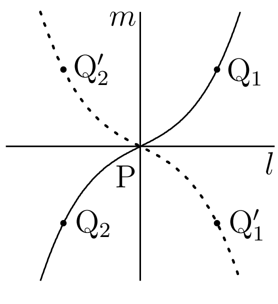


ii) G が P 以外に m と共有点 B をもつと仮定すると，P から B までの G の曲線部分を C_2 とすると，C_2 と P に関して対称な曲線部分 C_2' があり，さらに C_2' と l に関して対称な C_2'' がある．C_2 および C_2'' によるループができ，これは G が 3 次関数であることに反する．



したがって，i)，ii) により，G と l，m との共有点は P に限る．

G 上に P と異なる点 Q_1 をとり，Q_1 と P に関して対称な点を Q_2 とし，2 点 Q_1，Q_2 と l に関して対称な点をそれぞれ Q_1'，Q_2' とする．このとき，これらの 4 点を結ぶ曲線部分は，P において自己交差 (Self-Intersection) し，G が 3 次関数であることに反する．
よって，題意は成立する．



補足 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を $x = p$ でテイラー展開を行うと

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2 + a(x-p)^3$$

であり，$f''(p) = 0$，すなわち $p = -\dfrac{b}{3a}$ とすると，曲線 $y = f(x)$ は

$$y = f(p) + f'(p)(x-p) + a(x-p)^3$$

となり，変曲点 $(p,\ f(p))$ に関して対称である．よって，(4) の結果から，3 次関数のグラフは，どんな直線に関しても線対称ではない．

解説

$f(t)$ を必要な回数だけ微分可能 (C^∞級) な関数とし，$k \geqq 1$ とする．

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt &= -\int_a^x \left\{\frac{(x-t)^k}{k!}\right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

上式を $k = 1, 2, 3, \ldots n-1$ について辺々を加えると

$$\int_a^x f'(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \tag{10.1}$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ が最大値，最小値をもつとき，それらをそれぞれ M，m とすると，$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$ は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M\,dt = \frac{M}{n!}(x-a)^n, \quad \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} m\,dt = \frac{m}{n!}(x-a)^n$$

の間の値をとるので，この区間内のある c は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{10.2}$$

を満たす．(10.2) を (10.1) に代入すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{10.3}$$

(10.3) を $f(x)$ の $x = a$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion) という．解答の ① は，$f(x)$ の $x = p$ におけるテイラー展開である．

とくに $a = 0$ とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n$$

となり，これをマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) という． ■

3 (1) 平面 $z=t\ (-r \leqq t \leqq r)$，円柱 $y^2+z^2 \leqq r^2$，正四角柱 $|x|+|y| \leqq \dfrac{2}{r}$ で囲まれた領域は

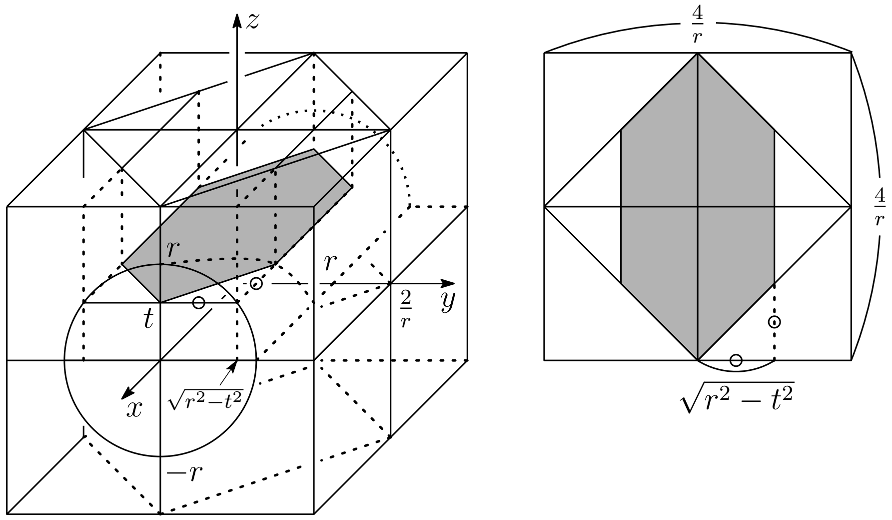
$$z=t,\quad -\sqrt{r^2-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-t^2},\quad -\left(\frac{2}{r}-|y|\right) \leqq x \leqq \frac{2}{r}-|y|$$

よって，求める面積を $S(t)$ とすると

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{-\sqrt{r^2-t^2}}^{\sqrt{r^2-t^2}} 2\left(\frac{2}{r}-|y|\right)dy = 4\int_0^{\sqrt{r^2-t^2}}\left(\frac{2}{r}-|y|\right)dy \\ &= 4\int_0^{\sqrt{r^2-t^2}}\left(\frac{2}{r}-y\right)dy = 4\left[\frac{2y}{r}-\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{r^2-t^2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}-2(r^2-t^2)} \end{aligned}$$

別解 K を $z=t$ で切った断面は下の図のようになる．

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{4}{r}\times 2\sqrt{r^2-t^2}-4\times\frac{1}{2}(\sqrt{r^2-t^2})^2 \\ &= \frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}-2(r^2-t^2) \end{aligned}$$



(2) (1) の結果から，$V(r)$ は

$$
\begin{aligned}
V(r) &= \int_{-r}^{r} S(t)\,dt \\
&= \int_{-r}^{r} \left\{ \frac{8}{r}\sqrt{r^2 - t^2} - 2(r^2 - t^2) \right\} dt \\
&= \frac{16}{r}\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - t^2}\,dt - 4\int_{0}^{r} (r^2 - t^2)\,dt \\
&= \frac{16}{r}\cdot\frac{\pi r^2}{4} - 4\left[\, r^2 t - \frac{t^3}{3} \,\right]_0^r \\
&= \boldsymbol{4\pi r - \frac{8}{3}r^3}
\end{aligned}
$$

(3) $V(r) = 4\pi r - \dfrac{8}{3}r^3$ $(0 < r \leqq \sqrt{2})$ より

$$
V'(r) = 4\pi - 8r^2 = -8\left(r + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\left(r - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)
$$

増減表は，次のようなる．

r	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める最大値は

$$
V\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi^{\frac{3}{2}}}
$$

■

4 (1) $az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ (a，c は実数) より

$$a^2z\overline{z}+a(\overline{b}z+b\overline{z})+b\overline{b}=b\overline{b}-ac$$

ゆえに　$(az+b)(a\overline{z}+\overline{b})=|b|^2-ac$

したがって　$|az+b|^2=|b|^2-ac$

$|b|^2-ac>0$ より　$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$

よって，z は**中心** $\boldsymbol{-\dfrac{b}{a}}$**，半径** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}}$ **の円を描く．**

(2) $d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$ より

$$i(d-\overline{d})z\overline{z}+i(\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q})z+i(\overline{d}q-dp)\overline{z}+i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)=0 \quad \cdots ①$$

i) $d\neq\overline{d}$ のとき (d は虚数)

$$a=i(d-\overline{d}),\quad b=i(\overline{d}q-dp),\quad c=i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)$$

とおくと，a，c は実数であり，① から　$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$
したがって，(1) の結果により

$$\begin{aligned}|b|^2-ac&=b\overline{b}-ac\\&=i(\overline{d}q-dp)\cdot(-i)(d\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p})-i(d-\overline{d})\cdot i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)\\&=|d|^2(|p|^2-p\overline{q}-\overline{p}q+|q|^2)\\&=|d(p-q)|^2\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}=\left|\frac{d(p-q)}{d-\overline{d}}\right|,\quad -\frac{b}{a}=-\frac{i(\overline{d}q-dp)}{i(d-\overline{d})}=\frac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}$$

よって，z は**中心** $\boldsymbol{\dfrac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}}$**，半径** $\boldsymbol{\left|\dfrac{d(p-q)}{d-\overline{d}}\right|}$ **の円を描く．**

ii) $d=\overline{d}$ のとき (d は実数)

$d=\overline{d}\neq 0$ より　$(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$

したがって　$\dfrac{z-p}{z-q}=\overline{\left(\dfrac{z-p}{z-q}\right)}$　ゆえに，$\dfrac{z-p}{z-q}$ は実数である．

よって，z は **2 点** $\boldsymbol{p}$**，**$\boldsymbol{q}$ **を通る直線を描く．** ■

$\boxed{5}$ (1) 次の 6 通りに分類できる.

$$\begin{array}{ll} X_1\,X_2\,3\,3\,3\,5\,5 \text{ のとき} & X_4 = 3 \\ X_1\,3\,3\,3\,X_5\,5\,5 \text{ のとき} & X_4 = 3 \\ X_1\,3\,3\,3\,5\,5\,X_7 \text{ のとき} & X_4 = 3 \\ 3\,3\,3\,X_4\,X_5\,5\,5 \text{ のとき} & X_4 = 3, 4, 5 \\ 3\,3\,3\,X_4\,5\,5\,X_7 \text{ のとき} & X_4 = 3, 4, 5 \\ 3\,3\,3\,5\,5\,X_6\,X_7 \text{ のとき} & X_4 = 5 \end{array}$$

よって，X_4 のとりうる値は　$\mathbf{3, 4, 5}$

(2) $P(X_1 = 2) = P(X_1 \geqq 2) - P(X_1 \geqq 3) = \boldsymbol{\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

(3) $1 \leqq k \leqq 6$ のとき　$P(X_1 = k) = \left(\dfrac{7-k}{6}\right)^n - \left(\dfrac{6-k}{6}\right)^n$

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{k=1}^{6} kP(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{6-k}{6}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{5} (k+1)\left(\frac{6-k}{6}\right)^n - \sum_{k=0}^{5} k\left(\frac{6-k}{6}\right)^n \\ &= \frac{1}{6^n}\sum_{k=0}^{5}(6-k)^n \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n)} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果から　$E(X_1) - 1 = \dfrac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n)$

したがって　$\left(\dfrac{5}{6}\right)^n < E(X_1) - 1 < 5\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

$$n\log\frac{5}{6} < \log(E(X_1) - 1) < \log 5 + n\log\frac{5}{6}$$

ゆえに　$\log\dfrac{5}{6} < \dfrac{1}{n}\log(E(X_1) - 1) < \dfrac{1}{n}\log 5 + \log\dfrac{5}{6}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log 5 + \log\frac{5}{6}\right) = \log\frac{5}{6}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(E(X_1) - 1) = \log\frac{5}{6}}$$

(5) $2 \leqq k \leqq 6$ のとき

$$
\begin{aligned}
P(X_n = k) &= P(X_n \leqq k) - P(X_n \leqq k-1) \\
&= \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n
\end{aligned}
$$

$P(X_n = 1) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ であるから，上式は $k = 1$ のときも成り立つ.

ゆえに，$1 \leqq k \leqq 6$ のとき　$P(X_n = k) = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{6}\right)^n$

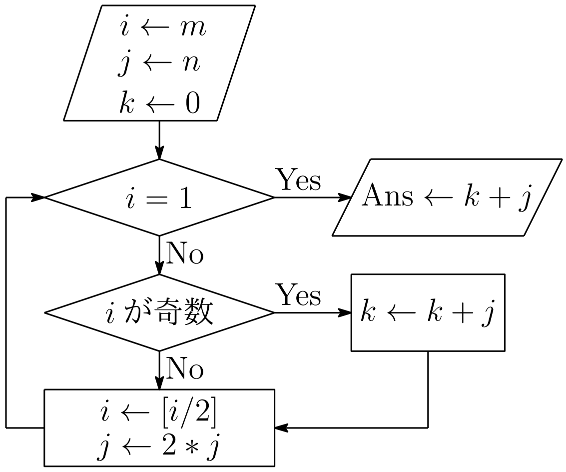
$$
\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k-1}{6}\right)^n \\
&= 6 + \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{5} (k+1)\left(\frac{k}{6}\right)^n \\
&= 6 - \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{k}{6}\right)^n \\
&= 6 - \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n)
\end{aligned}
$$

よって，上式および (3) の結果から

$$
\begin{aligned}
E(X_1 + X_n) &= E(X_1) + E(X_n) \\
&= \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n) \\
&\qquad\qquad + 6 - \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \\
&= \mathbf{7}
\end{aligned}
$$

6　(1) 右のフローチャートから

	i	j	k
1 周目	100	n	0
2 周目	50	$2n$	0
3 周目	**25**	$\boldsymbol{4n}$	**0**
4 周目	**12**	$\boldsymbol{8n}$	$\boldsymbol{4n}$



(2)　i) i が奇数のとき，$[i/2] = \dfrac{i-1}{2}$ であるから

$k \leftarrow k + j$，$i \leftarrow \dfrac{i-1}{2}$，$j \leftarrow 2 * j$ より

$$i * j + k = \frac{i-1}{2} * (2 * j) + (j + k) = i * j + k$$

ii) i が偶数のとき，$[i/2] = \dfrac{i}{2}$ であるから

$i \leftarrow \dfrac{i}{2}$，$j \leftarrow 2 * j$ より

$$i * j + k = \frac{i}{2} * (2 * j) + k = i * j + k$$

i)，ii) より，$i * j + k$ は一定である．

(3) 1 周目の $i * j + k$ は　$m \times n + 0 = mn$

この値は i の値に関係なく不変であり，$i = 1$ のとき $k + j$ となる．

したがって，求める Ans は　　$\boldsymbol{mn}$

(4) フローチャートから，与えられた自然数 m を 2 で割り続けるアルゴリズムである．よって，$3{\cdot}2^l = 2^{l+1} + 2^l$ であるから，(d) を $\boldsymbol{l+1}$ **回**実行する．

■

$\boxed{7}$ (1) $\theta=\theta(t)$ とすると　$f'(t)=\tan\theta$

これを t で微分すると　$f''(t)=\dfrac{\theta'}{\cos^2\theta}$

$f''(t)>0$ であるから　$\theta'>0$　よって，$\theta(t)$ は増加関数である．

(2) P における G の下側の向きの単位法ベクトルは　$\vec{n}=(\sin\theta,-\cos\theta)$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}},\quad \sin\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

したがって　$\vec{n}=\left(\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},-\dfrac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\vec{n}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(t+\frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},\ f(t)-\frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha(t)=t+\frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},\ \beta(t)=f(t)-\frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}}$$

(3) $L_1=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\tan^2\theta}\,dt=\int_a^b\frac{dt}{\cos\theta}$

$\alpha(t)=t+\sin\theta$，$\beta(t)=f(t)-\cos\theta$ であるから，これを微分して

$$\alpha'(t)=1+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\beta'(t)=f'(t)+\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\tan\theta+\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\tan\theta\left(1+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\{\alpha'(t)\}^2+\{\beta'(t)\}^2=(1+\tan^2\theta)\left(1+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$L_2=\int_a^b\sqrt{\{\alpha'(t)\}^2+\{\beta'(t)\}^2}\,dt=\int_a^b\frac{dt}{\cos\theta}+\int_{\theta(a)}^{\theta(b)}d\theta$$

よって　$L_2-L_1=\displaystyle\int_{\theta(a)}^{\theta(b)}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_{\theta(a)}^{\theta(b)}=\boldsymbol{\theta(b)-\theta(a)}$

補足 単位法ベクトルの向きは，単位接ベクトルを反時計周りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させるのが一般的である．関連問題が 2009 年九州大学 (理系) 前期 $\boxed{\mathbf{3}}$ に出題されている． ■

$\boxed{8}$ (1) $0<x<1$ のとき

$$0<\int_0^x e^t\,dt<\int_0^x 6\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0<e^x-1<6x$$

これから

$$0<\int_0^x (e^t-1)dt<\int_0^x 6t\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0<e^x-1-x<3x^2$$

さらに

$$0<\int_0^x (e^t-1-t)dt<\int_0^x 3t^2\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0<e^x-1-x-\frac{x^2}{2}<x^3$$

よって，$0<x<1$ において，$0<f(x)<x^3$ が成り立つ．

$n>1$ のとき，$0<\dfrac{1}{n}<1$ であるから，上式により

$$0<f\left(\frac{1}{n}\right)<\left(\frac{1}{n}\right)^3 \quad \text{ゆえに} \quad 0<n^2f\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2f\left(\frac{1}{n}\right)=0$

(2) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 e^x\,dx=\Big[\,e^x\,\Big]_0^1=e-1$，$\displaystyle K_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\times\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,dx-K_n&=(e-1)\left\{1-\frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}\right\}\\&=(e-1)\times\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\left\{n(e^{\frac{1}{n}}-1)-1\right\}\end{aligned}$$

$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=e^{\frac{1}{n}}-1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}$ より，$n(e^{\frac{1}{n}}-1)-1=nf\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{2n}$ から

$$n\left\{\int_0^1 g(x)\,dx-K_n\right\}=(e-1)\times\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\times\left\{n^2f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\right\}$$

よって，求める最大の自然数 k は $\boldsymbol{k=1}$ であり，そのときの極限値は

$$\lim_{n\to\infty}n\left|\int_0^1 g(x)\,dx-K_n\right|=(e-1)\times1\times\left(0+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{e-1}{2}}$$

■

9 (1) 方程式を行列を用いて表すと $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$

係数行列の逆行列は $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

(2) (1) の結果から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ $\cdots(*)$

ゆえに　$x = p - \dfrac{3}{2}q \cdots①$，$y = -\dfrac{1}{3}p + \dfrac{2}{3}q \cdots②$

① より，整数 m を用いて　$q = 2m$　$\cdots③$

これを ② に代入すると

$$y = -\frac{1}{3}p + \frac{2}{3}\cdot 2m = m - \frac{p-m}{3}$$

上式より，整数 n を用いて

$$p - m = 3n \quad \text{すなわち} \quad p = m + 3n \quad \cdots④$$

$0 \leqq p \leqq 5$，$0 \leqq q \leqq 5$ をみたす $(m,\ n)$ の組は，③，④ より

$$(m,\ n) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1)$$

これらの組に対して，$(p,\ q)$ は

$$\boldsymbol{(p,\ q) = (0,\ 0),\ (3,\ 0),\ (1,\ 2),\ (4,\ 2),\ (2,\ 4),\ (5,\ 4)}$$

(3) $(*)$ から，d が 6 の倍数のとき，整数解 $(x,\ y)$ が存在する．

(4) (3) における d で最小のものを d' とする．このとき，任意の整数 p'，q' に対して，$p = d'p'$，$q = d'q'$ が整数解 $(x,\ y)$ をもつので，$(*)$ より

$$x = \frac{d'(2p' - 3q')}{2}, \quad y = \frac{d'(-p' + 2q')}{3}$$

$p' = 2$，$q' = 1$ とすると，第 1 式から　$x = \dfrac{d'}{2}$

$p' = 1$，$q' = 1$ とすると，第 2 式から　$y = \dfrac{d'}{3}$

上の 2 式から，d' は 2 の倍数かつ 3 の倍数でなければならない．

よって，求める最小の d の値は　**6**　■

10.2 2002 年 (150 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 1 題選択，$\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ から 1 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$$

で表されている。ただし，e は自然対数の底である。原点を O，点 $(0,\ 1)$ を M とする。t が $t \geqq 0$ の範囲で変化したとき点 P が描く曲線を C とする。時刻 t において，曲線 C，線分 OM，および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し，曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 x，y に対して y を x を用いて表せ。

(2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ。

(3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。たとえば $f(1) = 1$ であり，$a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15) = 24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$ が成り立つことを示せ。

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする。このとき $f(a) \geqq (p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3) 正の偶数 a，b は，ある整数 m，n とある奇数 r，s を用いて $a = 2^m r$，$b = 2^n s$ のように表すことができる。このとき a，b が

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$$

をみたせば，r，s は素数であり，かつ $r = 2^{n+1} - 1$，$s = 2^{m+1} - 1$ となることを示せ。

3 次の問いに答えよ。

(1) すべての正の実数 x，y に対して，不等式

$$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2) a，b は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ をみたす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) a，b は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とする。不等式

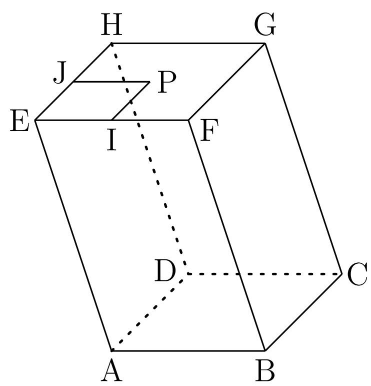
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。

4 空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) △ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) 右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = 2$ とし，$\angle\mathrm{FBC} = \angle\mathrm{BCD} = \dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{EAB} = \theta$ とする。ここで θ は $0 < \theta < \pi$ なる定数とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x = |\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y = |\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△ACP の面積を θ，x，y を用いて表せ。



(平行六面体 ABCD-EFGH)

(3) 問 (2) で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ。

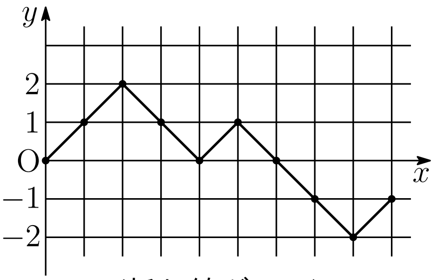
5 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 をとる．次の問いに答えよ。

(1) $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで三角形の**垂心**とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これら 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。

(2) $w_2 = -\overline{z_1}z_2z_3$ とおく。$w_2 \neq z_1$ のとき，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで $\overline{z_1}$ は z_1 に共役な複素数である。

(3) 2 点 z_2，z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点は，点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点であることを示せ。ただし，$w_1 = w_2$ のときは，w_1 と w_2 の中点は w_1 と解釈する。

6 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という。与えられた格子点を第 1 番目とし，この点から右斜め 45°，または右斜め −45° の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ。同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点をとり，第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする。右図に原点 O と格子点 (9, −1) を結ぶ折れ線グラフの例を示す。次の問いに答えよ。



(折れ線グラフ)

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n + k$ が偶数であることを示せ。また，この必要十分条件がみたされているとき，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。

(2) n は 2 以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq n - 2$ なる整数で，$n + k$ は偶数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n - 2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n - 1,\ k + 1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいことを示せ。

(3) コインを 9 回投げる。1 回から i 回までの試行において，表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i,\ T_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, 9$，を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる。ただし，$T_0 = 0$ とする。$T_9 = 3$ が起きたとき，どの T_i $(i = 1, 2, \cdots, 7)$ も 3 にならない条件つき確率を求めよ。

$\boxed{7}$ 平面上の点 P の x 座標と y 座標が，変数 θ の関数 $f(\theta) = \dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2} + \dfrac{1}{2}$ を用いて $\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$ と表されている。θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で変化したとき，点 P が描く曲線を C とする。点 P を $\mathrm{P}(\theta)$ で表し，$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}(0)$，$\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}(\pi)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1\ (a>0,\ b>0)$ で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする。このとき，点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる (ただし，楕円の上にない) ための必要十分条件を α のみを用いて表せ。

(2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする。l の方程式を求めよ。

(3) 次の条件 (i)，(ii)，(iii) をみたす楕円 D を考える。

(i) D の軸の一つは x 軸上にある。

(ii) D は点 P_1，P_2 を通る。

(iii) 点 P_2 における D の接線は l である。

このとき，点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ。

$\boxed{8}$ 正の実数 a の 3 乗根 $\sqrt[3]{a}$ を近似することを考える。与えられた 2 以上の整数 p に対して関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x) = x^p - ax^{p-3} \\ g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

とする。ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。次の問いに答えよ。

(1) $g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{x\text{ の 2 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(2) $p = 2$ とする。このとき，$g(x) - \sqrt[3]{a}$ は

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^3 \times \frac{x\text{ の 1 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(3) $a = 9$，$p = 2$ とする。$2 < \sqrt[3]{9} < 2.1$ に注意して，不等式

$$0 < \sqrt[3]{9} - g(2) < \frac{1}{1000}$$

が成り立つことを示せ。また，$\sqrt[3]{9}$ を小数第 3 位まで求めよ (すなわち，小数第 4 位以下を切り捨てよ)。

9 2 次の正方行列 A が零行列でなく $A^2 = A$ をみたすとき，**べき等行列**という。次の問いに答えよ。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ はべき等行列であり，かつ $ad - bc \neq 0$ とする。このとき，A を求めよ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad - bc = 0$ をみたすとする。このとき，A がべき等行列であるための必要十分条件を a と d のみを用いて表せ。

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ はともにべき等行列とする。$A + B$ がべき等行列になるとき，$A + B$ を求めよ。また，そのような A，B の組を一つあげよ。

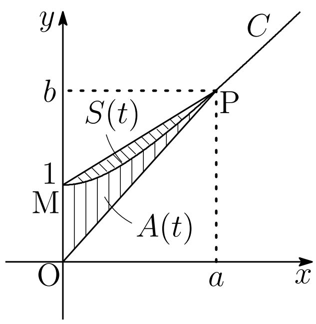
解答例

1 (1) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$，$y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ より　$y + x = e^t$，$y - x = e^{-t}$

ゆえに　$(y + x)(y - x) = e^t \cdot e^{-t}$　したがって　$y^2 - x^2 = 1$

$y > 0$ であるから　$\boldsymbol{y = \sqrt{x^2 + 1}}$

(2) $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，区間 $[0,\ a]$ における曲線 C および直線 $\mathrm{OP} : y = \dfrac{b}{a}x$ について，(1) の結果から，$b = \sqrt{a^2 + 1}$ であるから



$$\sqrt{x^2 + 1} - \frac{b}{a}x = \frac{a\sqrt{x^2 + 1} - x\sqrt{a^2 + 1}}{a}$$
$$= \frac{(a^2 - x^2)}{a(a\sqrt{x^2 + 1} + x\sqrt{a^2 + 1})} \geqq 0$$

したがって

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^a \left(\sqrt{x^2 + 1} - \frac{b}{a}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\ x\sqrt{x^2 + 1} + \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - \frac{b}{a}x^2\ \right]_0^a \\ &= \frac{1}{2}\left\{a\sqrt{a^2 + 1} + \log(a + \sqrt{a^2 + 1}) - ab\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{ab + \log(a + b) - ab\} = \frac{1}{2}\log(a + b) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

$A(t) + S(t) = \dfrac{1}{2}a$ であるから　$S(t) = \dfrac{1}{2}a - A(t) = \boldsymbol{\dfrac{e^t - e^{-t}}{4} - \dfrac{t}{2}}$

(3) $f(t) = A(t) - S(t)$ とおくと　$f(t) = t - \dfrac{e^t - e^{-t}}{4}$

ゆえに　$f'(t) = 1 - \dfrac{e^t + e^{-t}}{4} = -\dfrac{e^{-t}}{4}(e^{2t} - 4e^t + 1)$

$f'(t) = 0$ を解くと $(t \geqq 0)$

$t = \log(2 + \sqrt{3})$

よって，右の増減表により

t	0	$\cdots$	$\log(2 + \sqrt{3})$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

$\boldsymbol{t = \log(2 + \sqrt{3})}$ **で最大**　■

2 (1) 正の奇数 b を，3 以上の素数 p_k と自然数 i_k を用いて

$$b = {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n} \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(b) &= (1 + p_1 + {p_1}^2 + \cdots + {p_1}^{i_1})(1 + p_2 + {p_2}^2 + \cdots + {p_2}^{i_2}) \\ &\qquad \cdots(1 + p_n + {p_n}^2 + \cdots + {p_n}^{i_n}) \\ &= \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \end{aligned}$$

$a = 2^m b$ より，$a = 2^m {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n}$ であるから，上の結果を利用して

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \\ &= (2^{m+1} - 1)f(b) \end{aligned}$$

(2) $p \geqq 2$ より，a は少なくとも pq，q の 2 個の約数にもつから

$$f(a) \geqq pq + q = (p + 1)q$$

等号が成り立つのは，a の約数が pq，q の 2 個，すなわち，pq は素数，$q = 1$ のときである．よって，等号は p が素数，$q = 1$ のときに限り成り立つ．

(3) $a = 2^m r$，$b = 2^n s$ を (1) の結果に適用すると

$$f(a) = (2^{m+1} - 1)f(r), \quad f(b) = (2^{n+1} - 1)f(s)$$

$f(a) = 2b$，$f(b) = 2a$ をみたすとき

$$(2^{m+1} - 1)f(r) = 2{\cdot}2^n s, \quad (2^{n+1} - 1)f(s) = 2{\cdot}2^m r$$

ゆえに $\quad (2^{m+1} - 1)f(r) = 2^{n+1}s, \quad (2^{n+1} - 1)f(s) = 2^{m+1}r \quad \cdots①$

① において $2^{m+1} - 1$ および $2^{n+1} - 1$ は 2 と互いに素であるから，

$$s = (2^{m+1} - 1)s', \quad r = (2^{n+1} - 1)r' \quad (s', r' \text{は自然数}) \quad \cdots②$$

とおける．② を ① に代入すると

$$f(r) = 2^{n+1}s' \cdots ③, \quad f(s) = 2^{m+1}r' \cdots ④$$

② を (2) の結果に適用すると

$$\begin{aligned} f(s) &\geqq \{(2^{m+1} - 1) + 1\}s' = 2^{m+1}s' \quad \cdots⑤ \\ f(r) &\geqq \{(2^{n+1} - 1) + 1\}r' = 2^{n+1}r' \quad \cdots⑥ \end{aligned}$$

③，⑥ より $s' \geqq r'$ となり，④，⑤ より $r' \geqq s'$ となるから $\quad r' = s'$

このとき，⑤，⑥ において等号が成り立つ．

ゆえに，(2) の結論から，$2^{m+1} - 1$，$2^{n+1} - 1$ は素数，$r' = s' = 1$ である．

よって，② より，r，s は素数であり，$r = 2^{n+1} - 1$，$s = 2^{m+1} - 1$ となる．

■

3 (1) y を固定して，$h(x) = x\log x - (\log y + 1)x + y$ とおくと

$$h'(x) = \log x + 1 - (\log y + 1)$$
$$= \log x - \log y$$

x	0	$\cdots$	y	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$h'(x) = 0$ とすると　$x = y$

$h(x)$ の増減表は，右のようになる．

$h(x) \geqq 0$ であるから　$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$

また，等号が成り立つのは，$x = y$ のときに限る．

(2) 閉区間 $[a,\ b]$ で $f(x) > 0$，$g(x) > 0$ であるから，(1) の結果より

$$f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x) \geqq 0$$

したがって

$$\int_a^b \{f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x)\}\,dx \geqq 0$$

条件より，$\displaystyle\int_a^b \{-f(x) + g(x)\}\,dx = 0$ を上式に代入すると

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つ．

(3) $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ より　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b M\,dx$

したがって，(2) の結果に $g(x) = M$ を代入して成り立ち，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log M\,dx = \log M\int_a^b f(x)\,dx$$

上式の両辺を $b - a > 0$ で割ると

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \log M \times \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = M\log M$$

が成り立つ．

解説

(1) の結果 $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ について，x と y を入れ換えた

$$y\log y - y\log x - y + x \geqq 0$$

の両辺を y で割ると

$$\log y - \log x - 1 + \frac{x}{y} \geqq 0$$

ここで，$a_k > 0,\ p_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ に対し，

$$M = p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n$$
$$f(x) = \log M - \log x - 1 + \frac{x}{M}$$

とおくと，$x > 0$ について $f(x) \geqq 0$ が成り立つ．また，等号が成り立つのは，$x = M$ のときに限る．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} p_k f(a_k) &= \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\log M - \log a_k - 1 + \frac{a_k}{M}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(p_k \log M - p_k \log a_k - p_k + \frac{p_k a_k}{M}\right) \\
&= \log M - \sum_{k=1}^{n} \log {a_k}^{p_k} - 1 + \frac{M}{M} \\
&= \log M - \log\left({a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots{a_n}^{p_n}\right)
\end{aligned}$$

$p_kf(a_k) \geqq 0\ (k = 1, 2, \cdots n)$ であるから (等号が成り立つのは，$a_k = M$ のとき)

$$\log M - \log\left({a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots{a_n}^{p_n}\right) \geqq 0$$

したがって

$$\boldsymbol{p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n \geqq {a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots{a_n}^{p_n}}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき).

とくに，$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，次式が成り立つ．

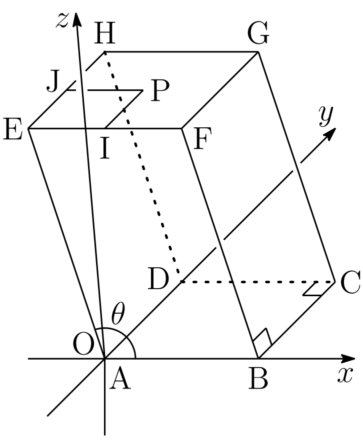
$$\boldsymbol{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とすると，$0 < \theta < \pi$ より，$\sin\theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\end{aligned}$$

(2) $\angle\mathrm{BCD} = \frac{\pi}{2}$ より，四角形 ABCD は正方形であり，$\angle\mathrm{FBC} = \frac{\pi}{2}$ より，四角形 FBCD は長方形である．したがって，面 ABFE$\perp$BC．
空間内で点 A，B，D，E の座標を A$(0,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ 1,\ 0)$，E$(2\cos\theta,\ 0,\ 2\sin\theta)$ とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (1,\ 1,\ 0)\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (x+2\cos\theta,\ y,\ 2\sin\theta)\end{aligned}$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = (x+2\cos\theta)^2 + y^2 + 4\sin^2\theta$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x + 2\cos\theta + y \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACP} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(y-x-2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta}}\end{aligned}$$

補足 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf の解説を参照．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ より，$-1 \leqq y - x \leqq 1$ であるから，(2) の結果から

i) $1 < 2\cos\theta$　すなわち　$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ のとき

$y - x = 1$ で △ACP は，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\cos\theta - 4\cos^2\theta}}$ をとる．

ii) $-1 \leqq 2\cos\theta \leqq 1$　すなわち　$\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{3}$ のとき
$y - x = 2\cos\theta$ で △ACP は，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\theta}$ をとる．

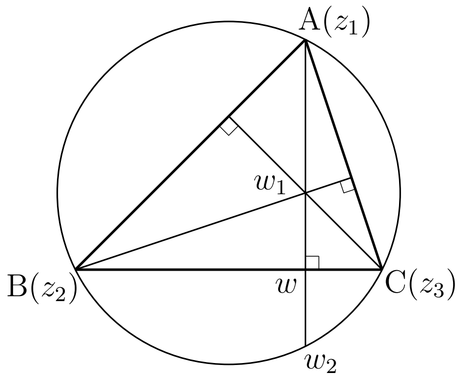
iii) $2\cos\theta < -1$　すなわち　$\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ のとき

$y - x = -1$ で △ACP は，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{9 + 4\cos\theta - 4\cos^2\theta}}$ をとる．
■

5 (1) $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ とおく．

点 A を通り，BC に垂直な直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right)}=0 \quad \cdots ①$$



$w_1=z_1+z_2+z_3$，$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ であることから，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}\right)} &= \frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}\right)}\\ &= \frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\overline{z}_2+\overline{z}_3}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\ &= \frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

したがって，w_1 は直線 ① 上にある．

同様にして，w_1 が点 B を通り直線 CA に垂直な直線な直線上の点，および点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点であることを示すことができる．

よって，w_1 は △ABC の垂心である．

(2) 円 C の方程式は　$|z|=1$

$w_2=-\overline{z}_1z_2z_3$ より，$|w_2|=|\overline{z}_1||z_2||z_3|=1$

したがって，w_2 は円 C 上の点である．また，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}\right)} &= \frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\overline{z}_2\overline{z}_3-\overline{z}_1}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\ &= \frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}-\overline{z}_1}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

よって，w_2 は，直線 ① と円 C の交点である．

(3) 2 点 B，C を通る直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_2}{z_3-z_2}$ は実数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_2}{z_3-z_2}-\overline{\left(\frac{z-z_2}{z_3-z_2}\right)}=0$$

w_1 と w_2 の中点を w とすると　$w=\dfrac{z_1+z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2}$

このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{w-z_2}{z_3-z_2}-\overline{\left(\frac{w-z_2}{z_3-z_2}\right)}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\overline{\left\{\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}\right\}}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\frac{\overline{z}_1-\overline{z}_2+\overline{z}_3-z_1\overline{z}_2\overline{z}_3}{2(\overline{z}_3-\overline{z}_2)}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\frac{\overline{z}_1-\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}}{2\left(\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}\right)}=0
\end{aligned}$$

よって，w_1 と w_2 の中点 w は，直線 BC 上の点である．

解説

3 点 A(z_1)，B(z_2)，C(z_3) について，△ABC の外心 O，垂心 $z_1+z_2+z_3$，重心 $\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$ が同一直線上にあることがわかる．この直線を**オイラー線**という．

w_1 と z_1 の中点，z_2 と z_3 の中点，z_1 から BC に下ろした垂線の足 w の 3 点を通る円は，$\dfrac{w_1+z_1}{2}$ と $\dfrac{z_2+z_3}{2}$ を直径の両端とする円で，中心は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w_1+z_1}{2}+\frac{z_2+z_3}{2}\right)=\frac{z_1+z_2+z_3}{2}$$

同時に，$\dfrac{w_1+z_2}{2}$ と $\dfrac{z_3+z_1}{2}$，および $\dfrac{w_1+z_3}{2}$ と $\dfrac{z_1+z_2}{2}$ を直径の両端とする円でもある．この方程式は

$$\left|z-\frac{z_1+z_2+z_3}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

であり，この円を **9 点円**という．その中心もオイラー線上にあり，外心と垂心の中点である．また，その半径は外接円の半径の $\frac{1}{2}$ である．■

6　(1) 原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，右斜め 45° の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め −45° の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．

$$\frac{n-k}{2}=\frac{n+k}{2}-k$$

であるから，$\dfrac{n+k}{2}$ が整数であればよい．したがって $n+k$ は偶数である．
逆に $n+k$ が偶数，すなわち $n+k=2m$ をみたす整数 m が存在するとき，折れ線グラフは，右斜め 45° の方向に m 回，右斜め −45° の方向に $m-k$ 回 (または $n-m$ 回) 進む．

また，原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は　$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}}$

(2) 原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，最初に直線 $y=k$ と交わる格子点を $\mathrm{A}(a,\ k)$ とする $(0 \leqq a \leqq n-2)$．A と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数，A と格子点 $(n-1,\ k-1)$ を通る数は，直線 $y=k$ に関する対称性によりその数は等しくともに N とおく．また，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数はそれらの和で

$$N+N=2N$$

である．したがって，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数の 2 倍に等しい．

(3) 2 つの事象 A，B を $A: T_9=3$，B : すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ とすると

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap\overline{B})}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}$$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数は，(1) の結果より　${}_9\mathrm{C}_6$ (本)
したがって　　$P(A)=\dfrac{{}_9\mathrm{C}_6}{2^9}$
原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフで，少なくとも $(1,\ 3)$，$(2,\ 3)$，$\cdots$，$(7,3)$ を通る数は，(2) の結果から，O と $(8,\ 4)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍であるから，(1) の結果より　$2\times{}_8\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A\cap\overline{B})=\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{2^9}$

よって　　$P_A(B)=1-\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{{}_9\mathrm{C}_6}=1-\dfrac{2\times 8\cdot 7}{2\cdot 1}\times\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{9\cdot 8\cdot 7}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

解説

1 次元ランダム・ウォーク (Random walk)[離散型] の最も基本的なモデルである．右斜め 45°，または右斜め −45° の方向に格子点をとっていく確率がともに $\frac{1}{2}$ であるから，折れ線グラフの数に注目するとよい．

左下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフの総数を示したもので，パスカルの三角形を横に倒した配置になっている．右下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフで，すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ である数を示したものである．(3) の条件つき確率は，下の 2 つの表における原点と点 (9, 3) を結ぶ折れ線グラフの数から $\boldsymbol{\dfrac{28}{84}=\dfrac{1}{3}}$

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	9										1
	8									1	
	7								1		9
	6							1		8	
	5						1		7		36
	4					1		6		28	
	3				1		5		21		**84**
	2			1		4		15		56	
	1		1		3		10		35		126
k	0	1		2		6		20		70	
	−1		1		3		10		35		126
	−2			1		4		15		56	
	−3				1		5		21		84
	−4					1		6		28	
	−5						1		7		36
	−6							1		8	
	−7								1		9
	−8									1	
	−9										1

折れ線グラフの数

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	3										**28**
	2			1		3		9		28	
	1		1		3		9		28		90
k	0	1		2		6		19		62	
	−1		1		3		10		34		117
	−2			1		4		15		55	
	−3				1		5		21		83
	−4					1		6		28	
	−5						1		7		36
	−6							1		8	
	−7								1		9
	−8									1	
	−9										1

すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ の数

(1) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ である．また，(2) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいから，n のときはじめて k になるグラフの数は

$$ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n} \cdot {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} $$

これは，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの本数の $\dfrac{k}{n}$ 倍．

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{k}{n}$ となる．■

$\boxed{7}$ (1) $f(0)=1$ より $\mathrm{P_1}(1,\ 0)$，$f(\pi)=\dfrac{1}{2}$ より $\mathrm{P_3}\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

$\mathrm{P_1}$ は C 上にあるから　$\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}=1$

$\mathrm{P_3}$ は C の内部にあるから　$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}<1$

上の 2 式から　$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}<\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}$

ゆえに　$\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2<(1-\alpha)^2$　よって　$\boldsymbol{\alpha<\dfrac{1}{4}}$

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{8}$ より $\mathrm{P_2}\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$，$f'(\theta)=\dfrac{\theta-\pi}{\pi^2}$ であるから $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2\pi}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,\quad \dfrac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$ より

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{dx}{d\theta}=-\dfrac{5}{8},\quad \dfrac{dy}{d\theta}=-\dfrac{1}{2\pi},\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^{-1}=\dfrac{4}{5\pi}$

よって，l の方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{4}{5\pi}x+\dfrac{5}{8}}$

(3) D の軸の一つは x 軸上にあるから，その中心を $(k,\ 0)$ とする．また，D は $\mathrm{P_1}$ を通るから，楕円 D を $\dfrac{(x-k)^2}{(1-k)^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおく．

また，D は $\mathrm{P_2}$ を通るから　$\dfrac{k^2}{(1-k)^2}+\dfrac{25}{64b^2}=1 \quad \cdots ①$

$\mathrm{P_2}$ における D の接線の方程式は　$\dfrac{(0-k)(x-k)}{(1-k)^2}+\dfrac{5y}{8b^2}=1$

この接線の傾き $\dfrac{8b^2k}{5(1-k)^2}$ が l の傾きと等しいので

$$\frac{4}{5\pi}=\frac{8b^2k}{5(1-k)^2}\quad \text{すなわち}\quad \frac{1}{b^2}=\frac{2\pi k}{(1-k)^2}\qquad \cdots ②$$

② を ① に代入し，整理すると

$$\frac{k^2}{(1-k)^2}+\frac{25\pi k}{32(1-k)^2}=1\quad \text{すなわち}\quad (25\pi+64)k=32$$

ゆえに　$k=\dfrac{32}{25\pi+64}<\dfrac{32}{64+64}=\dfrac{1}{4}$

よって，(1) の結果により，$\mathrm{P_3}$ は D の内部にある．

補足　頂点 $(2k-1,\ 0)$ により $2k-1<-\dfrac{1}{2}$ を示してもよい　■

8 (1) $\alpha=\sqrt[3]{a}$ とおくと，$f(x)=x^p-\alpha^3x^{p-3}$ より

$$\begin{aligned}g(x)-\alpha&=x-\frac{x^p-\alpha^3x^{p-3}}{px^{p-1}-(p-3)\alpha^3x^{p-4}}-\alpha\\&=x-\alpha-\frac{x(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{px^3-(p-3)\alpha^3}\\&=(x-\alpha)\times\frac{px^3-(p-3)\alpha^3-x(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{px^3-(p-3)\alpha^3}\\&=(x-\alpha)^2\times\frac{(p-1)x^2+(p-2)\alpha x+(p-3)\alpha^2}{px^3-(p-3)\alpha^3}\end{aligned}$$

よって，次式が成り立ち，$p\geqq 2$，$p-1\geqq 1$ より，題意をみたす．

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^2\times\frac{(p-1)x^2+(p-2)\sqrt[3]{a}\,x+(p-3)\sqrt[3]{a^2}}{px^3-(p-3)a}$$

(2) (1) の結果に $p=2$ を代入すると，次式が成り立ち，題意をみたす．

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^2\times\frac{x^2-\sqrt[3]{a^2}}{2x^3+a}=(x-\sqrt[3]{a})^3\times\frac{x+\sqrt[3]{a}}{2x^3+a}$$

(3) (2) の結果から　$\sqrt[3]{a}-g(x)=(\sqrt[3]{a}-x)^3\times\dfrac{x+\sqrt[3]{a}}{2x^3+a}$

これに $x=2$，$a=9$ を代入すると

$$\sqrt[3]{9}-g(2)=(\sqrt[3]{9}-2)^3\times\frac{2^2+\sqrt[3]{2}}{2{\cdot}2^3+9}$$

$2<\sqrt[3]{9}<2.1$ より

$$0<(\sqrt[3]{9}-2)^3\times\frac{2^2+\sqrt[3]{2}}{2{\cdot}2^3+9}<(2.1-2)^3\times\frac{2^2+2.1}{2{\cdot}2^3+9}<\frac{1}{1000}$$

したがって　$0<\sqrt[3]{9}-g(2)<\dfrac{1}{1000}$　ゆえに　$g(2)<\sqrt[3]{9}<g(2)+0.001$

このとき，$f(x)=x^2-\dfrac{9}{x}$，$f'(x)=2x+\dfrac{9}{x^2}$ より

$$f(2)=2^2-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2},\quad f'(2)=2{\cdot}2+\frac{9}{2^2}=\frac{25}{4}$$

ゆえに　$g(2)=2-\dfrac{f(2)}{f'(2)}=2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\div\dfrac{25}{4}=2.08$

したがって　　$2.08<\sqrt[3]{9}<2.081$

よって，$\sqrt[3]{9}$ の小数第 4 位を切り捨てると　**2.080**

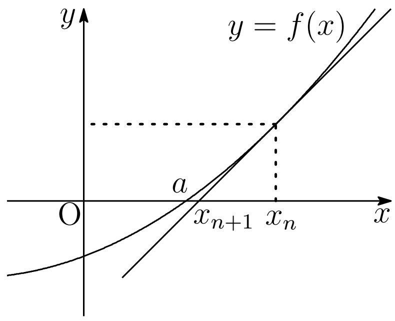
解説

求解アルゴリズムの一つであるニュートン法 (Newton's method) に基づく出題である．方程式 $f(x)=0$ の解 a の近くの x_1 をとり，その点における接線

$$y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$$

が x 軸と交わる点の x 座標 x_2 とすると

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



これをアルゴリズム化した

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \cdots(*)$$

による近似解析をニュートン法という．なお，$\{x_n\}$ は a に収束する場合が多いが，必ずしも保証されたものではない．

本題 (3) において，$0<x_n<\sqrt[3]{9}$ のとき

$$f(x_n)={x_n}^2-\frac{9}{x_n}=\frac{{x_n}^3-9}{{x_n}^3}<0, \quad f'(x_n)=2x_n+\frac{9}{{x_n}^2}>0$$

であるから，$(*)$ より　$x_{n+1}>x_n$

本題 (2) から

$$\sqrt[3]{9}-x_{n+1}=(\sqrt[3]{9}-x_n)^3\times\frac{x_n+\sqrt[3]{9}}{2{x_n}^3+9} \quad \cdots(**)$$

したがって　$x_{n+1}<\sqrt[3]{9}$　ゆえに　$0<x_n<x_{n+1}<\sqrt[3]{9}$

このとき，$(**)$ から

$$0<\sqrt[3]{9}-x_{n+1}<(\sqrt[3]{9}-x_n)^3\times\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9}}{2{\cdot}0^3+9}<(\sqrt[3]{9}-x_n)^3$$

したがって　$0<\sqrt[3]{9}-x_n<(\sqrt[3]{9}-x_1)^{3^{n-1}}$

$x_1=2$ とすると　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{9}$

なお，$x_1=2$，$x_2=2.08$ であるが，$n=3$ ではかなり精度が向上する．

$$\sqrt[3]{9}\fallingdotseq 2.080083823051904\cdots$$
$$x_3=2.080083823051814$$

■

9 (1) $\det A = ad - bc \neq 0$ より，A は正則である．

よって，$A^2 = A$ の両辺に A^{-1} を掛けると　$\boldsymbol{A = E}$

(2) ハミルトン・ケリーの公式により

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \quad \cdots (*)$$

これに $A^2 = A$，$ad - bc = 0$ を代入すると　$(a+d-1)A = O$

$A \neq O$ であるから，$a + d - 1 = 0$　ゆえに　$a + d = 1$

逆に，$a + d = 1$ のとき，$ad - bc = 0$ であるから，これを $(*)$ に代入すると，$A^2 = A$ が成り立つ．

よって，$ad - bc = 0$ のとき，A がべき等行列であるための必要十分条件は

$$\boldsymbol{a + d = 1}$$

(3) (1),(2) の結果から，次のことが分かる．

べき等行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$\mathrm{tr}\, A = a + d$ とすると

$$\begin{aligned} &\det A \neq 0 \text{ のとき} \quad \mathrm{tr}\, A = 2 \qquad (A = E \text{ より}) \\ &\det A = 0 \text{ のとき} \quad \mathrm{tr}\, A = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ．

一般に，$\mathrm{tr}\,(A+B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$ が成り立つ．

したがって，A，B，$A + B$ がべき等行列であるとき，上式より

$$\mathrm{tr}\, A = 1, \quad \mathrm{tr}\, B = 1, \quad \mathrm{tr}(A+B) = 2$$

である．よって　$\boldsymbol{A + B = E}$

これを満たす A，B の組の一つは

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

補足　(3) は一般には，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

ただし，$a(1-a) - bc = 0$.

■

10.3 2003 年 (150 分)

出題分野 [1] [2] [3] 必答，[4] [5] [6] から 1 題選択，[7] [8] [9] から 1 題選択

1 xy 平面上で， $x = r(t)\cos t,\ \ y = r(t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$
で表される曲線を C とする。

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ。

(2) 一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^\pi \{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt = \int_0^\pi \{r(t)\}^3\left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right)dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積は $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^\pi e^{-3t}\sin t\,dt$ と表せることを示せ。

2 座標平面上で，不等式 $2|x-4| + |y-5| \leqq 3,\quad 2\Big||x|-4\Big| + \Big||y|-5\Big| \leqq 3$
が表す領域を，それぞれ A，B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x |y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。

3 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形 (周は含まない) を単位正方形と呼ぶことにする。p，n を自然数とし，領域

$$D_n = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x,\ x^p \leqq y \leqq n\}$$

を考え，その面積を S_n とする。L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1) グラフ $y = x^p\ (0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}})$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また，面積 S_n を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ。

4 空間内に四面体 OABC があり，$\angle$AOB，$\angle$BOC，$\angle$COA はすべて 90° であるとする。辺 OA，OB，OC の長さを，それぞれ a，b，c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle$OGA，$\angle$OGB，$\angle$OGC がすべて 90° であるための条件を a，b，c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

5 $0 < a < 1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を ℓ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が ℓ 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2) 直線 ℓ を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。

6 座標平面上に (0, 0)，(1, 0)，(1, 1)，(0, 1) を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて，$y \leqq x(a-x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし，$0 < a \leqq 2$ とする。

(1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。

(2) 1 回目は $a = \dfrac{1}{2}$，2 回目は $a = \dfrac{3}{2}$ として，ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。

(3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であり，当たりの数の期待値が $\dfrac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。

7 座標平面上に点 P$(a,\ b)$ があり，P は $|a| \leqq \dfrac{1}{2}$，$|b| \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動く。また，点 Q$(x,\ y)$ の座標は連立 1 次方程式 $AX = B$ の解になっている。

ただし，　$A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}$　である。

(1) 点 P が原点 O にあるときの点 Q の位置を点 R とする。P $\neq$ O のとき，$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}$ の最大値を求め，その最大値を与える点 P の全体を図示せよ。

(2) OQ の最小値と，その最小値を与える点 P の座標を求めよ。

8 θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2 > 4b$ を満たす点 P$(a,\ b)$ から放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ に引いた二つの接線の接点を Q，R とし，接線 PQ，PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle\mathrm{QPR} = \theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1) $m_1 < 0 < m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2) G を数式で表せ。

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。

9 n を 2 以上の自然数とする。数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}$ で与えられている。

(1) 不等式　$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$　が成り立つことを示せ。

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおく。数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ。

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log_n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ。

解答例

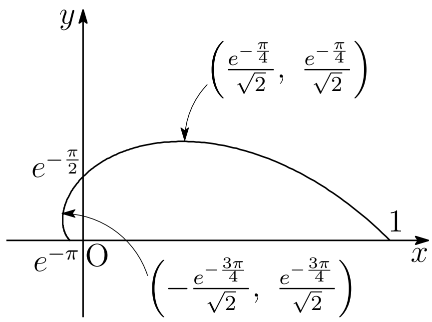
$\boxed{1}$ (1) $x = e^{-t}\cos t$，$y = e^{-t}\sin t$ を t で微分すると

$$x' = -e^{-t}(\sin t + \cos t) = -\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$y' = -e^{-t}(\sin t - \cos t) = -\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

x，y の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
x'		$-$	0	$+$	
x	1	$\searrow$	$-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$-e^{-\pi}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0



x は $t = \dfrac{3\pi}{4}$ で最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$ をとり，y は $t = \dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$ をとる．

したがって，C の概形は右の図のようになる．

(2)
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{(r(t))^3\}'\sin^2 t\cos t\,dt \\
&= \frac{1}{3}\Big[\{r(t)\}^3\sin^2 t\cos t\Big]_0^{\pi} \\
&\qquad -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3(\sin^2 t\cos t)'\,dt \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3(2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t)\,dt \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\{2\sin t(1-\sin^2 t) - \sin^3 t\}\,dt \\
&= \int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right)dt
\end{aligned}$$

(3) $y_1 = e^{-t}\sin t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{3\pi}{4}\right)$，$y_2 = e^{-t}\sin t \quad \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq t \leqq \pi\right)$，

$\alpha = -\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$，$\beta = e^{-\pi}$ とおくと

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_\alpha^1 {y_1}^2\,dx - \pi\int_\alpha^\beta {y_2}^2\,dx \\
&= \pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^0 y^2\frac{dx}{dt}\cdot dt - \pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^\pi y^2\frac{dx}{dt}\cdot dt \\
&= -\pi\int_0^\pi y^2\frac{dx}{dt}dt = -\int_0^\pi (r(t)\sin t)^2\{r(t)\cos t\}'dt \\
&= -\pi\int_0^\pi (r(t))^2\sin^2 t\cdot\{r'(t)\cos t - r(t)\sin t\}\,dt \\
&= -\pi\int_0^\pi (r(t))^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt + \pi\int_0^\pi (r(t))^3\sin^3 t\,dt
\end{aligned}$$

これに (2) の等式を適用すると

$$\begin{aligned}
V &= -\pi\int_0^\pi (r(t))^3\left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right)dt + \pi\int_0^\pi (r(t))^3\sin^3 t\,dt \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi (r(t))^3\sin t\,dt = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi e^{-3t}\sin t\,dt
\end{aligned}$$

極方程式による曲線の回転体の体積

極方程式 $r = r(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線を x 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

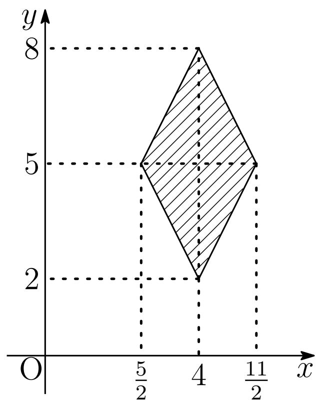
$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi \{r(\theta)\}^3\sin\theta\,d\theta}$$

2009 京都大学 (理系) 前期

xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式 $r = 2 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ により表される曲線を C とする．C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

解答 $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^\pi (2+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \dfrac{2\pi}{3}\left[-\dfrac{1}{4}(2+\cos\theta)^4\right]_0^\pi = \dfrac{40}{3}\pi$ ■

2 (1) 不等式 $2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域は，4 点 $(\frac{3}{2},\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(-\frac{3}{2},\ 0)$，$(0,-3)$ を頂点とする四角形の周およびその内部である．
不等式 $2|x-4|+|y-5| \leqq 3$ の表す領域 A は，$2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものであるから，A の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



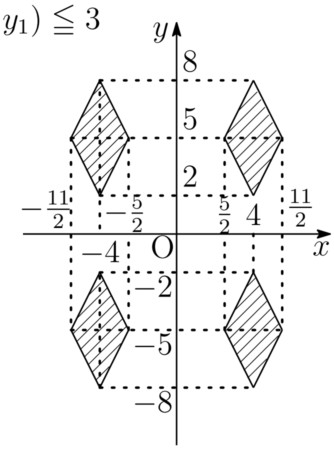
(2) $f(x,\ y)=2|x-4|+|y-5|$，$g(x,\ y)=2\Big||x|-4\Big|+\Big||y|-5\Big|$ とおく．
$f(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域 A の点 $(x_1,\ y_1)$ は，(1) の結果から $x_1>0$，$y_1>0$ であり，$g(x,\ y)=f(|x|,\ |y|)$ が成り立つから

$$g(\pm x_1, \pm y_1)=f(x_1,\ y_1) \leqq 3$$

$g(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域は B であるから

$$(x_1,\ y_1) \in A \quad \Longrightarrow \quad (\pm x_1, \pm y_1) \in B$$

したがって，B の表す領域は，A および A を x 軸，y 軸，原点に関して対称移動したものである．よって，B の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



(3) x，$|y|$ は正の整数であるから，領域 B 内の点において，これを満たす $(x,\ |y|)$ の組は，次のとおりである．

$$\begin{aligned}(x,\ |y|)=&(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\\ &(4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7),\ (4,\ 8),\\ &(5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6)\end{aligned}$$

$\log_x |y| = \dfrac{m}{n}$ $(m，n$ は整数$)$ とおくと

$$x^{\frac{m}{n}}=|y| \quad \text{ゆえに} \quad x^m=|y|^n \quad \cdots ①$$

素因数分解の一意性により，① を満たすものは

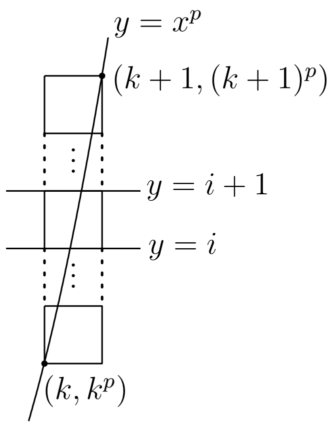
$$(x,\ |y|)=(4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 8),\ (5,\ 5)$$

よって，求める $(x,\ y)$ の組は次の 8 組である．

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(4,\pm 2),\ (4,\pm 4),\ (4,\pm 8),\ (5,\pm 5)}$$ ■

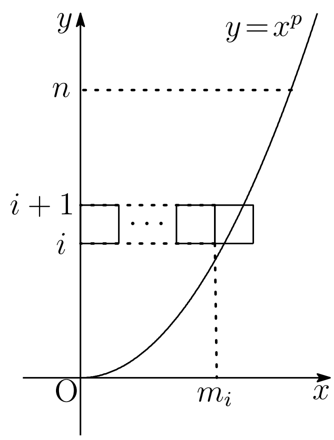
3 (1) 右の図は，$k \leqq x \leqq k+1$ において，$y=x^p$ と交わる単位正方形を図示したものである．
$y=x^p$ は単調増加であり，$x=k$ および $x=k+1$ において格子点を通る．
ゆえに，$i \leqq y \leqq i+1$ で $y=x^p$ と交わる単位正方形は 1 個である $(k^p \leqq i < (k+1)^p)$．
したがって，$0 \leqq y \leqq n$ で $y=x^p$ と交わる単位正方形の個数は

$$n\ (\text{個})$$



(2) 右の図のように $y=x^p$ と y 軸，直線 $y=i$，$y=i+1$ で囲まれた領域の面積を S_i，この領域内の単位正方形の個数を m_i とすると $(0 \leqq i \leqq n-1)$

$$m_i < S_i < m_i+1$$



ゆえに $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} m_i < \sum_{i=0}^{n-1} S_i < \sum_{i=0}^{n-1}(m_i+1)$

よって　$M_n < S_n < M_n+n \quad \cdots ①$

また　$\displaystyle S_n = \int_0^n x\,dy = \int_0^n y^{\frac{1}{p}}\,dy = \boldsymbol{\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}}$

(3) 直線 $y=i$ $(i=0,1,\cdots n-1)$ 上にある格子点は，次の m_i+1 個である．

$$(0,\ i),\ (1,\ i),\ (2,\ i),\ \cdots,\ (m_i,\ i)$$

また，直線 $y=n$ 上にある格子点は，次の $[n^{\frac{1}{p}}]+1$ 個である．

$$(0,\ n),\ (1,\ n),\ (2,\ n),\ \cdots,\ ([n^{\frac{1}{p}}],\ n)$$

したがって，D_n 内にある格子点の個数 L_n は

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1}(m_i+1) + ([n^{\frac{1}{p}}]+1) = M_n+n+[n^{\frac{1}{p}}]+1$$

$n^{\frac{1}{p}}-1 < [n^{\frac{1}{p}}] \leqq n^{\frac{1}{p}}$ であるから

$$M_n+n+n^{\frac{1}{p}} < L_n \leqq M_n+n+n^{\frac{1}{p}}+1 \quad \cdots ②$$

①，② より　$S_n + n^{\frac{1}{p}} < L_n < S_n + n + n^{\frac{1}{p}} + 1$

これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}} + n^{\frac{1}{p}} < L_n < \frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}} + n + n^{\frac{1}{p}} + 1$$

したがって

$$\frac{p}{p+1} + n^{-1} < n^{-\frac{p+1}{p}}L_n < \frac{p}{p+1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-1} + n^{-\frac{p+1}{p}}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p}{p+1} + n^{-1}\right) = \frac{p}{p+1},$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p}{p+1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-1} + n^{-\frac{p+1}{p}}\right) = \frac{p}{p+1}$$

よって，はさみうちの原理により　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}}L_n = \frac{p}{p+1}}$

別解

(3) 領域 D_n の直線 $y = i$ $(0 \leqq i \leqq n)$ 上にある格子点の個数は　$[i^{\frac{1}{p}}] + 1$ (個)

したがって　$L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}([i^{\frac{1}{p}}] + 1)$

$i^{\frac{1}{p}} - 1 < [i^{\frac{1}{p}}] \leqq i^{\frac{1}{p}}$ であるから

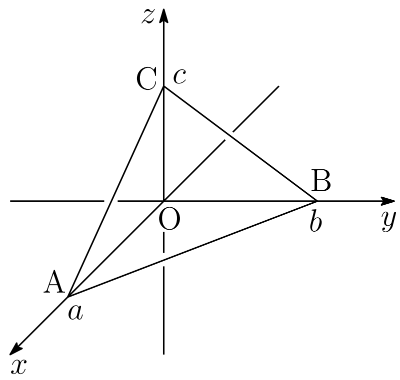
$$\sum_{i=0}^{n} i^{\frac{1}{p}} < L_n \leqq \sum_{i=0}^{n}(i^{\frac{1}{p}} + 1)$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{p}} < n^{-\frac{p+1}{p}}L_n \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{p}} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = \int_0^1 x^{\frac{1}{p}}\,dx = \frac{p}{p+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}\right) = 0$$

よって，はさみうちの原理により　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}}L_n = \frac{p}{p+1}}$　■

4 (1) ∠AOB，∠BOC，∠COA はすべて 90° であるから座標空間に 3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ を定めると，△ABC の重心 G の座標は



$$\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$$

3 点 A,B,C を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

この平面の法線ベクトル $\vec{n}$ は　$\vec{n}=\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}/\!/\vec{n}$ であるから，定数 k を用いて

$$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)=k\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)\quad \text{ゆえに}\quad a^2=b^2=c^2=3k$$

よって，$a>0,\ b>0,\ c>0$ より　$\boldsymbol{a=b=c}$

(2) D は線分 BC を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P は直線 AD 上の A 以外の点であるから $(t\neq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

△APQ の重心が G であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\quad \text{すなわち}\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

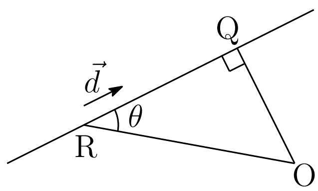
したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$=(-a,\ b,\ c)+\frac{t}{3}(3a,-2b,-c)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-a,\ b,\ c)$，$\vec{d}=(3a,-2b,-c)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{t}{3}\vec{d}\quad\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\vec{d}$ のベクトルのなす角を θ とすると $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$，OQ が最小となるとき



$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\sin\theta, \qquad \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\vec{d}|}$$

上の 2 式から $\quad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} \quad \cdots ②$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\vec{d}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{d}=0$ であるから，① をこれに代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d} + \frac{t}{3}|\vec{d}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{3(\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d})}{|\vec{d}|^2}$$

したがって $\quad t = \dfrac{3(3a^2+2b^2+c^2)}{9a^2+4b^2+c^2} \neq 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d} = (bc,\ 2ca, -ab)$ であるから，② より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{\sqrt{b^2c^2+4c^2a^2+a^2b^2}}{\sqrt{9a^2+4b^2+c^2}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{b^2c^2+4c^2a^2+a^2b^2}{9a^2+4b^2+c^2}}}$$

法ベクトル

座標平面 (2 次元) における直線 $ax+by+c=0$(1 次元) および座標空間 (3 次元) における平面 $ax+by+cz+d=0$(2 次元) の法ベクトル (法線ベクトルともいう) は，それぞれ $(a,\ b)$，$(a,\ b,\ c)$ である．また，法ベクトルの次元は $2-1$ および $3-2$ で，ともに 1 次元である．

直線 $ax+by+c=0$，平面 $ax+by+cx+d=0$ は，n 次元空間における $n-1$ 次元の多様体であり，法ベクトルの次元は 1(多様体の余次元) である．

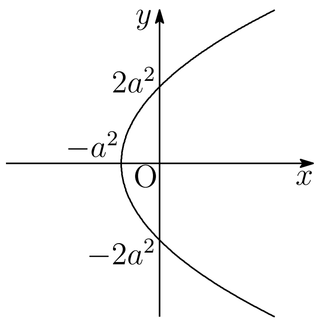
したがって，これらの多様体 (ここでは，直線と平面) は同形であり，関連する公式も同形である．

たとえば，点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ から平面 $ax+by+cz+d=0$ までの距離は

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

であり，点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離と同形である． ■

$\boxed{\mathbf{5}}$　(1) $z = t + ai$ より



$$z^2 = (t + ai)^2 = (t^2 - a^2) + 2ati$$

$x = t^2 - a^2$，$y = 2at$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x = \frac{y^2}{4a^2} - a^2$$

ゆえに　　$\boldsymbol{4a^2(x + a^2) = y^2}$　$\cdots$①

よって，求める軌跡は右の図のようになる．

(2) m は ℓ を原点を中心に θ だけ回転させたものであるから

$$\begin{aligned} z(\cos\theta + i\sin\theta) &= (t + ai)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (t\cos\theta - a\sin\theta) + i(t\sin\theta + a\cos\theta) \end{aligned}$$

$x = t\cos\theta - a\sin\theta$，$y = t\sin\theta + a\cos\theta$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x\sin\theta - y\cos\theta + a = 0 \quad \cdots②$$

i) $\sin\theta = 0$ のとき
② は $y = \pm a$ の直線であり，①，② の共有点は 1 個

ii) $\sin\theta \neq 0$ のとき
①，② から x を消去して整理すると

$$(\sin\theta)y^2 - (4a^2\cos\theta)y - 4a^3(a\sin\theta - 1) = 0 \quad \cdots(*)$$

これは y に関する 2 次方程式であるから，その係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= 4a^4\cos^2\theta + 4a^3\sin\theta(a\sin\theta - 1) \\ &= 4a^3(a - \sin\theta) \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ に注意して

$-1 \leqq \sin\theta < a$ のとき　$(*)$ の実数解は 2 個
$\sin\theta = a$ のとき　$(*)$ の実数解は 1 個
$a < \sin\theta \leqq 1$ のとき　$(*)$ の実数解は 0 個

i)，ii) より，①，② の共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta < 0,\ 0 < \sin\theta < a} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{\sin\theta = 0,\ a} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a < \sin\theta \leqq 1} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

■

6 (1) 正方形の面積は　1

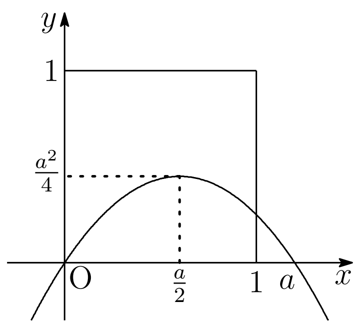
正方形の周および内部と放物線 $y = x(a-x)$ で囲まれた部分の面積を S とし，求める確率を $P(a)$ とすると　$P(a) = \dfrac{S}{1} = S$

i) $0 < a \leqq 1$ のとき

$$P(a) = \int_0^a x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a^3}{6}}$$

ii) $1 < a \leqq 2$ のとき

$$P(a) = \int_0^1 x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a}{2} - \frac{1}{3}}$$



(2) 求める確率は

$$P\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - P\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \left(1 - P\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot P\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{48}\left(1 - \frac{5}{12}\right) + \left(1 - \frac{1}{48}\right) \times \frac{5}{12} = \boldsymbol{\frac{121}{288}}$$

(3) 3 回ともはずれる確率は　$(1 - P(a))^3$ である．

少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であるから

$$1 - (1 - P(a))^3 \geqq \frac{19}{27} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \geqq \frac{1}{3} \quad \cdots①$$

当たりの数の期待値 E は

$$E = \sum_{k=0}^{3} k\cdot{}_3\mathrm{C}_k (P(a))^k (1 - P(a))^{3-k} = 3P(a)$$

この期待値 E が $\dfrac{3}{2}$ 以下であるから

$$3P(a) \leqq \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots②$$

①，② から　$\dfrac{1}{3} \leqq P(a) \leqq \dfrac{1}{2}$

これを満たす a は (1) の ii) の場合について調べればよいので

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \leqq \frac{1}{2} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{\frac{4}{3} \leqq a \leqq \frac{5}{3}}$$

■

7　(1) $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ より $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ である．$AX=B$ より

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b+1 \\ a+2b-1 \end{pmatrix}$$

したがって，$\mathrm{Q}(2a+b+1,\ a+2b-1)$，$\mathrm{R}(1,-1)$ となり

$$\frac{\mathrm{RQ}^2}{\mathrm{OP}^2}=\frac{(2a+b)^2+(a+2b)^2}{a^2+b^2}=9-\frac{4(a-b)^2}{a^2+b^2}\leqq 9$$

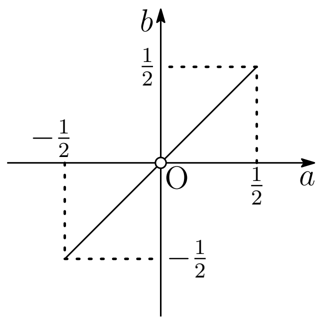
ゆえに　$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}\leqq 3$

等号が成り立つのは $a=b$ のときである．

ゆえに，$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}$ の最大値は　**3**

最大値を与える点 P の方程式は，$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ および a，b の範囲に注意して

$$\boldsymbol{a=b}\ \left(\mathbf{0}<|\boldsymbol{a}|\leqq\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$$



よって，P の表す図形は右の図のようになる．

(2) A^{-1} の固有方程式は　$\lambda^2-4\lambda+3=0$

$\lambda=3,\ 1$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

とおくと，$B=\dfrac{a+b}{2}\vec{u}+\dfrac{a-b+2}{2}\vec{v}$ であるから

$$A^{-1}B=\frac{a+b}{2}A^{-1}\vec{u}+\frac{a-b+2}{2}A^{-1}\vec{v}=\frac{3(a+b)}{2}\vec{u}+\frac{a-b+2}{2}\vec{v}$$

したがって

$$\mathrm{OQ}^2=\frac{9(a+b)^2}{4}|\vec{u}|^2+\frac{(a-b+2)^2}{4}|\vec{v}|^2=\frac{9}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b+2)^2$$

$|a|\leqq\dfrac{1}{2}$，$|b|\leqq\dfrac{1}{2}$ より　$-1\leqq a+b\leqq 1$，$1\leqq a-b+2\leqq 3$

ゆえに，OQ が最小となるとき

$$a+b=0,\ a-b+2=1 \quad \text{すなわち} \quad a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$$

よって　$\mathbf{P}\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$ のとき，**最小値** $\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$ をとる

対称行列の固有ベクトル

本題で与えられた行列 A は対称行列であり，その逆行列も対称行列である．対称行列の固有ベクトルは直交することに注目して本題の解答を行った．

このことに関して，次の定理とその証明をしておく．

定理

対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有ベクトルは直交する．ただし，$A \neq kE$ とする．

証明 A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

この方程式の判別式 D は

$$D = \{-(a+c)\}^2 - 4{\cdot}1(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 > 0$$

ゆえに，異なる 2 つの固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ u_1，u_2 とする．ここで，内積 $u_1{\cdot}u_2$ は行列の積 ${}^tu_1u_2$ であることに留意する．

$$(Au_1){\cdot}u_2 = {}^t(Au_1)u_2 = {}^tu_1{}^tAu_2 = {}^tu_1Au_2 = u_1{\cdot}(Au_2)$$

$Au_1 = \lambda_1u_1$，$Au_2 = \lambda_2u_2$ であるから上式より

$$(\lambda_1u_1){\cdot}u_2 = u_1{\cdot}(\lambda_2u_2) \quad \text{すなわち} \quad (\lambda_1 - \lambda_2)u_1{\cdot}u_2 = 0$$

$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ であるから　$u_1{\cdot}u_2 = 0$　よって　$u_1 \perp u_2$　**証終**

補足

$m\times n$ 行列 A の (i,j) 成分と (j,i) 成分を入れ換えた行列を A の転置行列 (transposed matrix) といい，${}^tA$ と表す．

たとえば，2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の転置行列は，${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$．

$l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B の積 AB は $l \times n$ 行列であり，$n \times m$ 行列 ${}^tB$ と $m \times l$ 行列 ${}^tA$ の積 ${}^tB{}^tA$ は $n \times l$ 行列である．また，次式が成り立つ．

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

正方行列 A が対称行列であることと ${}^tA = A$ が成立することは同値である．

上の証明でベクトルを $\vec{u}_1$ とせず u_1 と表したのは，行列の計算により証明を行ったからである．本来，ベクトルは行列の一部であり，大学等では，$\vec{v}$ などと表記しないのが一般的である．■

8 (1) 2直線PQ，PRが x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とすると

$$m_1 = \tan\theta_1, \quad m_2 = \tan\theta_2$$

$m_1 < 0 < m_2$ より，$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$ であるから

$$\tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2} = \boldsymbol{\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}$$

(2) $y = \dfrac{1}{4}x^2$ を微分すると $\quad y' = \dfrac{1}{2}x$
Qの座標を $(\alpha,\ \frac{1}{4}\alpha^2)$ とすると，Qにおける接線の傾きは m_1 であるから

$$m_1 = \frac{1}{2}\alpha$$

ゆえに $\quad \alpha = 2m_1 \quad$ 点Qの座標は $\quad (2m_1,\ {m_1}^2)$
Qにおける接線の方程式は

$$y - {m_1}^2 = m_1(x - 2m_1) \quad \text{すなわち} \quad y = m_1 x - {m_1}^2 \quad \cdots①$$

同様に，Rにおける接線の方程式は $\quad y = m_2 x - {m_2}^2 \cdots ②$
①，② の交点がPであるから，$m_1 \neq m_2$ に注意してこれを解くと

$$a = m_1 + m_2, \quad b = m_1 m_2$$

また $\quad (m_1 - m_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 = a^2 - 4b > 0$
$m_1 - m_2 < 0$ より $\quad m_1 - m_2 = -\sqrt{a^2 - 4b}$
よって，G の表す方程式は (1) の結果から $\quad \boldsymbol{\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{a^2 - 4b}}{1 + b}}$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき (2) の結果より

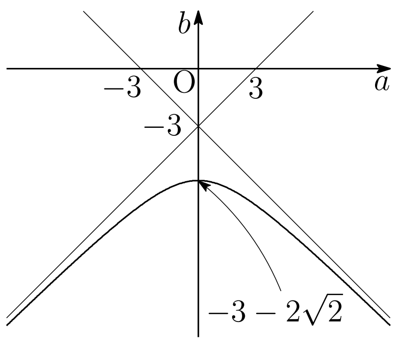
$$1 + b = -\sqrt{a^2 - 4b} \quad \cdots③$$

③ の両辺を平方して

$$1 + 2b + b^2 = a^2 - 4b$$

上式および ③ から

$$\boldsymbol{(b+3)^2 - a^2 = 8,\ b < -1}$$



よって，G の表す図形は，右の図のような双曲線の一部である．

9 (1) $k \geqq 1$ のとき $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ すなわち $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < S_n$

よって $\log(n+1) < S_n \quad \cdots ①$

$k \geqq 2$ のとき $\displaystyle\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$

ゆえに $\displaystyle 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$ すなわち $\displaystyle S_n < 1 + \int_1^{n} \frac{dx}{x}$

よって $S_n < 1 + \log n \quad \cdots ②$

①，② より $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$

(2)
$$\begin{aligned} a_k\Delta b_k + b_{k+1}\Delta a_k &= a_k(b_{k+1} - b_k) + b_{k+1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k \end{aligned}$$

ゆえに
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(a_k\Delta b_k + b_{k+1}\Delta a_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k) \\ &= a_n b_n - a_1 b_1 \end{aligned}$$

よって
$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k\Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}\Delta a_k \quad \cdots (*)$$

$(*)$ に $a_k = S_k$，$\Delta b_k = k$ を適用すると，

$\Delta a_k = \dfrac{1}{k+1}$，$b_k = \dfrac{1}{2}k(k-1)$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k &= S_n\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - S_1\cdot 0 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k(k+1)\cdot\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)S_n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)S_n - \frac{1}{4}n(n-1) \\ &= \left(S_n - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{P(n) = \dfrac{1}{2}n(n-1)}$

(3) (2) の結果から $\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = S_n - \dfrac{1}{2}$

ゆえに $\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n = S_n - \log n - \dfrac{1}{2} \quad \cdots ③$

(1) の結果から $\log(n+1) - \log n - \dfrac{1}{2} < S_n - \log n - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$

ゆえに $-\dfrac{1}{2} < \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2} < S_n - \log n - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} \quad \cdots ④$

③，④ より $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n < \dfrac{1}{2}$

よって $\left|\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n\right| < \dfrac{1}{2}$

補足

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

が発散することは容易に示すことができる．

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&> 1 + \frac{1}{2^1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}^{2^{n-1}\text{個}}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2} = \infty
\end{aligned}$$

次式で定義される

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

をオイラーの定数 (Euler's constant) といい，$\gamma \fallingdotseq 0.577215665\cdots$ であるが (オイラー自身は小数以下 6 桁まで計算)，γ が有理数か無理数かも今でも分かっていない．

これまでに阪大 (理系) 後期で e と π の無理性を証明させる問題が出題された．

1997 大阪大学 (理系) 後期

自然数 n に対して，関数 $f_n(x) = x^n e^{1-x}$ と，その定積分 $a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を考える．ただし，e は自然対数の底である．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上で $0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ であることを示し，さらに $0 < a_n < 1$ が成り立つことを示せ．

(2) a_1 を求めよ．$n > 1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，等式 $\dfrac{a_n}{n!} = e - \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ．

(4) いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数とならないことを示せ．

解答 (1) $f_n(x)$ を微分すると　$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{1-x}$

$0 < x < 1$ において $f_n'(x) > 0$ であるから，$f_n(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で単調増加である．よって，$f_n(0) = 0$，$f_n(1)$ より　$0 \leqq f_n(x) \leqq 1$

$f_n(x)$ は，つねには 0 または 1 ではないので

$$\int_0^1 0\,dx < \int_0^1 f_n(x)\,dx < \int_0^1 1\,dx \quad \text{よって} \quad 0 < a_n < 1$$

(2) $$a_1 = \int_0^1 xe^{1-x} = \Big[-(x+1)e^{1-x}\Big]_0^1 = \boldsymbol{e-2}$$

また
$$a_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx = \int_0^1 x^n(-e^{1-x})'\,dx$$
$$= \Big[-x^n e^{1-x}\Big]_0^1 + n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}\,dx = \boldsymbol{-1 + na_{n-1}}$$

(3) (2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき　$\dfrac{a_n}{n!} - \dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!} = -\dfrac{1}{n!}$

ゆえに
$$\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{a_k}{k!} - \frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right\} = -\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

したがって　$\dfrac{a_n}{n!} - a_1 = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$　よって　$\boldsymbol{\dfrac{a_n}{n!} = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}$

(4) (3) の結果から　$a_n = n!e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$

$n!e$ が整数であれば，上式において，右辺は整数となり，$0 < a_n < 1$ に反し，矛盾を生じる．よって，$n!e$ は整数とならない．■

$e = \dfrac{q}{p}$ を有理数 (p，q は自然数) と仮定すると，$p!e$ は整数となり，前ページ (4) の結論に反する．よって，e は無理数である．

オイラーは，このことについて，次のエレガントな証明 (1744 年) を与えている．

$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\quad \text{は無理数である．}$$

証明 n を自然数とすると

$$e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$

であるから

$$n!e - \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$
$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n} \leqq 1$$

したがって
$$0 < n!e - \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} < 1$$

ここで，$e = \dfrac{q}{p}$ を有理数 (p，q は自然数) と仮定すると，$n = p$ のとき $n!e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$ は整数となり，上式に反する． **証終**

補足

実数を有理数と無理数に分類するように，複素数を**代数的数**と**超越数**に分類する．代数的数とは，有理数を係数とする代数方程式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n = 0 \quad (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \text{は有理数})$$

の解で表されるものをいい，超越数とは，代数的数でない複素数をいう．

たとえば，$-2 + x^2 = 0$，$1 + x^2 = 0$ などの解 $\pm\sqrt{2}$，$\pm i$ は代数的数である．有理数は 1 次の代数方程式の解であるから，有理数は代数的数である．この対偶をとると，実数の超越数は無理数であることがわかる．

1873 年にエルミート (Hermite) により，e は超越数であることが証明された．

有理数における整数の存在は限られたものであるように，複素数における代数的数の存在は限られたものであることが知られている．つまり複素数のほとんどが超越数であるが (その割合を極限でいえば 1)，われわれがこれまでに知り得た超越数は，e，π などのごく僅かである．

2003 大阪大学 (理系) 後期

π を円周率とする．次の積分について考える．

$$I_0 = \pi\int_0^1 \sin\pi t\,dt, \quad I_n = \frac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n \sin\pi t\,dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

(1) n が自然数であるとき，不等式

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < e^x \quad (x > 0)$$

が成立することを数学的帰納法により示せ．これを用いて，不等式

$$I_0 + uI_1 + u^2I_2 + \cdots + u^nI_n < \pi e^{\pi u} \quad (u > 0)$$

が成立することを示せ．

(2) I_0，I_1 の値を求めよ．また，漸化式

$$I_{n+1} = \frac{4n+2}{\pi}I_n - I_{n-1} \quad (n = 1, 2\cdots)$$

が成立することを示せ．

(3) π が無理数であることを背理法により証明しよう．π が無理数でないとし，正の整数 p，q によって $\pi = \dfrac{p}{q}$ として表されると仮定する．$A_0 = I_0$，$A_n = p^nI_n$ とおくとき，A_0，A_1，A_2，$\cdots$ は正の整数になることを示せ．さらに，これから矛盾を導け．

解答　(1) $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} < e^x \quad (x > 0) \quad \cdots$(A) とおく．

$n = 1$ のとき，$\displaystyle\int_0^x 1\,dt < \int_0^x e^t\,dt$ より $x < e^x - 1$ となり (A) は成り立つ．

$n = k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると，$x > 0$ に対して

$$\int_0^x \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right)dt < \int_0^x e^t\,dt$$

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^x - 1$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^x$$

よって，$n = k+1$ のときも (A) は成り立つ．

したがって，すべての自然数 n について (A) は成り立つ．

$0 < t < 1$ において $0 < t^j(1-t)^j \sin\pi t < 1$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} u^j I_j &= \sum_{j=0}^{k} u^j \cdot \frac{\pi^{j+1}}{j!} \int_0^1 t^j(1-t)^j \sin\pi t\,dt \\ &< \pi \sum_{j=0}^{k} \frac{(\pi u)^j}{j!} \int_0^1 dt < \pi e^{\pi u}\end{aligned}$$

よって　$I_0 + uI_1 + u^2I_2 + \cdots + u^nI_n < \pi e^{\pi u} \quad (u > 0)$

(2)　$$I_0 = \pi \int_0^1 \sin\pi t\,dt = \Big[-\cos\pi t \Big]_0^1 = \mathbf{2}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \pi^2 \int_0^1 t(1-t)\sin\pi t\,dt = -\pi \int_0^1 t(1-t)(\cos\pi t)'\,dt \\ &= -\pi\Big[t(1-t)\cos\pi t \Big]_0^1 + \pi \int_0^1 (1-2t)\cos\pi t\,dt \\ &= \int_0^1 (1-2t)(\sin\pi t)'\,dt \\ &= \Big[(1-2t)\sin\pi t \Big]_0^1 - \int_0^1 (-2)\sin\pi t\,dt \\ &= -\frac{2}{\pi}\Big[\cos\pi t \Big]_0^1 = \boldsymbol{\frac{4}{\pi}}\end{aligned}$$

$g_n(t) = \{t(1-t)\}^n$ とおくと　$g_{n+1}(t) = \{t(1-t)\}^{n+1}$

$$\begin{aligned}g'_{n+1}(t) &= (n+1)(1-2t)g_n(t) \quad \cdots ① \\ g''_{n+1}(t) &= (n+1)\{-2g_n(t) + (1-2t)g'_n(t)\} \\ &= (n+1)\{-2g_n(t) + (1-2t)\cdot n(1-2t)g_{n-1}(t)\} \\ &= -2(n+1)g_n(t) + n(n+1)\{1-4t(1-t)\}g_{n-1}(t) \\ &= -2(n+1)g_n(t) + n(n+1)\{g_{n-1}(t) - 4g_n(t)\} \\ &= -2(n+1)(2n+1)g_n(t) + n(n+1)g_{n-1}(t) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt &= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 g_{n+1}(t)(\cos\pi t)'\,dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\Big[\,g_{n+1}(t)\cos\pi t\,\Big]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 g'_{n+1}(t)\cos\pi t\,dt \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g'_{n+1}(t)(\sin\pi t)'\,dt \\ &= \frac{1}{\pi^2}\Big[\,g'_{n+1}(t)\sin\pi t\,\Big]_0^1 - \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g''_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

① より $g'_{n+1}(0)=g'_{n+1}(1)=0$ であるから

$$\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 g''_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt$$

これに ② を代入すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = \frac{2(n+1)(2n+1)}{\pi^2}&\int_0^1 g_n(t)\sin\pi t\,dt \\ -\frac{n(n+1)}{\pi^2}&\int_0^1 g_{n-1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

上式の両辺に $\dfrac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{\pi^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^1 g_{n+1}(t)\sin\pi t\,dt = \frac{4n+2}{\pi}\cdot\frac{\pi^{n+1}}{n!}&\int_0^1 g_n(t)\sin\pi t\,dt \\ -\frac{\pi^n}{(n-1)!}&\int_0^1 g_{n-1}(t)\sin\pi t\,dt\end{aligned}$$

よって　　$I_{n+1} = \dfrac{4n+2}{\pi}I_n - I_{n-1}$

(3) 正の整数 p，q によって，$\pi=\dfrac{p}{q}$ と表されると仮定すると，

$$A_0=I_0=2,\ A_1=pI_1=p\cdot\frac{4}{\pi}=4q$$

(3) の結果の両辺に p^{n+1} を掛けると

$$p^{n+1}I_{n+1}=(4n+2)q\cdot p^nI_n-p^2\cdot p^{n-1}I_{n-1}$$

ゆえに　$A_{n+1}=(4n+2)qA_n-p^2A_{n-1}\quad\cdots ③$

A_0，A_1 は整数であるから，③ により，A_n $(n=0,1,\cdots)$ は整数である．
また，I_n の定義により，$I_n>0$ であるから，A_n は自然数である．

(1) の結果において，$u=p$ とすると

$$A_0+A_1+A_2+\cdots+A_n<\pi e^{\pi p}$$

$\pi e^{\pi p}$ は定数であるから，$\pi e^{\pi p}$ を超える自然数 n が存在し，上式より

$$A_0+A_1+A_2+\cdots+A_n<n\quad\cdots ④$$

また，A_n $(n=0,1,\cdots)$ は自然数であるから

$$n+1\leqq A_0+A_1+A_2+\cdots+A_n\quad\cdots ⑤$$

このとき，④ は ⑤ に反する．よって，π は無理数である．

補足

π の無理性は，1761 年にランベルト (Lambert) によって証明され，その超越性は，1882 年にリンデマン (Lindemann) によって証明された．

解説

阪大の π の無理性の証明は，漸化式による誘導問題になっている．漸化式を利用しない次の解法もある．

問題に与えられた

$$I_0=\pi\int_0^1\sin\pi t\,dt,\quad I_n=\frac{\pi^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\sin\pi t\,dt\quad(n=1,2,\cdots)$$

に対して，$J_n=u^n\pi^nI_n$ とおくと $(n=0,1,2\cdots)$

$$J_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n(\pi t)^n(\pi-\pi t)^n\sin\pi t\cdot\pi\,dt$$

$\theta = \pi t$ とすると

$$J_n = \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} u^n\theta^n(\pi-\theta)^n \sin\theta\,d\theta \quad \cdots ①$$

$0<\theta<\pi$ のとき $0<\theta(\pi-\theta)<\pi^2$，したがって

$$0 < u^n\theta^n(\pi-\theta)^n\sin\theta < u^n\pi^{2n} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$0 < J_n < \frac{(u\pi^2)^n}{n!}\pi \quad \cdots ③$$

ここで，$a = u\pi^2$，$m = [2a]+1$ とすると

$$\frac{(u\pi^2)^n}{n!} = \frac{a^m}{m!}\cdot\frac{a}{m+1}\cdot\frac{a}{m+2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n} < \frac{a^m}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$$

上式により，u に対して n を十分大きくとれば，③ より

$$0 < J_n < 1 \quad \cdots ④$$

次に

$$f(\theta) = \frac{1}{n!}u^n\theta^n(\pi-\theta)^n \quad \cdots ⑤$$

とおくと，① から

$$J_n = \int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\,d\theta \quad \cdots ⑥$$

部分積分により

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\,d\theta &= \Big[-f(\theta)\cos\theta\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(\theta)\cos\theta\,d\theta \\ &= f(\pi)+f(0)+\int_0^{\pi} f'(\theta)\cos\theta\,d\theta \\ \int_0^{\pi} f'(\theta)\cos\theta\,d\theta &= \Big[\,f'(\theta)\sin\theta\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f''(\theta)\sin\theta\,d\theta \\ &= -\int_0^{\pi} f''(\theta)\sin\theta\,d\theta\end{aligned}$$

ゆえに　$$\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\,d\theta = f(\pi)+f(0)-\int_0^{\pi} f''(\theta)\sin\theta\,d\theta$$

したがって，この部分積分を順次行うと，$f^{(2n+2)}(\theta)=0$ であるから

$$\int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\,d\theta = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(f^{(2k)}(\pi)+f^{(2k)}(0)\right) \quad \cdots ⑦$$

$f(\pi-\theta)=f(\theta)$ であるから，合成関数の微分律により

$$f^{(j)}(\theta) = (-1)^j f^{(j)}(\pi-\theta)$$

上式より，$f^{(2k)}(\pi) = f^{(2k)}(0)$ であるから，⑥，⑦ より

$$J_n = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(0) \quad \cdots ⑧$$

⑤ の $(\pi-\theta)^n$ を展開すると

$$f(\theta) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_n\mathrm{C}_k u^n \pi^{n-k}\theta^{n+k}$$

ゆえに　$f^{(k)}(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$

$$f^{(n+k)}(0) = (-1)^k {}_n\mathrm{C}_k \frac{(n+k)!}{n!} u^n \pi^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

自然数 p，q を用いて，$\pi = \dfrac{p}{q}$ と表されると仮定すると，$u = q$ のとき

$$u^n \pi^{n-k} = q^n \left(\frac{p}{q}\right)^{n-k} = p^{n-k} q^k$$

このとき，$f^{(i)}(0)$ は整数であるから $(i = 0, 1, 2, \cdots, 2n)$，⑧ より J_n は整数となり，④ に反する．したがって，π は無理数である．

2006 京都大学 (理系) 後期

$\tan 1^\circ$ は有理数か．

解答 $\tan 1^\circ$ を有理数と仮定する．88 以下の整数 n に対して，$\tan n^\circ$ が有理数ならば

$$\tan(n+1)^\circ = \frac{\tan n^\circ + \tan 1^\circ}{1 - \tan n^\circ \tan 1^\circ}$$

より，$\tan(n+1)^\circ$ は有理数である．したがって，数学的帰納法により，$1 \leqq n \leqq 89$ の自然数 n について，$\tan n^\circ$ は有理数となる．

このとき，$\tan 30^\circ$ は無理数 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，上の結論に反する．

よって，$\tan 1^\circ$ は無理数である．■

10.4　2004 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$I_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx$$

とおく。ただし，$0! = 1$ とする。

(1) I_0 の値を求め，$n = 1, 2, \cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また，これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ に対して $e^x \leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx \leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。

2 2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ。ただし，a，b は定数とする。

(1) $(a+b)^4$，$(a-b)^4$ を展開せよ。

(2) A^4 を $(a+b)^4$，$(a-b)^4$ を用いて表せ。

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ。

(4) $0 < a < 1$ とし $b = 1 - a$ としたときの A^n の $(1,\ 1)$ 成分を x_n とする。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

3 座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x(t) = \cos\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases} \qquad (0 \leqq t < 2\pi)$$

で与えられているとし，この点の軌跡を C とする。

(1) P が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。

(2) C が x 軸，y 軸に関して対称であることを示せ。

(3) C の概形を描け。

(4) C が囲む図形の面積を求めよ。

4 座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad x \geqq y, \quad 0 \leqq z \leqq 1$$

を考え，その xy 平面内の面を S，xz 平面内の面を T とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし，点 A，B は原点 O とは異なるとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。ただし，点 O，A，B，C は同一平面上にないとする。

(3) 点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする。このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A，B の位置をすべて求めよ。

5 n を 3 以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる。これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れたあと，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1) 赤青 $\cdots$ 青，赤赤青 $\cdots$ 青，$\cdots$ のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3) 色の変化がちょうど m 回 $(0 \leqq m \leqq n-1)$ 起きる確率を求めよ。

(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $I_0=\dfrac{(-1)^0}{0!}\displaystyle\int_0^2 x^0e^x\,dx=\int_0^2 e^x\,dx=\Big[\,e^x\,\Big]_0^2=\boldsymbol{e^2-1}$

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^ne^x\,dx=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n(e^x)'\,dx\\&=\frac{(-1)^n}{n!}\Big[\,x^ne^x\,\Big]_0^2-\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2(x^n)'e^x\,dx\\&=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot2^ne^2+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^2 x^{n-1}e^x\,dx=\frac{(-1)^n2^ne^2}{n!}+I_{n-1}\end{aligned}$$

ゆえに　$\boldsymbol{I_n-I_{n-1}=\dfrac{(-1)^n2^ne^2}{n!}}$　$\cdots(*)$

したがって　$I_3=I_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^n2^ne^2}{n!}$

$$=(e^2-1)+\frac{-2e^2}{1!}+\frac{4e^2}{2!}+\frac{-8e^2}{3!}=\boldsymbol{-\frac{1}{3}e^2-1}$$

(2) $0\leqq x\leqq 2$ において，$x^ne^x\leqq x^ne^2$ であるから $(n=1,2,\cdots)$

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^x\,dx\leqq\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^2\,dx=\frac{e^2}{(n+1)!}\Big[\,x^{n+1}\,\Big]_0^2=\frac{e^22^{n+1}}{(n+1)!}\quad\cdots①$$

$n\geqq 2$ のとき　$\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{2\cdot2}{1\cdot2}\times\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdots\dfrac{2}{n+1}\leqq 2\times\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{2}{3}=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ $\cdots②$

$n=1$ のとき ② は等号が成り立つので，② は $n\geqq 1$ について成り立つ．

①，② より　$\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x\,dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$　$(n=1,2,\cdots)$

(3) $(*)$ より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(I_k-I_{k-1})=e^2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}$　ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}=\frac{I_n-I_0}{e^2}$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}=1+\frac{I_n-I_0}{e^2}=\frac{I_n}{e^2}+\frac{1}{e^2}$　$\cdots③$

(2) の結果から　$|I_n|\leqq 2e^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　$(n=1,2,\cdots)$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$　$\cdots④$

③，④ により　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}=\frac{1}{e^2}}$　■

2 (1) $\boldsymbol{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$

$\boldsymbol{(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4}$

(2) A の固有方程式は　$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0$

A の固有値を $\alpha = a+b,\ \beta = a-b$ とおき，次の 2 つに場合分けをする．

i) $\alpha \neq \beta$　すなわち　$b \neq 0$ のとき

$$F = \frac{A-\beta E}{\alpha-\beta} = \frac{1}{2b}\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - (a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha} = \frac{1}{-2b}\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - (a+b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

このとき　$F^2 = F$，$G^2 = G$，$FG = GF = O$，$A = \alpha F + \beta G$　$\cdots(*)$

したがって　$A^4 = \alpha^4 F + \beta^4 G$

よって　$A^4 = (a+b)^4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (a-b)^4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　$\cdots$①

ii) $\alpha = \beta$　すなわち　$b = 0$ のとき

$A = aE$ であるから　$A^4 = a^4E$

i)，ii) より，$b = 0$ のときも ① は成り立つので

$$\boldsymbol{A^4 = (a+b)^4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (a-b)^4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(3) $(*)$ および $b = 0$ $(A = aE)$ のとき次式が成り立つことから

$$\boldsymbol{A^n = (a+b)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (a-b)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(4) (3) の結果から　$x_n = \dfrac{1}{2}(a+b)^n + \dfrac{1}{2}(a-b)^n$

$b = 1-a$ より　$a+b = 1$，$a-b = 2a-1$

$0 < a < 1$ より　$-1 < 2a-1 < 1$　ゆえに　$-1 < a-b < 1$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}}$

スペクトル分解

固有値と固有ベクトルの考え方が本質にあるので，このことについて簡単にまとめておく．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A\vec{p} = \lambda\vec{p} \quad \cdots ①$$

を満たすベクトル $\vec{p}\ (\vec{p} \neq \vec{0})$，スカラー λ が存在するとき，$\vec{p}$ を A の**固有ベクトル**，λ を A の**固有値**という．

① より $(A - \lambda E)\vec{p} = \vec{0}$ となり，$\vec{p} \neq \vec{0}$ であるから

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

は逆行列をもたないので

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

すなわち　$$\boldsymbol{\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0} \quad \cdots ②$$

が成り立つ．② を A の**固有方程式**という．② の解を α，β とし，$\lambda = \alpha$ に対する固有ベクトルを $\vec{u}$，$\lambda = \beta$ に対する固有ベクトルを $\vec{v}$ とすると

$$A\vec{u} = \alpha\vec{u} \quad \cdots ③$$
$$A\vec{v} = \beta\vec{v} \quad \cdots ④$$

このとき，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{\alpha \neq \beta \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} \not\parallel \vec{v}} \qquad \cdots (*)$$

証明　$\vec{u}/\!/\vec{v}$ と仮定すると，零でないスカラー k を用いて $\vec{v} = k\vec{u}$ と表すことがきるので，これを ④ に代入すると

$$A(k\vec{u}) = \beta(k\vec{u})$$

$k \neq 0$ より　$$A\vec{u} = \beta\vec{u} \quad \cdots ⑤$$

③，⑤ から，$(\alpha-\beta)\vec{u} = \vec{0}$ を得る．これは，$\alpha \neq \beta$，$\vec{u} \neq \vec{0}$ に反するので，$(*)$ が成り立つ．　証終

行列 A が異なる 2 つの固有値 α，β をもつとき，固有値 α に対する固有ベクトルを $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$)，固有値 β に対する固有ベクトルを $\vec{v}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) とする．

このとき，2 つの 1 次変換を表す行列 F，G を

$$F\vec{u} = \vec{u}, \quad F\vec{v} = \vec{0}, \quad G\vec{u} = \vec{0}, \quad G\vec{v} = \vec{v}$$

で定義すると，次が成り立つ．

$$F^2 = F, \quad G^2 = G, \quad FG = GF = O, \quad F + G = E, \quad A = \alpha F + \beta G$$

証明 $P = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$ とおくと，$\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ であるから，行列 P は正則である．

$$FP = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}, \quad F^2P = F(FP) = F\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}$$

よって，$F^2P = FP$ であり，P は正則であるから　$F^2 = F$ ■

$$FGP = F(GP) = F\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix}$$

よって，$FGP = O$ であり，P は正則であるから　$FG = O$ ■

同様にして　$G^2 = G$，$GF = O$ ■

$$(F + G)P = FP + GP = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$$

よって，$(F + G)P = P$ であり，P は正則であるから　$F + G = E$ ■

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} \alpha\vec{u} & \beta\vec{v} \end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} \\ &= \alpha FP + \beta GP \\ &= (\alpha F + \beta G)P \end{aligned}$$

上式から，P は正則であるから，$A = \alpha F + \beta G$ ■　　　　証終

$\boldsymbol{A = \alpha F + \beta G}$ を A の**スペクトル分解**といい，この式の両辺を n 乗すると

$$\boldsymbol{A^n = \alpha^n F + \beta^n G}$$

なお，F，G は，$\alpha F + \beta G = A$，$F + G = E$ により

$$F = \frac{A - \beta E}{\alpha - \beta}, \qquad G = \frac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}$$

となり，$A = \alpha F + \beta G$ (α, βは A の固有値) をみたす F，G は一意的に定まる．

2007 東京大学 (理系) 前期

以下の問いに答えよ．

(1) 実数 a に対し，2 次の正方行列 A，P，Q が，5 つの条件 $A=aP+(a+1)Q$，$P^2=P$，$Q^2=Q$，$PQ=O$，$QP=O$ をみたすとする．ただし，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．このとき，$(P+Q)A=A$ が成り立つことを示せ．

(2) a は正の数として，行列 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ を考える．この A に対し，(1) の 5 つの条件をみたす行列 P，Q を求めよ．

(3) n を 2 以上の整数とし，$2 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 k に対して $A_k=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$ とおく．行列の積 $A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots A_2$ を求めよ．

A の固有方程式 $\lambda^2-(2a+1)\lambda+a(a+1)=0$ から，a, $a+1$ は A の固有値である．P，Q の条件から，$A=aP+(a+1)Q$ は A のスペクトル分解である．

解答 (1)
$$\begin{aligned}(P+Q)A&=(P+Q)\{aP+(a+1)Q\}\\&=aP^2+(a+1)PQ+aQP+(a+1)Q^2\\&=aP+(a+1)Q\end{aligned}$$

よって　$(P+Q)A=A$

(2) $\det A=a(a+1)>0$ より，A は正則であるから，(1) の結果の両辺に A^{-1} を右から掛けると　$P+Q=E$

上式と $A=aP+(a+1)Q$ から　$P=-A+(a+1)E$，$Q=A-aE$

ゆえに　$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$　$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

P，Q は (1) の 5 つの条件をみたす．

(3) $k \geqq 2>0$ より (2) において $a=k$ とおくと　$A_k=kP+(k+1)Q$

P，Q の性質に注意して

$$\begin{aligned}&A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots A_2\\=&n(n-1)(n-2)\cdots 2P+(n+1)n(n-1)\cdots 3Q\\=&n!P+\frac{1}{2}n!Q=\begin{pmatrix} n! & 0 \\ \frac{1}{2}(n-1)n! & \frac{1}{2}n! \end{pmatrix}\end{aligned}$$

■

3　(1)　P が原点を通るとき，$x(t)=0$，$y(t)=0$ より

$$\begin{cases} \cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \cos(2t)=0 \end{cases} \quad (0 \leqq t < 2\pi) \quad \text{これを解いて} \quad t=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

$x'(t)=-\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$，$y'(t)=-2\sin(2t)$ より

$$\begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1 \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2 \end{cases} \quad \text{および} \quad \begin{cases} x'\left(\frac{5}{4}\pi\right)=1 \\ y'\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-2 \end{cases}$$

求める速度ベクトルは　$\boldsymbol{t=\frac{\pi}{4}}$ **のとき** $\boldsymbol{(-1,-2)}$，$\boldsymbol{t=\frac{5}{4}\pi}$ **のとき** $\boldsymbol{(1,-2)}$

(2)　$t=t_1$ $(0 \leqq t_1 < 2\pi)$ における C 上の点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ と x 軸および y 軸に関して対称な点をそれぞれ $\mathrm{Q}(x_1,-y_1)$，$\mathrm{R}(-x_1,\ y_1)$ とすると

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\left(t_1+\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left\{\left(\tfrac{3}{2}\pi-t_1\right)+\tfrac{\pi}{4}\right\} \\ -y_1 &= -\cos 2t_1=\cos 2\left(\tfrac{3}{2}\pi-t_1\right) \\ -x_1 &= -\cos\left(t_1+\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left\{(t_1+\pi)+\tfrac{\pi}{4}\right\} \\ y_1 &= \cos 2t_1=\cos 2\left(t_1+\pi\right) \end{aligned}$$

したがって，Q は $0 \leqq t_1 \leqq \frac{3}{2}\pi$ のとき, $t=\frac{3}{2}\pi-t_1$ における C 上の点であり，$\frac{3}{2}\pi < t_1 < 2\pi$ のとき $t=\frac{7}{2}\pi-t_1$ における C 上の点である．

また，R は $0 \leqq t_1 < \pi$ のとき, $t=t_1+\pi$ における C 上の点であり，$\pi \leqq t_1 < 2\pi$ のとき $t=t_1-\pi$ における C 上の点である．

(3)　$x=\cos(t+\frac{\pi}{4})$，$y=\cos(2t)$ とおくと

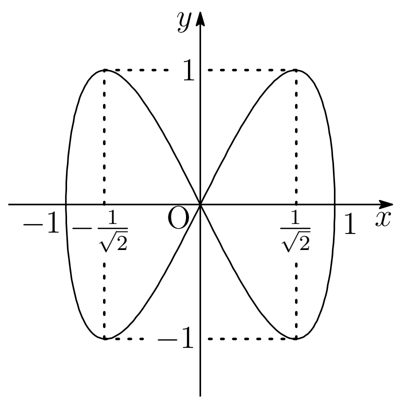
$$y=\cos 2t=\sin 2\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)=\pm 2x\sqrt{1-x^2}$$

$y=2x\sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ のとき

$$y'=\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

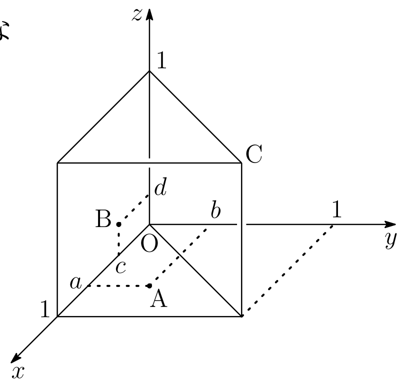


(2) の結果から，C の概形は右の図のようになる．

(4)　求める面積 S は　$S=4\displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx=4\Big[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$

補足　(2) は，$\frac{\pi}{4}$ ごとに動点 P の位置を調べると，動点 Q，R の取り方がわかる．

$\boxed{4}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ 0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 1,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つを



$$\vec{n}=(b,-a,\ a-b)$$

とすると

$$|\vec{n}|=\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}$$

求める単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e}=\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\pm\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}(b,-a,\ a-b)}$$

ゆえに　$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\pm\dfrac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}$

$bc\geqq 0$，$a-b\geqq 0$，$d\geqq 0$ であるから　$|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\boldsymbol{\dfrac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}}$

(2) $\triangle$OAC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}$$

四面体 OABC において $\triangle$OAC を底面とすると，高さは $|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから

求める四面体の体積 V は　$V=\dfrac{1}{3}S\times|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\boldsymbol{\dfrac{bc+(a-b)d}{6}}$

(3) $0\leqq b\leqq a\leqq 1$，$0\leqq c\leqq 1$，$0\leqq d\leqq 1$ であるから，(2) の結果より

i) $b>0$，$a-b>0$ のとき　$V\leqq\dfrac{b\cdot1+(a-b)\cdot1}{6}=\dfrac{a}{6}\leqq\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V\leqq\dfrac{1}{6}$　(等号は $a=1,\ 0<b<1,\ c=1,\ d=1$ のとき)

ii) $b=0$ のとき　$V=\dfrac{ad}{6}\leqq\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V\leqq\dfrac{1}{6}$　(等号は $a=1,\ 0\leqq c\leqq 1,\ d=1$ のとき)

iii) $a-b=0$ のとき　$V=\dfrac{bc}{6}\leqq\dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V\leqq\dfrac{1}{6}$　(等号は $b=c=1,\ 0\leqq d\leqq 1$ のとき)

よって，V の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ で，そのときの A，B は次の 3 組である．

$\mathbf{A(1,\ \boldsymbol{b},\ 0),\ B(1,\ 0,\ 1)\quad(0<\boldsymbol{b}<1)}$
$\mathbf{A(1,\ 0,\ 0),\ B(\boldsymbol{c},\ 0,\ 1)\quad(0\leqq\boldsymbol{c}\leqq1)}$
$\mathbf{A(1,\ 1,\ 0),\ B(1,\ 0,\ \boldsymbol{d})\quad(0\leqq\boldsymbol{d}\leqq1)}$

ベクトル積

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表し，その成分は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned} |\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 \\ &= ({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \end{aligned}$$

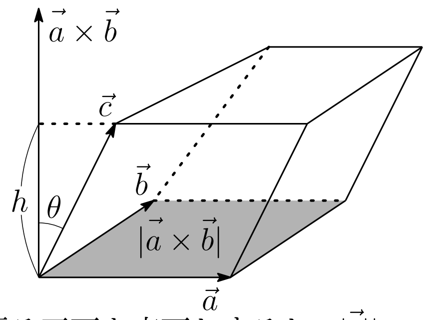
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

補足　本題 (2) で，$\vec{a}=(a,\ b,\ 0)$，$\vec{b}=(c,\ 0,\ d)$，$\vec{c}=(1,1,1)$ とすると

$$\vec{a}\times\vec{c}=(b,-a,\ a-b),\ (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=bc+(a-b)d$$

よって，四面体の体積 V は　$V=\dfrac{1}{6}|bc+(a-b)d|$

2010 東京大学 (理系) 前期

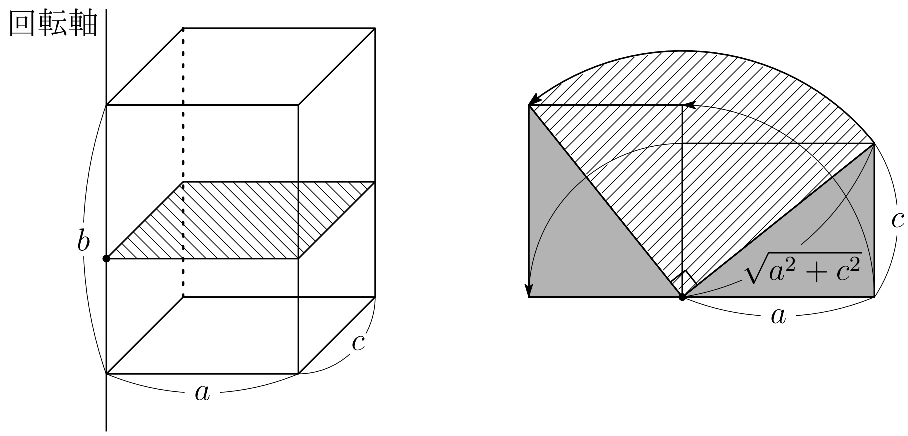
3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする．

(1) V の体積を a，b，c を用いて表せ．

(2) $a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ．

解答　(1) 下の図から，求める体積 V は

$$V=\left(\frac{\pi}{4}(\sqrt{a^2+c^2})^2+2\times\frac{1}{2}ac\right)b=\boldsymbol{\left\{\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\}b}$$



(2) (V は a，c に関する対称式であるから，a と c をまとめて扱う)

$a^2+c^2=\dfrac{1}{2}\{(a+c)^2+(a-c)^2\}$,　$ac=\dfrac{1}{4}\{(a+c)^2-(a-c)^2\}$ より

$$V=\left\{\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)(a+c)^2+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)(a-c)^2\right\}b$$

$a+b+c=1$ より $a+c=1-b$ となり，$t=a-c$ とおくと

上の 2 式より　　$2a=(1-b)+t$，$2c=(1-b)-t$

$a>0$，$c>0$ より　　$-(1-b)<t<1-b$

このとき，$0\leqq(a-c)^2<(1-b)^2$ であるから，固定値 b に対して

$$\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)b(1-b)^2\leqq V<\left\{\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)(1-b)^2+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)(1-b)^2\right\}b$$

すなわち　　$\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}\right)b(1-b)^2\leqq V<\dfrac{\pi}{4}b(1-b)^2$

$0<b<1$ において，$0<b(1-b)^2\leqq\dfrac{4}{27}$ となり　　$\boldsymbol{0<V<\dfrac{\pi}{27}}$　■

$\boxed{5}$ 起こりうる場合の総数は 2^n (通り)

(1) 左端が赤色で，色の変化がちょうど 1 回起きる場合は，次の $n-1$ 通り．

「赤青青 $\cdots$ 青」,「赤赤青 $\cdots$ 青」,$\cdots$,「赤赤 $\cdots$ 赤青」

よって，求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{n-1}{2^n}}$

(2) 色の変化が 1 回も起きない場合は，次の 2 通り

「赤赤 $\cdots$ 赤赤」,「青青 $\cdots$ 青青」

色の変化が 1 回だけ起きる場合は，(1) の左端が赤である場合と，同様に左端が青である場合の $(n-1)\times 2$ 通りである．

したがって，色の変化が 1 回以下である確率は $\dfrac{2+(n-1)\times 2}{2^n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

求める確率は，この余事象の確率であるから $\boldsymbol{1-\dfrac{n}{2^{n-1}}}$

(3) 左端が赤色か青色の 2 通りに対して，色の変化が 2 個目，3 個目，$\cdots$，n 個目の $n-1$ 個の電球の中から変化する電球 m 個を選ぶ場合の数は

$$2\times {}_{n-1}\mathrm{C}_m \ (\text{通り})$$

求める確率を $P(m)$ とすると $(0 \leqq m \leqq n-1)$

$$P(m) = \frac{2\times {}_{n-1}\mathrm{C}_m}{2^n} = \boldsymbol{\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_m}{2^{n-1}}}$$

(4) 求める期待値を E とすると，(3) の結果から

$$E = \sum_{m=0}^{n-1} m\cdot P(m) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=0}^{n-1} m\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_m = \frac{1}{2^{n-1}}\times(n-1)\cdot 2^{n-2} = \boldsymbol{\frac{n-1}{2}}$$

補足

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} k\cdot {}_n\mathrm{C}_k = n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\cdot 2^{n-1}$$

■

10.5　2005 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 直線 $\ell : y = x + a$ が曲線 $C : y = 2\sin x$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ に接しているとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq 0$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の $y \geqq 0$ の範囲にある部分を，x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。

2 行列 A と列ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，列ベクトル $\vec{p}_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を

$$\vec{p}_1 = \vec{a}, \quad \vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n + \vec{b} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ を満たす列ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

(2) $\vec{q}_n = \vec{p}_n - \vec{p}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおく。$\vec{q}_{n+1}$ と $\vec{q}_n$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) $n = 1, 2, \cdots$ に対して A^n を求めよ。

(4) $\vec{p}_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ。

3 t を実数とするとき，2 次方程式

$$z^2 + tz + t = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1) の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が (1) で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3) 複素数平面上で，点 z が (2) の図形 C 上を動くとき，

$$w = \frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が動く図形を求め，図示せよ。

4 実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば，$\left[\frac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0<\theta<\pi$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

5 実数 t が $t\geqq 0$ の範囲を動くとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}(t^2,\ e^{-t})$ が描く曲線を C とする。a を正の実数とし，曲線 C と x 軸，y 軸および直線 $x=a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) $a>0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形を描け。ただし，$\lim\limits_{a\to\infty}ae^{-a}=0$ であることを用いてよい。

(3) $S(a)=1.35$ となる a が $2<a<3$ の範囲に存在することを示せ。ただし，必要なら $2.5<e<3$ であることを用いてよい。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y=2\sin x$ を微分すると　$y'=2\cos x$

$y'=1\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を解くと　$x=\pm\dfrac{\pi}{3}$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ における C の接線の方程式は

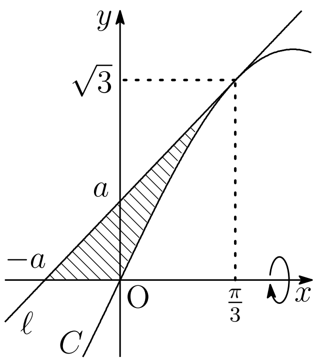
$$y-2\sin\frac{\pi}{3}=x-\frac{\pi}{3}\quad \text{すなわち}\quad y=x+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

$x=-\dfrac{\pi}{3}$ における C の接線の方程式は

$$y-2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=x+\frac{\pi}{3}\quad \text{すなわち}\quad y=x-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$$

$a>0$ であるから　$\boldsymbol{a=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}}$

(2) 求める立体の体積を V とすると



$$\begin{aligned}
V&=\frac{1}{3}\cdot\pi(\sqrt{3})^2\cdot\left(\frac{\pi}{3}+a\right)-\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x)^2\,dx\\
&=\sqrt{3}\pi-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2x)\,dx\\
&=\sqrt{3}\pi-2\pi\Big[\,x-\frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi-\frac{2}{3}\pi^2}
\end{aligned}$$

■

2　(1) $\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ より　$(E - A)\vec{p} = \vec{b}$

$E - A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であり，$(E - A)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

よって　$\vec{p} = (E - A)^{-1}\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

(2) $\vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n + \vec{b}$，$\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ より　　$\vec{p}_{n+1} - \vec{p} = A(\vec{p}_n - \vec{p})$

$\vec{q}_n = \vec{p}_n - \vec{p}$ により　　$\boldsymbol{\vec{q}_{n+1} = A\vec{q}_n}$

(3) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ にハミルトン・ケーリーの定理を適用すると

$$A^2 - A + \frac{1}{4}E = O \quad \text{すなわち} \quad \left(A - \frac{1}{2}E\right)^2 = O$$

ここで，$B = A - \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと　$B^2 = O$

$A = \frac{1}{2}E + B$ であるから

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}E\right)^{n-k} B^k \\ &= \frac{1}{2^n}E + \frac{n}{2^{n-1}}B + B^2\sum_{k=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}E\right)^{n-k} B^{k-2} \\ &= \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{n}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(4) (2) より　　$\vec{q}_n = A^{n-1}\vec{q}_1$

$\vec{q}_1 = \vec{p}_1 - \vec{p} = \vec{a} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ であるから

$$\vec{q}_n = \frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} -2n+1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よって　　$\vec{p}_n = \vec{q}_n + \vec{p} = \boldsymbol{\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 2^n - 2n + 1 \\ 2^n - 2 \end{pmatrix}}$　■

3 (1) 2 次方程式 $z^2+tz+t=0\cdots$ ① が異なる 2 つの虚数解をもつとき，$D<0$ であるから

$$t^2-4\cdot1\cdot t<0 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{0<t<4}$$

このとき，方程式 ① の解は　$\boldsymbol{z=\dfrac{-t\pm\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}}$

(2) $z=z(t)$ とおくと，解と係数の関係により　$z+\overline{z}=-t$，$z\overline{z}=t$

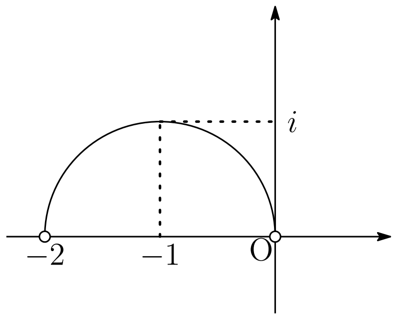
上の 2 式から t を消去すると

$$z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$
$$(z+1)(\overline{z}+1)=1$$

したがって　$|z+1|^2=1$

よって　$|z+1|=1$

ゆえに，$z(t)$ は，-1 を中心とする半径 1 の円周上で，虚部が正である点である．

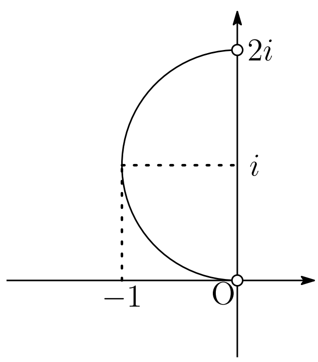


よって，$z(t)$ が描く図形 C は，右の図のようになる．

(3) (2) の結果から，$z=-1+(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(0^\circ<\theta<180^\circ)$

$$\begin{aligned}
w&=\frac{iz}{z+1}=\frac{i\{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)\}}{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)+1}\\
&=\frac{-i+i(\cos\theta+i\sin\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta}\\
&=-i\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\
&=(\cos270^\circ+i\sin270^\circ)\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\
&=i+\cos(270^\circ-\theta)+i\sin(270^\circ-\theta) \qquad (90^\circ<270^\circ-\theta<270^\circ)
\end{aligned}$$

よって，w が描く図形は，下の図のようになる．



■

4　(1) $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 1$ より　$\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 2$

したがって　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 2$

ゆえに　$\dfrac{5}{2}+\cos\theta < 3$　すなわち　$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$

$0<\theta<\pi$ より　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < \theta < \pi}$

(2) $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right] \geqq 1$ より

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\sin\theta \geqq \log_2\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0<\theta<\pi$ より　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi}$

(3) $\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{5}{2}+\cos\theta \leqq \dfrac{7}{2}\cdots①$ であるから　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]=1,\ 2,\ 3$ より

$$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=0,\ 1,\ \log_2 3$$

$\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta \leqq \dfrac{3}{2}\cdots②$ であるから　$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right] \leqq 1$

与えられた不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ から

$$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=0,\ 1 \quad \text{ゆえに} \quad \left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1,\ 2$$

上式について，次の2つに場合分けをする．

[1] $\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]=1$ のとき，① に注意して

$$\frac{3}{2} \leqq \frac{5}{2}+\cos\theta < 2 \quad \text{ゆえに} \quad -1 \leqq \cos\theta < -\frac{1}{2}$$

$0<\theta<\pi$ より　$\dfrac{2}{3}\pi < \theta < \pi \quad \cdots③$

与えられた不等式から　$0 \leqq \left[\dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\right] \leqq 1$

② に注意して　$0 \leqq \dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta \leqq \dfrac{3}{2}$

$$-\frac{3}{2} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq 0$$

ゆえに　$\log_2 \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq \log_2 1$

したがって　$\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq \sin\theta \leqq 1$

$0 < \theta < \pi$ より　$\alpha \leqq \theta \leqq \pi - \alpha \quad \cdots$④

$\sin\dfrac{2}{3}\pi > \sin(\pi - \alpha)$ であるから $\dfrac{2}{3}\pi < \pi - \alpha$ に注意して，
③，④ の共通範囲を求めると

$$\frac{2}{3}\pi < \theta \leqq \pi - \alpha$$

[2]　$\left[\dfrac{5}{2} + \cos\theta\right] = 2$ のとき

$$2 \leqq \frac{5}{2} + \cos\theta < 3 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{2} \leqq \cos\theta < \frac{1}{2}$$

$0 < \theta < \pi$ より　$\dfrac{\pi}{3} < \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi \quad \cdots$⑤

与えられた不等式から　$\left[\dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\right] = 1$

② に注意して　$1 \leqq \dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta \leqq \dfrac{3}{2}$

$$-\frac{1}{2} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq 0$$

ゆえに　$\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq \log_2 1$

したがって　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\theta \leqq 1$

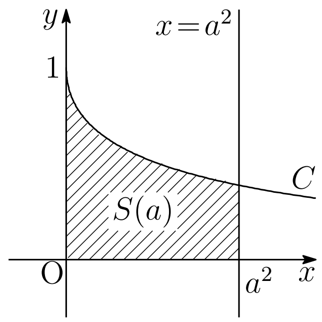
$0 < \theta < \pi$ より　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi \quad \cdots$⑥

⑤，⑥ の共通範囲を求めると

$$\frac{\pi}{3} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$$

求める θ の値の範囲は，[1] または [2] であるから　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < \theta \leqq \pi - \alpha}$ ■

5 (1) $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = e^{-t} \end{cases}$ $(t \geqq 0)$ より，$y \geqq 0$ であるから

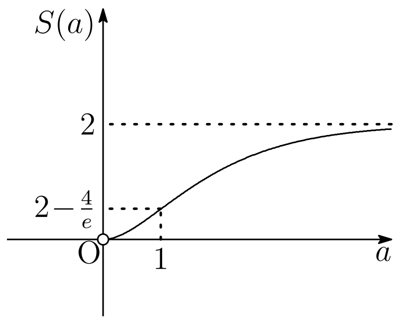


$$
\begin{aligned}
S(a) &= \int_0^{a^2} y\,dx = \int_0^a e^{-t}\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^a e^{-t}\cdot 2t\,dt = 2\int_0^a te^{-t}\,dt \\
&= -2\Big[\,(t+1)e^{-t}\,\Big]_0^a \\
&= \boldsymbol{-2(a+1)e^{-a}+2}
\end{aligned}
$$

(2) $S'(a) = 2ae^{-a}$，$S''(a) = 2(1-a)e^{-a}$

$S(a)$ の増減，凹凸は下の表のようになる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	$+$	$+$
$S''(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$	0	⤴	変曲点	↗



また，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(a+1)e^{-a} = 0$ であるから

$$
\lim_{a\to\infty} S(a) = 2
$$

よって，$S(a)$ のグラフは，右の図のようになる。

(3) $\dfrac{5}{2} < e < 3$ であるから

$$
S(2) = 2(1-3e^{-2}) = 2\left(1-\frac{3}{e^2}\right) < 2\left(1-\frac{3}{3^2}\right) = \frac{4}{3} < 1.35
$$

$$
S(3) = 2(1-4e^{-3}) = 2\left(1-\frac{4}{e^3}\right) > 2\left\{1-4\left(\frac{2}{5}\right)^3\right\} = \frac{186}{125} > 1.35
$$

したがって　　$S(2) < 1.35 < S(3)$

よって，中間値の定理により，$S(a) = 1.35$ を満たす a が $2 < a < 3$ の範囲に存在する．■

10.6　2006 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 次の問いに答えよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい。

(1) 自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1) の 2 つの実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，

$$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\quad ne<\beta_n$$

が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ。

2 △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点を P とする。ただし，$0<\alpha<1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし，Q を通り，線分 AM に垂直な直線が，辺 OA またはその延長と交わる点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および α を用いて表せ。

(2) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ で $\cos\theta=\dfrac{1}{6}$ とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と α を用いて表せ。

(3) (2) の条件のもとで，点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ。

3 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，$a_1=b_1=1$ および，関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n$$
$$b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$$

をみたすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

4 関数
$$f(x) = \left| \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right|$$
を考える。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。さらに，$0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，
$$F(a) = \int_0^a f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$$
とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) $F(a)$ を求めよ。

5 区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは，
$$a \leqq x \leqq b \text{ ならば，} \quad a \leqq f(x) \leqq b$$
が成り立つこととする。$f(x) = 4x(1-x)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。

(2) $0 < a < b < 1$ とする。このとき，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。

解答例

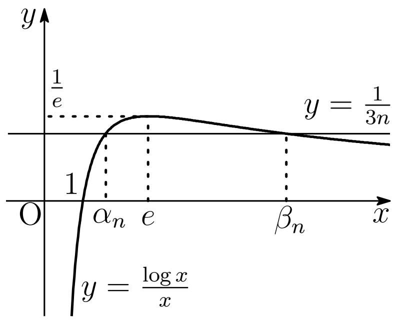
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x) = 0$ のとき　$x = e$

よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$



$\dfrac{1}{3n} \leqq \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{e}$ であるから，上のグラフより，方程式 $\dfrac{\log x}{x} = \dfrac{1}{3n}$ は $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つ実数解をもつ．

(2) $n \geqq 1$ より　　$e^{\frac{1}{n}} \leqq e \leqq ne$　$\cdots$①

$f(e^{\frac{1}{n}}) = \dfrac{1}{ne^{\frac{1}{n}}} \geqq \dfrac{1}{ne} > \dfrac{1}{3n} > 0$ であるから

$$0 < \frac{1}{3n} < f(e^{\frac{1}{n}}) \quad \text{ゆえに} \quad f(1) < f(\alpha_n) < f(e^{\frac{1}{n}}) \quad \cdots ②$$

$f(ne) = \dfrac{\log ne}{ne} > \dfrac{\log e}{3n} = \dfrac{1}{3n}$ であるから

$$f(ne) > \frac{1}{3n} \quad \text{ゆえに} \quad f(ne) > f(\beta_n) \quad \cdots ③$$

$f(x)$ は，$0 < x < e$ において単調増加であり，$e < x$ において単調減少であるから，①，②，③ により

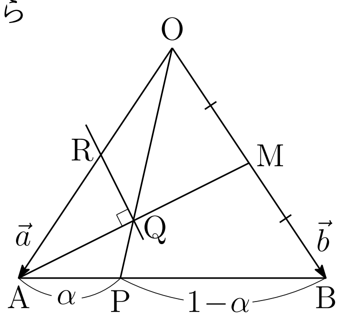
$$1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}, \quad ne < \beta_n$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \mathbf{1}$$

■

2 (1) P は AB を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点であるから



$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}} \quad \cdots ①$$

Q は OP 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad \cdots ②$$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\{(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \alpha\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\} = s(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2s\alpha\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Q は，AM 上の点であるから

$$s(1-\alpha) + 2s\alpha = 1 \quad ゆえに \quad s = \frac{1}{1+\alpha} \quad \cdots ③$$

①，②，③ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{1+\alpha}\{(1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}\} = \boldsymbol{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t\vec{a}$ とおくと $\quad \overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right)\vec{a} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$

また $\quad \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ であるから

$$\left(t - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)|\vec{a}|^2 + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}|\vec{b}|^2 = 0$$

ここで，$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2\cdot 3\cdot\frac{1}{6} = 1$ であるから

$$4\left(t - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\} + \frac{9\alpha}{2(1+\alpha)} = 0$$

したがって $\quad t = \frac{1-2\alpha}{1+\alpha} \quad$ よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1-2\alpha}{1+\alpha}\vec{a}}$

(3) R が OA の中点であるから

$$\frac{1-2\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{2} \qquad よって \qquad \boldsymbol{\alpha = \frac{1}{5}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 数学的帰納法により示す．

「a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れない」を (A) とする．

［1］ $n=3$ のとき

$$a_2 = 2{\cdot}1{\cdot}1 = 2, \qquad b_2 = 2{\cdot}1^2 + 1^2 = 3$$
$$a_3 = 2{\cdot}2{\cdot}3 = 12, \qquad b_3 = 2{\cdot}2^2 + 3^2 = 17$$

よって，$n=3$ のとき，(A) は成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき ($k \geqq 3$)，(A) が成り立つと仮定すると，
$a_k = 3M$，$b_k = 3N \pm 1$ とおけるから (M, N は整数)

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_kb_k = 2{\cdot}3M{\cdot}(3N \pm 1) \\ &= 3{\cdot}2M(3N \pm 1) \\ b_{k+1} &= 2{a_k}^2 + {b_k}^2 \\ &= 2(3M)^2 + (3N \pm 1)^2 \\ &= 18M^2 + (9N^2 \pm 6N + 1) \\ &= 3(6M^2 + 3N^2 \pm 2N) + 1 \end{aligned}$$

［1］,［2］から，$n \geqq 3$ について (A) が成り立つ．

(2) $b_1 = 1$，$b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$ より，b_n は奇数．以下を背理法により示す．

$a_2 = 2$，$b_2 = 3$ より，$2 \leqq n \leqq m$ のとき，a_n と b_n は互いに素であるが，
a_{m+1} と b_{m+1} は素数 p を約数にもつと仮定する ($p \geqq 3$)．

$a_{m+1} = 2a_mb_m$ より，次の 2 つに場合分けをする．

［1］ a_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - 2{a_m}^2 = {b_m}^2$ であるから，
b_m も p で割り切れる．

［2］ b_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - {b_m}^2 = 2{a_m}^2$ であるから，
a_m も p で割り切れる．

［1］,［2］より，a_m，b_m がともに p で割り切れて，仮定に反する．

よって，$n \geqq 2$ のとき，a_n，b_n は互いに素である．■

$\boxed{4}$ (1) $f(x) = 0$ より，$\left|\sin x - \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{2} = 0$ であるから

$$\sin x - \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin x = 0,\ 1$$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ より　　$\boldsymbol{x = -\pi,\ 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$

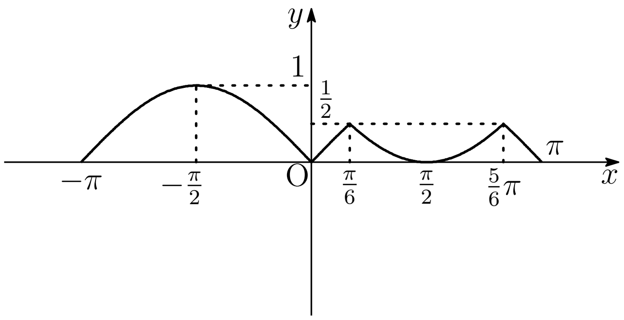
(2)　i) $\sin x - \dfrac{1}{2} \geqq 0$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$f(x) = \left|\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| = |\sin x - 1| = 1 - \sin x$$

ii) $\sin x - \dfrac{1}{2} \leqq 0$　すなわち　$-\pi \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$f(x) = \left|\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) - \frac{1}{2}\right| = |\sin x|$$

i)，ii) から，グラフの概形は，次のようになる．



(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x - \dfrac{\pi}{2} \leqq 0$ より，(2) の結果から

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right| = |-\cos x| = \cos x$$

上式および (2) の結果から

$$f(x)f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin x \cos x & (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}) \\ (1 - \sin x)\cos x & (\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

したがって

$0 \leqq a \leqq \frac{\pi}{6}$ のとき　$F(a) = \displaystyle\int_0^a \sin x \cos x\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{4}(1 - \cos 2a)}$

$\frac{\pi}{6} \leqq a \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき　$F(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^a (1 - \sin x)\cos\ dx$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}\cos 2a + \sin a - \frac{1}{2}}$$

■

5　(1)　$$f(x) = -4x^2 + 4x = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

区間 $[0,\ 1]$ において，$0 \leqq f(x) \leqq 1$ であるから，

区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変である．

(2) $f(x) = a$ の解は

$$4x(1-x) = a$$

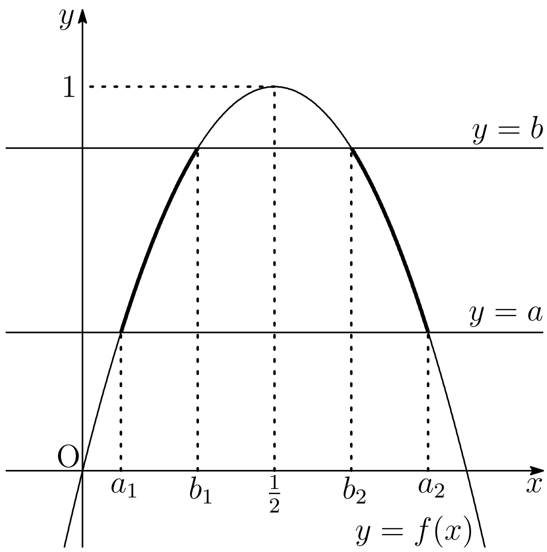
これを解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-a}}{2}$$

同様に，$f(x) = b$ の解は

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-b}}{2}$$

これらの解を



$$a_1 = \frac{1-\sqrt{1-a}}{2},\quad a_2 = \frac{1+\sqrt{1-a}}{2},$$
$$b_1 = \frac{1-\sqrt{1-b}}{2},\quad b_2 = \frac{1+\sqrt{1-b}}{2}$$

とおく．区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であると仮定すると，次の 2 つの場合に分けられる．

i) $[a,\ b] \subset [a_1,\ b_1]$　すなわち　$a_1 \leqq a < b \leqq b_1$ のとき

$b \leqq b_1$ より　$b \leqq \dfrac{1-\sqrt{1-b}}{2}$　ゆえに　$\sqrt{1-b} \leqq 1 - 2b$　$\cdots$①

$t = \sqrt{1-b}$ とおくと　$0 < t < 1$　$\cdots$②

① から　$t \leqq 2t^2 - 1$　ゆえに　$(t-1)(2t+1) \geqq 0$　$\cdots$③

② において，③ を満たす解はない．

ii) $[a,\ b] \subset [b_2,\ a_2]$　すなわち　$b_2 \leqq a < b \leqq a_2$ のとき

$b_2 \leqq a$ より　$\dfrac{1+\sqrt{1-b}}{2} \leqq a$　ゆえに　$\sqrt{1-b} \leqq 2a-1$　$\cdots$④

$0 < \sqrt{1-b}$ であるから　$0 < 2a-1$　すなわち　$a > \dfrac{1}{2}$

$2a-1 < 2b-1$ であるから，④ から　$\sqrt{1-b} < 2b-1$

したがって　$1-b < (2b-1)^2$　ゆえに　$b(4b-3) > 0$

$b > 0$ であるから　$b > \dfrac{3}{4}$

④ の両辺を平方すると

$$1-b \leqq (2a-1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad b \geqq 4a-4a^2 \quad \cdots ④'$$

$b \leqq a_2$ より　$b \leqq \dfrac{1+\sqrt{1-a}}{2}$　ゆえに　$2b-1 \leqq \sqrt{1-a}$　$\cdots$⑤

⑤ の両辺を平方すると

$$(2b-1)^2 \leqq 1-a \quad \text{ゆえに} \quad -a \geqq 4b^2-4b \quad \cdots ⑤'$$

④′，⑤′ の辺々を加えると

$$b-a \geqq 4(b^2-a^2)-4(b-a) \quad \text{ゆえに} \quad 5(b-a) \geqq 4(b+a)(b-a)$$

$b-a > 0$ であるから　$5 \geqq 4(b+a)$　すなわち　$a+b \leqq \dfrac{5}{4}$

これは，$a > \dfrac{1}{2}$，$b > \dfrac{3}{4}$ に反する．

i)，ii) より，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではない．

別解 (2)

区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとき

$$a \leqq f(a),\quad f(b) \leqq b \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq 4a(1-a),\quad 4b(1-b) \leqq b$$

$0<a<b<1$ に注意して，これを解くと　$0 < a \leqq \dfrac{3}{4} \leqq b < 1 \quad \cdots ①$

① に注意して，次の 2 つの場合分けを行う．

i) $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\frac{1}{2} \in [a,\ b],\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \notin [a,\ b]$$

ii) $\dfrac{1}{2} < a \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき
区間 $[a,\ b]$ において，関数 $f(x)$ は単調減少であるから

$$f(a) \leqq b,\quad f(b) \geqq a \quad \text{ゆえに} \quad -4a^2 \leqq -4a+b,\quad 4b^2 \leqq -a+4b$$

上の 2 式の辺々を加えると　　$4(b+a)(b-a) \leqq 5(b-a)$
$0<a<b<1$ より，$b-a>0$ であるから　$a+b \leqq \dfrac{5}{4}$
これは，$\dfrac{1}{2} < a$，$\dfrac{3}{4} \leqq b$ に反する．

i)，ii) より，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではない．

ロジスティック写像 (Logistic map)

区間 $[a,\ b]$ が出題された関数について不変であれば

$$x_{n+1} = f(x_n),\ a \leqq x_0 \leqq b$$

とおくと，$a \leqq x_n \leqq b\ (n=0,1,2,\ldots)$ となる．$\{x_n\}$ の収束・発散などを調べて反例を示すことは，この関数の特殊性から不可能である．写像

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n) : 0 \leqq \lambda \leqq 4,\ 0 \leqq x_0 \leqq 1$$

をロジスティック写像といい，極めて複雑な振舞いをすることで知られている．

■

10.7　2007 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 $f(x) = xe^x$ とおく。また p を $p \geqq 0$ を満たす数とし，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) L を正の数とする。曲線 $y = f(x)$，接線 $y = g(x)$，および 2 直線 $x = 0$, $x = L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき，$p \geqq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。

2 p を $0 < p < 1$ を満たす数とし，行列 A，B，C をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに，行列 A_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$A_1 = A,\quad A_{n+1} = A_nB - BA_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A_2，A_3 を求めよ。

(2) $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$，$\Delta_n = a_nd_n - b_nc_n$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Delta_n$ を求めよ。

3 a，b を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a, -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a, -b)$ を考える。A，B，C を通る平面を α，原点 O を中心とし A，B，C を通る球面を S とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。

4 さいころを 3 回続けて投げて出た目を順に a，b，c とする。これらの数 a，b，c に対して 2 次方程式

$$(*) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

を考える。ただし，さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの実数の解をもつとき，積 ac の取りうる値を求め，積 ac の各値ごとに可能な a と c の組 $(a,\ c)$ がそれぞれ何通りあるかを求めよ。

(2) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし，一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい。

5 関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して，つねに $f(x+p) = f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい，p を周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば，関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y = |\sin x|$ のグラフをかき，関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ。

(2) 自然数 m，n に対して関数 $f(x)$ を $f(x) = |\sin mx| \sin nx$ とおく。p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$ が成り立つことを示せ。また，このとき mp は π の整数倍であり，np は 2π の整数倍であることを示せ。

(3) m，n は 1 以外の公約数をもたない自然数とする。(2) の結果を用いて関数 $|\sin mx| \sin nx$ の基本周期を求めよ。

解答例

1 (1) $f(x)=xe^x$ を微分すると　$f'(x)=(x+1)e^x$

P$(p,\ pe^p)$ における接線の方程式は

$$y-pe^p=(p+1)e^p(x-p)\quad \text{ゆえに}\quad y=(p+1)e^px-p^2e^p$$

よって　$g(x)=(p+1)e^px-p^2e^p$

ここで，$h(x)=f(x)-g(x)$ $(x\geqq 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} h(x)&=xe^x-(p+1)e^px+p^2e^p\\ h'(x)&=(x+1)e^x-(p+1)e^p\\ h''(x)&=(x+2)e^x \end{aligned}$$

$x\geqq 0$ において $h''(x)>0$ より，$h'(x)$ は単調増加であるから，$h(x)$ の増減は，右の表のようになる．

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって，$x\geqq 0$ において　$h(x)\geqq 0$

よって　$x\geqq 0$ において　$f(x)\geqq g(x)$

(2) (1) の結論から

$$\begin{aligned} S(p)&=\int_0^L\{f(x)-g(x)\}\,dx\\ &=\int_0^L xe^x\,dx-(p+1)e^p\int_0^L x\,dx+p^2e^p\int_0^L dx\\ &=\int_0^L xe^x\,dx-\frac{L^2}{2}(p+1)e^p+Lp^2e^p \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S'(p)&=-\frac{L^2}{2}(p+2)e^p+L(p^2+2p)e^p\\ &=\frac{L}{2}e^p(p+2)(2p-L) \end{aligned}$$

よって，$S(p)$ の増減は右の表のようになり，$S(p)$ は，$\boldsymbol{p=\dfrac{L}{2}}$ で最小値をとる．

p	0	$\cdots$	$\frac{L}{2}$	$\cdots$
$S'(p)$		$-$	0	$+$
$S(p)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

補足 曲線 $y=f(x)$ と曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 $y=g(x)$ について

$$\begin{aligned}
f(x)-g(x) &= f(x)-\{f'(p)(x-p)+f(p)\}\\
&= \int_p^x f'(t)\,dt - f'(p)(x-p)\\
&= -\int_p^x (x-t)'f'(t)\,dt - f'(p)(x-p)\\
&= -\Big[\ (x-t)f'(t)\ \Big]_p^x + \int_p^x (x-t)f''(t)\,dx - f'(p)(x-p)\\
&= \int_p^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_x^p (t-x)f''(t)\,dt
\end{aligned}$$

$f(x)=xe^x$ より，$x \geqq 0$ において　$f''(x)=(x+2)e^x>0$

$$0 \leqq x \leqq p \text{ のとき} \quad \int_x^p (t-x)f''(t)\,dt \geqq 0,$$

$$p \leqq x \text{ のとき} \quad \int_p^x (x-t)f''(t)\,dt \geqq 0$$

したがって　$f(x)-g(x) \geqq 0$　よって　$f(x) \geqq g(x)$ ■

2　(1) $A_2=A_1B-BA_1+C$ より

$$A_2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1+p\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&1+p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\-1-p&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2+p\\-1&-2-p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1+p&1+p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\-1-p&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}+\boldsymbol{p}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

$A_3=A_2B-BA_2+C$ より

$$A_3=\begin{pmatrix}1&1+p\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1+p\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&1+p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1+p\\-1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\-1-p&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&1+(1+p)^2\\-1&-2-p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-p\\1+p&1+p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\-1-p&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

(2) 行列 A_n について

$$A_{n+1}=A_nB-BA_n+C \qquad \cdots①$$

① より　$A_{n+2}=A_{n+1}B-BA_{n+1}+C \qquad \cdots②$

も成り立つ．

② − ① より　$A_{n+2}-A_{n+1}=(A_{n+1}-A_n)B-B(A_{n+1}-A_n) \qquad \cdots③$

(1) の結果から

$$A_2-A_1=\begin{pmatrix}0&p\\0&0\end{pmatrix},\quad A_3-A_2=\begin{pmatrix}0&p^2\\0&0\end{pmatrix}$$

ここで，$n\geqq 1$ のとき

$$A_{n+1}-A_n=\begin{pmatrix}0&p^n\\0&0\end{pmatrix} \qquad \cdots(*)$$

と推測し，これを数学的帰納法により証明する．

［1］$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$A_{k+1}-A_k=\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

であると仮定すると，③ より

$$\begin{aligned}A_{k+2}-A_{k+1}&=(A_{k+1}-A_k)B-B(A_{k+1}-A_k)\\&=\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & p^k+p^{k+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & p^{k+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

$n \geqq 2$ とすると，$p \neq 1$ に注意して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(A_{k+1}-A_k)&=\sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\A_n&=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1-p^n}{1-p}\\ -1 & -1\end{pmatrix}\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

$(**)$ は $n=1$ のときも成り立つので，すべての自然数 n について $(**)$ は成り立つ．

したがって　　$$\Delta_n=-1+\frac{1-p^n}{1-p}$$

$0<p<1$ により　　$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n=-1+\frac{1}{1-p}=\boldsymbol{\frac{p}{1-p}}$$ ■

3 (1) AB の中点 D は

$$\left(\frac{a+(-a)}{2},\ \frac{-a+a}{2},\ \frac{b+b}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (0,\ 0,\ b)$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = (a,\ a, -b) - (0,\ 0,\ b) = (a,\ a, -2b)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-a,\ a,\ b) - (a, -a,\ b) = (-2a,\ 2a,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{DO}} = -\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -(0,\ 0,\ b) = (0,\ 0, -b)$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = a\cdot(-2a) + a\cdot 2a + (-2b)\cdot 0 = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0\cdot(-2a) + 0\cdot 2a + (-b)\cdot 0 = 0$

よって $\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

DC⊥AB より，$a > 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(-2a)^2 + (2a)^2 + 0^2}\sqrt{a^2 + a^2 + (-2b)^2} \\ &= \boldsymbol{2a\sqrt{a^2 + 2b^2}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$b > 0$ に注意して

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}||\overrightarrow{\mathrm{DO}}|} = \frac{2b^2}{\sqrt{2a^2 + 4b^2}\times b} = \frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

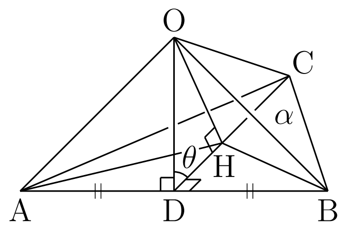
$\sin\theta \geqq 0$ であるから $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\sqrt{a^2 + 2b^2}}}$

DO⊥AB であるから OA = OB

ゆえに $\triangle\mathrm{OAH} \equiv \triangle\mathrm{OBH}$ さらに $\triangle\mathrm{HAD} \equiv \triangle\mathrm{HBD}$

DC⊥AB であるから，H は直線 CD 上にある．

よって $\mathrm{OH} = \mathrm{DO}\sin\theta = b \times \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} = \dfrac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{\sqrt{a^2 + 2b^2}}}$

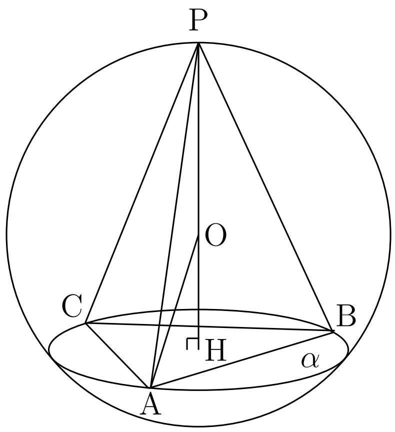


(3) 直線 OH と球面 S の交点のうち，平面 α に関して，O と同じ側にある点を P とするとき，四面体 ABCP の体積は最大となる．このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{PH} &= \mathrm{PO} + \mathrm{OH}\\ &= \mathrm{OA} + \mathrm{OH}\\ &= \sqrt{2a^2+b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\end{aligned}$$

よって，求める最大値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{PH} &= \frac{1}{3}\times 2a\sqrt{a^2+2b^2}\left(\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{2a}{3}\left(\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}+ab\right)}\end{aligned}$$



■

$\boxed{4}$　(1)　2次方程式 $(*)$ が異なる2つの実数解をもつ条件は

$$b^2-4ac>0 \quad \text{ゆえに} \quad ac<\frac{b^2}{4}$$

$\dfrac{b^2}{4} \leqq \dfrac{6^2}{4}=9$ であるから　$ac<\dfrac{b^2}{4} \leqq 9$　すなわち　$ac \leqq 8$

したがって，ac のとりうる値は　**1，2，3，4，5，6，8**

よって，ac の値とその組 $(a,\ c)$ の個数は次のとおりである．

$ac=1$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 1)$ の **1通り**

$ac=2$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ の **2通り**

$ac=3$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ の **2通り**

$ac=4$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ の **3通り**

$ac=5$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)$ の **2通り**

$ac=6$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$ の **4通り**

$ac=8$ のとき　$(a,\ c)=(2,\ 4),\ (4,\ 2)$ の **2通り**

(2)　(1) の場合において，$D=b^2-4ac$ が平方数となる b の個数を調べる．

$ac=1$ のとき　$D=b^2-4$ より　b の値はなし

$ac=2$ のとき　$D=b^2-8$ より　$b=3$ の1通り

$ac=3$ のとき　$D=b^2-12$ より　$b=4$ の1通り

$ac=4$ のとき　$D=b^2-16$ より　$b=5$ の1通り

$ac=5$ のとき　$D=b^2-20$ より　$b=6$ の1通り

$ac=6$ のとき　$D=b^2-24$ より　$b=5$ の1通り

$ac=8$ のとき　$D=b^2-32$ より　$b=6$ の1通り

よって，求める確率は，(1) の結果に注意して

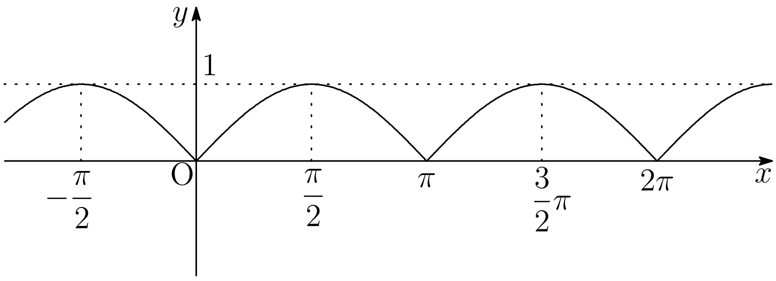
$$\frac{2\cdot1+2\cdot1+3\cdot1+2\cdot1+4\cdot1+2\cdot1}{6^3}=\frac{15}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{72}}$$

■

5　(1) $\sin x \geqq 0$ のとき　$|\sin x| = \sin x$

$\sin x < 0$ のとき　$|\sin x| = -\sin x$

$y = |\sin x|$ のグラフは，下の図のようになる．



任意の実数 x について $|\sin(x+p)| = |\sin x|$ が成り立つので，$x=0$ のとき

$$|\sin p| = 0$$

これを満たす最小の正の数 p は　$p = \pi$

実際，任意の実数 x について $|\sin(x+\pi)| = |\sin x|$ が成り立つ．

よって，求める基本周期は　$\boldsymbol{\pi}$

(2) 任意の x に対して　$f(x+p) = f(x)$

これに $x = -\dfrac{p}{2}$ を代入して　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = f\left(\dfrac{p}{2}\right)$　$\cdots$①

また　$f(-x) = |\sin(-mx)|\sin(-nx)$

$= -|\sin mx|\sin nx = -f(x)$

ゆえに　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = -f\left(\dfrac{p}{2}\right)$　$\cdots$②

①，② より　$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = 0$

$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = 0$ より　$\left|\sin\dfrac{mp}{2}\right|\sin\dfrac{np}{2} = 0$

ゆえに　$\sin\dfrac{mp}{2} = 0$　または　$\sin\dfrac{np}{2} = 0$

したがって　$mp = 2k\pi$　または　$np = 2l\pi$　(k，l は整数)

i) $mp = 2k\pi$ (k は整数) のとき

$$\begin{aligned} f(x+p) &= |\sin m(x+p)|\sin n(x+p) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin(nx+np) \\ &= |\sin(mx+2k\pi)|\sin(nx+np) \\ &= |\sin mx|\sin(nx+np) \end{aligned}$$

このとき，$f(x+p) = f(x)$ が成り立つ，すなわち

$$|\sin mx|\sin(nx+np) = |\sin mx|\sin nx \quad \cdots(*)$$

任意の実数 x に対して $(*)$ が成り立つとき　$\sin(nx+np) = \sin nx$
ゆえに，np は 2π の整数倍.

ii) $np = 2l\pi$ (l は整数) のとき

$$\begin{aligned} f(x+p) &= |\sin m(x+p)|\sin n(x+p) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin(nx+np) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin(nx+2l\pi) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin nx \end{aligned}$$

このとき，$f(x+p) = f(x)$ が成り立つ，すなわち

$$|\sin(mx+mp)|\sin nx = |\sin mx|\sin nx \quad \cdots(**)$$

任意の実数 x に対して $(**)$ が成り立つとき

$$|\sin(mx+mp)| = |\sin mx|$$

上式に $x = 0$ を代入すると　$|\sin mp| = 0$
ゆえに，mp は π の整数倍である.
実際，mp が π の整数倍であれば，$(**)$ が成り立つ.

i)，ii) より，mp は π の整数倍であり，np は 2π の整数倍である.

(3) (2) の結果より，改めて，$mp = k\pi$，$np = 2l\pi$ とおくと (k，l は整数)

$$p = \frac{k\pi}{m} = \frac{2l\pi}{n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{kn}{m} = 2l$$

m と n は互いに素であるから，k は m の倍数.

ゆえに，$k = mk'$ とおくと (k' は整数)，$p = k'\pi \cdots$ ③ であるから

$$\begin{aligned}
f(x+p) &= f(x+k'\pi)\\
&= |\sin m(x+k'\pi)|\sin n(x+k'\pi)\\
&= |\sin(mx+mk'\pi)|\sin(nx+nk'\pi)\\
&= |\sin mx|(\sin nx\cos nk'\pi + \cos nx\sin nk'\pi)\\
&= (-1)^{nk'}|\sin mx|\sin nx\\
&= (-1)^{nk'}f(x) \quad \cdots ④
\end{aligned}$$

i) n が偶数のとき
$k' = 1$ とすると，③，④ より　$f(x+\pi) = f(x)$
したがって，基本周期は π

ii) n が奇数のとき
$k' = 2$ とすると，③，④ より　$f(x+2\pi) = f(x)$
したがって，基本周期は 2π

よって，基本周期は，n が偶数のとき $\boldsymbol{\pi}$，n が奇数のとき $\boldsymbol{2\pi}$ ■

10.8　2008 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ。

2 1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り，そのカードの番号が k より大きいなら，抜き取ったカードの番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら，そのカードを戻さずに，残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り，2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 2 以上 9 以下の整数 n に対して，得点が n である確率を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。

3 △OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形 △OAP，△OBP，△ABP の面積をそれぞれ a，b，c とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a，b を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a，b，c を用いて表せ。

(3) 3 辺 OA，OB，AB の長さはそれぞれ 3，5，6 であるとする。点 P を中心とし，3 直線 OA，OB，AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

$\boxed{4}$ $a > 0$ に対して，$f(x) = a + \log x\ (x > 0)$，$g(x) = \sqrt{x-1}\ (x \geqq 1)$ とおく。2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点で共通の接線 l を持つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ。

(2) 2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ。

(3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ，互いに交わらないように配置する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし，$0 < \theta < \pi$ とする。このとき，$\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。

解答例

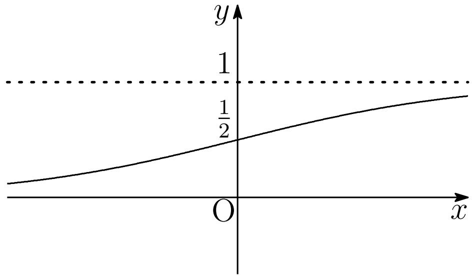
$\boxed{1}$ (1) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} = 1 - \dfrac{1}{e^x+1}$ より　$f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{e^x+1} - \dfrac{1}{(e^x+1)^2}$ であるから

$$f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} + \frac{2e^x}{(e^x+1)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

よって，増減やグラフの凹凸は左下の表のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	⤴	変曲点 $\frac{1}{2}$	⤵



また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ であるから，漸近線は $y=0$，$y=1$
以上から，この関数のグラフの概形は，右上の図のようになる．

(2) $y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおいて $(0<y<1)$，x について解くと

$$e^x = \frac{y}{1-y} \quad \text{ゆえに} \quad x = \log\frac{y}{1-y}$$

よって　$\boldsymbol{f^{-1}(x) = \log\dfrac{x}{1-x} \quad (0<x<1)}$

(3) $0 < \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{1}{n+1} < 1$ であるから，$f^{-1}(x) = -\log\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$ により

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) = -\log(n+2-1) = -\log(n+1)$$
$$f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\log(n+1-1) = -\log n$$

$$n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\} = -n\{\log(n+1)-\log n\} = -\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

$$= -\log e = \boldsymbol{-1}$$

■

$\boxed{2}$ (1) 得点が 1 であるのは，1 回目に 2 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に 1 の番号を引く場合である．よって，求める確率は

$$\frac{k-1}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k-1}{90}}$$

得点が 10 であるのは，1 回目に 10 を引くか，1 回目に 1 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に 10 の番号を引く場合である．よって，求める確率は

$$\frac{1}{10}+\frac{k}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k+9}{90}}$$

(2) n の値について，次の 2 つに場合分けをする．

i) $n \leqq k$ のとき
1 回目に n 以外の 1 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に n の番号を引く場合である．よって，その確率は

$$\frac{k-1}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k-1}{90}}$$

ii) $k < n$ のとき
1 回目に n を引くか，1 回目に 1 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に n の番号を引く場合である．よって，その確率は

$$\frac{1}{10}+\frac{k}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k+9}{90}}$$

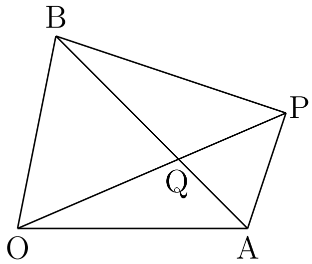
(3) (1)，(2) より，求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned}
E&=\sum_{n=1}^{k}n\times\frac{k-1}{90}+\sum_{n=k+1}^{10}n\times\frac{k+9}{90}\\
&=\frac{k-1}{90}\sum_{n=1}^{k}n+\frac{k+9}{90}\sum_{n=k+1}^{10}n=\frac{k-1}{90}\sum_{n=1}^{k}n+\frac{k-1+10}{90}\sum_{n=k+1}^{10}n\\
&=\frac{k-1}{90}\sum_{n=1}^{10}n+\frac{1}{9}\sum_{n=k+1}^{10}n\\
&=\frac{k-1}{90}\times\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11+\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}(10-k)\{(k+1)+10\}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{18}(-k^2+10k+99)}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=\triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OBP}=a:b$

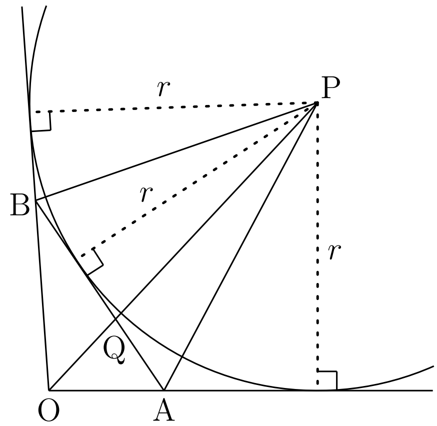
よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}}$



(2) $\quad \mathrm{OQ}:\mathrm{OP}$
$=\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{OAP}+\triangle\mathrm{OBP}$
$=a+b-c:a+b$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{a+b}{a+b-c}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b-c}}$

(3) 3 直線 OA，OB，AB に接する円の半径を r とすると



$$\begin{aligned}&\triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OBP}:\triangle\mathrm{ABP}\\ =&\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot r:\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot r:\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot r\\ =&\mathrm{OA}:\mathrm{OB}:\mathrm{AB}\end{aligned}$$

したがって $\quad a:b:c=3:5:6$

よって，(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+5-6}=\boldsymbol{\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}}$$

別解 **(3)** OP は $\triangle$OAB の O の内角の二等分線であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)=\frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

AP は $\triangle$OAB の A の外角の二等分線であるから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{6}\right)\\ &=\left(1+\frac{t}{6}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

上の 2 式より $\quad \dfrac{s}{3}=1+\dfrac{t}{6},\ \dfrac{s}{5}=\dfrac{t}{6} \quad$ ゆえに $\quad s=\dfrac{15}{2},\ t=9$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$ ■

4 (1) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$，$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

点 P の x 座標を p とすると　$f(p) = g(p)$，$f'(p) = g'(p)$

したがって　$a + \log p = \sqrt{p-1}$　$\cdots$①，　$\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2\sqrt{p-1}}$　$\cdots$②

② から　$p = 2\sqrt{p-1}$　$(p > 1)$

この式の両辺を平方すると　$p^2 = 4(p-1)$　ゆえに　$(p-2)^2 = 0$

$p > 1$ に注意して　　$p = 2$

$a > 0$ に注意しながら，① に代入して　　$\boldsymbol{a = 1 - \log 2}$

よって，P の座標は　　$\mathbf{P(2,\ 1)}$

点 P における接線の傾きは $\dfrac{1}{2}$ であるから，接線 l の方程式は

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-2) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$$

(2) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと $(x \geqq 1)$

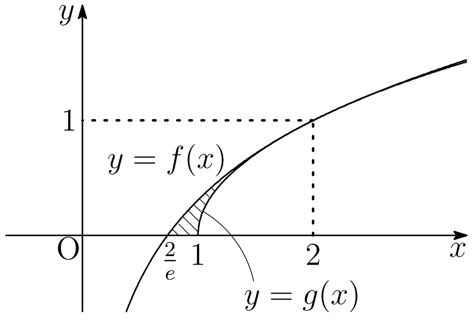
$$h(x) = a + \log x - \sqrt{x-1}$$
$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1} - x}{2x\sqrt{x-1}}$$
$$= -\frac{(x-2)^2}{2x\sqrt{x-1}(2\sqrt{x-1} + x)}$$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$-$
$h(x)$	a	↘	0	↘

$h(x) = 0$ の解は $x = 2$ のみであり，2 曲線は点 P 以外に共有点を持たない．

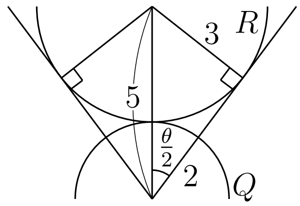
(3) 求める面積を S とすると，下の図から

$$S = \int_{\frac{2}{e}}^{2} (1 - \log 2 + \log x)\, dx - \int_1^2 \sqrt{x-1}\, dx$$
$$= \Big[(1 - \log 2)x + x \log x - x \Big]_{\frac{2}{e}}^{2} - \frac{2}{3}\Big[(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2$$
$$= \Big[x \log x - x \log 2 \Big]_{\frac{2}{e}}^{2} - \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{e} - \frac{2}{3}}$$



■

5 (1) 右の図から $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$



$0<\theta<\pi$ より，$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

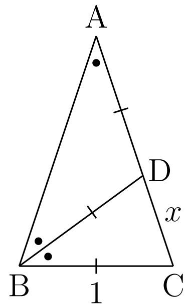
$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

よって $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\boldsymbol{\dfrac{24}{25}}$

(2) $\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{5}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから $\sin\dfrac{\pi}{6}<\sin\dfrac{\theta}{2}<\sin\dfrac{\pi}{4}$

したがって $\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ よって $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\alpha=\dfrac{\pi}{5}$ とする．$\mathrm{BC}=1$，$A=\alpha$，$B=C=2\alpha$ である二等辺三角形について，$\angle$B の二等分線と CA との交点を D とする．$\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{AD}=1$．$\mathrm{CD}=x$ とおくと，$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathrm{BC}:\mathrm{CD}$ であるから



$$(1+x):1=1:x \quad \text{ゆえに} \quad x^2+x-1=0$$

$x>0$ に注意してこれを解くと $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\triangle$BCD に余弦定理を適用すると，$x^2=1-x$ であることに注意して

$$\cos\alpha=\frac{1^2+1^2-x^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{x+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

ここで $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{5\sqrt{5}-11}{20}=\dfrac{\sqrt{125}-\sqrt{121}}{20}>0$

したがって $\cos\alpha>\cos\dfrac{\theta}{2}$ ゆえに $\alpha<\dfrac{\theta}{2}$ すなわち $\dfrac{2}{5}\pi<\theta$

上式および (2) の結果から $\dfrac{2}{5}\pi<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

これから $4<\dfrac{2\pi}{\theta}<5$

よって，配置できる半径 3 の円の最大個数は **4** (個) ■

10.9　2009 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 座標平面に 3 点 O(0, 0)，A(2, 6)，B(3, 4) をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2) s を定数として，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

2 k は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚,「2」と書かれたカードが 2 枚，$\cdots$,「k」と書かれたカードが k 枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M，奇数が書かれたカードの枚数を N で表す。この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す。記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_1 と p_2 を M，N で表せ。

(2) p_{n+1} を p_n，M，N で表せ。

(3) $\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ。

(4) p_n を n と k で表せ。

3 曲線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする。ただし，$b \neq a$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) b が a に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近づく。A の座標を a で表せ。

(2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき，(1) で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き，C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。

(3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 2 次の列ベクトル X，Y，Z は大きさが 1 であり，$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ $Y \neq X$ とする。ただし，一般に 2 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2 + y^2}$ で定義される。また，2 次の正方行列 A が

$$AX = Y, \qquad AY = Z, \qquad AZ = X$$

をみたすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $Y \neq -X$ を示せ。

(2) Z は $Z = sX + tY$（s，t は実数）の形にただ一通りに表せることを示せ。

(3) $X + Y + Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を示せ。

(4) 行列 A を求めよ。

5 曲線 $y = e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}| = 1$ かつ $\dfrac{dx}{dt} > 0$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1) P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ。

(2) P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。

(3) P が曲線全体を動くとき，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。

解答例

1　(1) C は直線 AB 上にあるから，実数 α を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \alpha(2,\ 6) + (1-\alpha)(3,\ 4)\\ &= (3-\alpha,\ 4+2\alpha)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ 4)-(2,\ 6) = (1, -2)$ であるから

$$(3-\alpha)\cdot 1 + (4+2\alpha)\cdot(-2) = 0 \quad ゆえに \quad \alpha = -1$$

したがって　　**C(4, 2)**

与式および上の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= s(2,\ 6) + t(3,\ 4) - (4,\ 2)\\ &= (2s+3t-4,\ 6s+4t-2)\end{aligned}$$

よって　$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= (2s+3t-4)^2 + (6s+4t-2)^2\\ &= \boldsymbol{40s^2 + 25t^2 + 60st - 40s - 40t + 20}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果を t について整理すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= 25t^2 - (40-60s)t + 40s^2 - 40s + 20\\ &= 2\left(t - \frac{4-6s}{5}\right)^2 + 4s^2 + 8s + 4 \quad (t \geqq 0)\end{aligned}$$

i) $0 \leqq \dfrac{4-6s}{5}$ すなわち $s \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき

$t = \dfrac{4-6s}{5}$ で最小値 $4s^2+8s+4$ をとる．

ii) $\dfrac{4-6s}{5} < 0$ すなわち $s > \dfrac{2}{3}$ のとき

$t = 0$ で最小値 $40s^2 - 40s + 20$ をとる．

i)，ii) より，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値は

$$\boldsymbol{s \leqq \frac{2}{3}\ のとき\ 4s^2 + 8s + 4,\quad s > \frac{2}{3}\ のとき\ 40s^2 - 40s + 20}$$

■

2 (1) 1 回の操作で，偶数，奇数が出る確率は，それぞれ

$$\frac{M}{M+N},\ \frac{N}{M+N}$$

である．したがって　$p_1 = \boldsymbol{\dfrac{M}{M+N}}$

2 回の操作で記録された 2 個の数の和が偶数となるのは，2 回とも偶数のカードまたは 2 回とも奇数のカードを取り出す場合であるから

$$p_2 = \left(\frac{M}{M+N}\right)^2 + \left(\frac{N}{M+n}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{M^2+N^2}{(M+N)^2}}$$

(2) $n+1$ 回の操作で $n+1$ 個の数の和が偶数となるのは，n 回までのカードの和が偶数で $n+1$ 回目で偶数のカードを取り出すか，n 回までのカードの和が奇数で $n+1$ 回目で奇数のカードを取り出す場合であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times \frac{M}{M+N} + (1-p_n) \times \frac{N}{M+N} \\ &= \boldsymbol{\frac{M-N}{M+N}p_n + \frac{N}{M+N}} \end{aligned}$$

(3) $M+N$ は，1 から k までの自然数の和であるから

$$M+N = 1+2+3+\cdots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

i) k が偶数のとき，M，N の項数はともに $\dfrac{k}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} M &= 2+4+6+\cdots+k = \frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2}\cdot(2+k) = \frac{k^2}{4}+\frac{k}{2} \\ N &= 1+3+5+\cdots+(k-1) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{\left(\frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}\right)-\frac{k^2}{4}}{\frac{1}{2}k(k+1)} = \dfrac{1}{k+1}$

ii) k が奇数のとき，M，N の項数はそれぞれ $\dfrac{k-1}{2}$，$\dfrac{k+1}{2}$ であるから

$$M = 2+4+6+\cdots+(k-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}\cdot\{2+(k-1)\} = \frac{k^2}{4}-\frac{1}{4}$$
$$N = 1+3+5+\cdots+k = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}+\frac{1}{4}$$

したがって　$\dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{\frac{k^2}{4}-\frac{1}{4}-\left(\frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}k(k+1)} = -\dfrac{1}{k}$

i)，ii) より　$\boldsymbol{\dfrac{M-N}{M+N} = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1} & (k\ \text{が偶数のとき}) \\ -\dfrac{1}{k} & (k\ \text{が奇数のとき}) \end{cases}}$

(4) (2) の結果から

$$p_{n+1}-\frac{1}{2} = \frac{M-N}{M+N}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，公比 $\dfrac{M-N}{M+N}$ の等比数列であるから，これに (1) の結果を代入すると

$$p_n-\frac{1}{2} = \left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}$$
$$p_n = \left(\frac{M}{M+N}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n}+\frac{1}{2}$$

したがって，(3) の結果により

$$\boldsymbol{p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^n+\dfrac{1}{2} & (k\ \text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n+\dfrac{1}{2} & (k\ \text{が奇数のとき}) \end{cases}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=\dfrac{x^2}{2}$ を微分すると $y'=x$

点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における接線の方向ベクトルは $(1,\ a)$ であるから，A における法線の方程式は

$$1(x-a)+a\left(y-\frac{a^2}{2}\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+ay=a+\frac{a^3}{2} \qquad \cdots①$$

同様にして $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の方程式は $x+by=b+\dfrac{b^3}{2}$ $\cdots②$

①，② から x を消去すると

$$(b-a)y=b-a+\frac{b^3-a^3}{2} \quad b\neq a \text{ より} \quad y=1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x+a\left(1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}\right)=a+\frac{a^3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{ab(a+b)}{2}$$

したがって，R の座標は $\left(-\dfrac{ab(a+b)}{2},\ 1+\dfrac{a^2+ab+b^2}{2}\right)$

よって，$b\to a$ による R の極限の点 A の座標は $\boldsymbol{\left(-a^3,\ 1+\dfrac{3}{2}a^2\right)}$

(2) (1) の結果から

$$x=-a^3,\ y=1+\frac{3}{2}a^2$$

とおくと，第 1 式から $a=-x^{\frac{1}{3}}$

これを第 2 式に代入すると $y=1+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

上式が C_2 の方程式であり，C_1，C_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{2}=1+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \quad \text{ゆえに} \quad x^2-3x^{\frac{2}{3}}-2=0$$

$x^{\frac{1}{3}}=t\cdots③$ とおくと $x=t^3\cdots③'$

$$t^6-3t^2-2=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t^2+1)^2(t^2-2)=0$$

したがって $t=\pm\sqrt{2}$ ③$'$ より $x=\pm2\sqrt{2}$

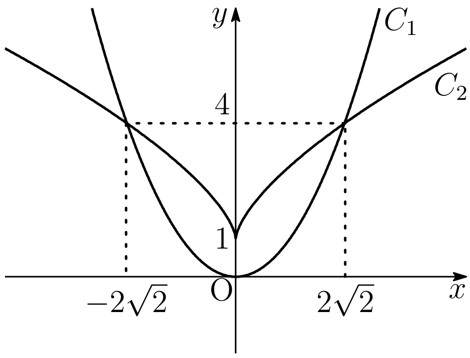
これを C_1 の方程式に代入して $y=4$

よって，C_1 と C_2 の交点の座標は $\boldsymbol{(\pm2\sqrt{2},\ 4)}$

$C_2 : y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ について　$y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$，$y'' = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

ゆえに　$y'' < 0$　したがって　C_2 は上に凸の曲線である．

したがって，C_1，C_2 の概形は，次のようになる．



補足

C_2 上の点 P(0, 1) について，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \left(-a^3,\ \frac{3}{2}a^2\right) = \frac{3}{2}a^2\left(-\frac{2}{3}a,\ 1\right)$$

$a \to 0$ とすると，C_2 の尖点 P(0, 1) における接線は，y 軸に平行な直線となる．尖点 (cusp) は，曲線上の可微分でない点であり，接線が定まらないのが一般的である ($y = |x|$ の尖点 (0, 0) など)．

(3) C_1，C_2 は y 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^{2\sqrt{2}} \left\{\left(1 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{x^2}{2}\right\} dx \\ &= 2\left[\ x + \frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{6}\ \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{88\sqrt{2}}{15}} \end{aligned}$$

解説

(2) で求めた C_2 は，C_1 の法線群の包絡線である．一般に $C_1: y = f(x)$ とすると，2 点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$ における法線の方程式は $(u \neq t)$，それぞれ

$$(x-t)+f'(t)(y-f(t))=0,\quad (x-u)+f'(u)(y-f(u))=0$$

であり，これから

$$x+f'(t)y=t+f'(t)f(t)\quad \cdots①,\quad x+f'(u)y=u+f'(u)f(u)\quad \cdots②$$

② − ① より

$$\begin{aligned}\{f'(u)-f'(t)\}y &= u-t+f'(u)f(u)-f'(t)f(t)\\ &= u-t+f'(u)\{f(u)-f(t)\}+f(t)\{f'(u)-f'(t)\}\end{aligned}$$

$u \neq t$ であるから，両辺を $u-t$ で割ると

$$\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}y = 1+f'(u)\cdot\frac{f(u)-f(t)}{u-t}+f(t)\cdot\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}$$

$u \to t$ とすると　　$f''(t)y = 1+\{f'(t)\}^2+f(t)f''(t)$

$f''(t) \neq 0$ のとき　　$y = f(t)+\dfrac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

これを ① に代入すると　$x = t-\dfrac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$

よって，t を変数として次の $(x,\ y)$ が描く軌跡が C_2 である．

$$x = t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)},\qquad y = f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

上で求めた $(x,\ y)$ は P における曲率円 (接触円) の中心でもある．P における曲率円とは，曲線上の 3 点 P，Q，R について，Q，R が曲線上を P に限りなく近づくときに占める極限の位置の円である．その中心を**曲率中心**という．

C_1 上の 3 点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$，$\mathrm{R}(v,\ f(v))$ とする $(t<u<v)$．3 点 P，Q，R を通る円を $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2-r^2=0$ とすると

$$\begin{aligned}(t-c_1)^2+\{f(t)-c_2\}^2-r^2&=0\\ (u-c_1)^2+\{f(u)-c_2\}^2-r^2&=0\\ (v-c_1)^2+\{f(v)-c_2\}^2-r^2&=0\end{aligned}$$

ここで，$g(s)=(s-c_1)^2+\{f(s)-c_2\}^2-r^2$ とおくと　　$g(t)=g(u)=g(v)=0$

$g(t)=g(u)$ であるから，ロル (Rolle) の定理により

$$g'(t_1)=0 \quad (t<t_1<u)$$

を満たす t_1 が存在する．同様に，$g(u)=g(v)$ であるから

$$g'(t_2)=0 \quad (u<t_2<v)$$

を満たす t_2 が存在する．$g'(t_1)=g'(t_2)$ であるから，さらにロルの定理を用いると

$$g''(t_3)=0 \quad (t_1<t_3<t_2)$$

を満たす t_3 が存在する．Q，R が P に限りなく近づくとき，$u\to t$，$v\to t$ となるから，上の諸式において

$$g(t)=0, \quad g'(t)=0, \quad g''(t)=0$$

$g'(s)$，$g''(s)$ は

$$\begin{aligned} g'(s)&=2(s-c_1)+2f'(s)\{f(s)-c_2\} \\ g''(s)&=2+2f''(s)\{f(s)-c_2\}+2\{f'(s)\}^2 \end{aligned}$$

$g'(t)=0$，$g''(t)=0$ であるから

$$(t-c_1)+f'(t)\{f(t)-c_2\}=0, \quad 1+\{f'(t)\}^2+f''(t)\{f(t)-c_2\}=0$$

上の第 2 式から　$c_2-f(t)=\dfrac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

これを第 1 式に代入すると　$c_1-t=-\dfrac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$

上の 2 式を $g(t)=0$ に代入することにより，曲率円の半径 r は

$$r^2=\frac{(1+\{f'(t)\}^2)^3}{\{f''(t)\}^2} \quad \text{ゆえに} \quad r=\frac{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}$$

よって，曲線の P における曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ は

$$c_1=t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}, \qquad c_2=f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ の描く軌跡を**縮閉線**といい，曲線の法線群の包絡線と一致することがわかる．

曲線の弧長 s に対する接線の向きの変化率を曲率といい，曲率 κ は，次式で定義される．

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

点 $(x,\ y)$ における接線が，x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$y' = \tan\theta$$

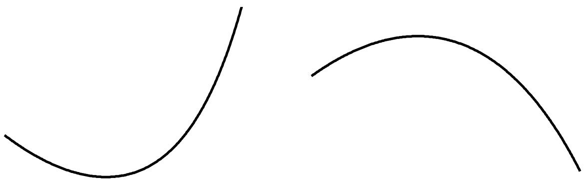
これを θ について，微分することにより

$$y''\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (y')^2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1+(y')^2}$$

また，$\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$ であるから，$\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$ より

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = \frac{y''}{1+(y')^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{y''}{\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

曲率 κ の逆数 $\dfrac{1}{\kappa}$ を曲率半径という．曲率円の半径は曲率半径の絶対値に等しい．
$\kappa > 0$ すなわち $y'' > 0$ のとき下に凸，$\kappa < 0$ すなわち $y'' <$ のとき上に凸である．
変曲点は曲率の符号が変わる点であり，頂点は曲率が極値をとる点である．



$\kappa > 0$　　　　$\kappa < 0$

■

$\boxed{4}$ (1) (背理法による証明)

$Y = -X$ と仮定すると

$AX = Y \cdots$ ① より　$AX = -X \quad \cdots$ ②

$AY = Z$ より　$A(-X) = Z$　すなわち　$AX = -Z \quad \cdots$ ③

②，③ より　$Z = X$

これを $AZ = X$ に代入すると　$AX = X \quad \cdots$ ④

①，④ より，$X = Y$ となり，矛盾を生じる．よって　$Y \neq -X$

(2) 条件より　$A^3X = X$，$A^3Y = Y$

よって　$A^3(X\ Y) = (X\ Y) \quad \cdots$ ⑤

X，Y の大きさは 1 で，$Y \neq X$，$Y \neq -X$ であるから　$Y \not\parallel X$

ゆえに　$\det(X\ Y) \neq 0 \quad \cdots$ ⑥

⑤ より　$\{\det(A)\}^3 \det(X\ Y) = \det(X\ Y)$

⑥ より　$\{\det(A)\}^3 = 1$　ゆえに　$\det(A) = 1 \quad \cdots$ ⑦

条件から　$A(Y\ Z) = (Z\ X)$

ゆえに　$\det(A)\det(Y\ Z) = \det(Z\ X)$　⑦ より　$\det(Y\ Z) = \det(Z\ X)$

したがって　$\det(X\ Z) + \det(Y\ Z) = 0$　すなわち　$\det(X + Y\ Z) = 0$

ゆえに　$Z = k(X + Y)$　(k はスカラー)　$\cdots$ ⑧

$X + Y \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから，大きさが 1 である Z に対し，⑧ を満たす k は唯一存在する．よって，題意は示された．

(3) ⑧ を $AZ = X$ に代入すると

$$A(kX + kY) = X$$

すなわち　$kAX + kAY = X$

$$kY + kZ = X$$

さらに　$kY + k(kX + kY) = X$

ゆえに　$(k^2 - 1)X + (k^2 + k)Y = 0$

$Y \not\parallel X$ であるから　$k^2 - 1 = 0$，$k^2 + k = 0$　これを解いて　$k = -1$

したがって　$Z = -(X + Y)$　よって　$X + Y + Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) 2 次の列ベクトル X，Y の内積を $X\cdot Y$ とかくことにする．
$X+Y=-Z$ であるから

$$(X+Y)\cdot(X+Y)=(-Z)\cdot(-Z)\quad ゆえに\quad X\cdot X+2X\cdot Y+Y\cdot Y=Z\cdot Z$$

$X\cdot X=Y\cdot Y=Z\cdot Z=1$ より　$X\cdot Y=-\dfrac{1}{2}$　ゆえに　X，Y のなす角は $\frac{2}{3}\pi$

同様に，$Z+X=-Y$ から $Z\cdot X=-\dfrac{1}{2}$　ゆえに　Z，X のなす角は $\frac{2}{3}\pi$

$X=\begin{pmatrix}\cos 0\\ \sin 0\end{pmatrix}$ であるから，次の 2 つに場合分けをする．

i) $Y=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}$ のとき　$Z=\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}$

このとき A は原点の回りに $\frac{2}{3}\pi$ 回転する 1 次変換を表す行列であるから

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

ii) $Y=\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}$ のとき　$Z=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}$

このとき A は原点の回りに $\frac{4}{3}\pi$ 回転する 1 次変換を表す行列であるから

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi & -\sin\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi & \cos\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

i)，ii) より　$\boldsymbol{A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \mp\sqrt{3}\\ \pm\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}}$ ■

5 (1) $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}$ であるから

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dt},\ e^x\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dx}{dt}(1,\ e^x)\quad\cdots①$$

$|\vec{v}|=1$，$\dfrac{dx}{dt}>0$ に注意して，① の大きさをとると

$$1=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+e^{2x}}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\quad\cdots②$$

② を ① に代入して

$$\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}(1,\ e^x)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)\quad\cdots③$$

よって，点 $(s,\ e^s)$ における速度ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}},\ \frac{e^s}{\sqrt{1+e^{2s}}}\right)}$$

(2) ③ を t について微分し，② を代入すると

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}&=\frac{dx}{dt}\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\right)\\&=\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\right)\quad\cdots④\end{aligned}$$

よって，点 $(s,\ e^s)$ における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ は

$$\boldsymbol{\vec{\alpha}=\left(-\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2},\ \frac{e^s}{(1+e^{2s})^2}\right)}$$

(3) ④ より　$\vec{\alpha} = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^2}(-e^x,\ 1)$ であるから

$$|\vec{\alpha}| = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\sqrt{(-e^x)^2+1^2} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

$f(x) = |\vec{\alpha}|$ とおいて，$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}}}$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$f'(x) = 0$ を解くと　$e^{2x} = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{2}$

$f(x)$ の増減は右のようになる．

よって，$x = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$ $(e^{2x} = \frac{1}{2})$ で極大かつ最大となり，求める最大値は

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

解説

時刻 t における曲線上の点 P の座標を $(x(t),\ y(t))$ とし，$\dot{x} = x'(t)$，$\dot{y} = y'(t)$，$\ddot{x} = x''(t)$，$\ddot{y} = y''(t)$ と書くことにする．

P における接線の x 軸の正の向きとなす角を θ とすると　$\tan\theta = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$

この式の両辺を t について微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

また，$\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ であるから，曲率 κ は

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

曲線の P における単位接ベクトル ξ_1 を

$$\xi_1 = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right)$$

とし，ξ_1 を 90° 回転させた単位法ベクトルを ξ_2 とすると

$$\xi_2 = \left(-\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},\ \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right)$$

ξ_1 を t で微分すると

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}(-\dot{y},\ \dot{x}) = \kappa\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\xi_2$$

$\vec{v} = (\dot{x},\ \dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\xi_1$ を t で微分すると

$$\vec{\alpha} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\xi_1 + \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\dot{\xi}_1 = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\xi_1 + \kappa|\vec{v}|^2\xi_2$$

P が等速運動であるとき

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0 \quad (\vec{v}\cdot\vec{\alpha} = 0)$$

このとき，$\vec{\alpha} = \kappa|\vec{v}|^2\xi_2$ が成り立つ．曲線の曲率半径を r とすると，$\kappa = \dfrac{1}{r}$ であるから，力学の加速度の公式 $\alpha = \dfrac{v^2}{r}$ が導かれる．なお加速度の向きは速度ベクトルに垂直である．とくに P が $|\vec{v}| = 1$ の等速運動を行うとき，$\vec{\alpha}$ の大きさは曲率の大きさに等しい．$\boxed{\mathbf{5}}$ (3) で $|\vec{\alpha}|$ が極値をとる点を求めたことで，曲線上の頂点を求めたことになる．■

10.10 2010 年 (150 分)

出題分野 1 2 3 4 5

1 三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t \geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1) CP^2 を a，b，c，t を用いて表せ。

(2) 点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき，t を求めよ。

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ。

2 次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし，出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ，もう 1 回サイコロを振って，2 つの目の合計を得点とすることができる。ただし，合計が 7 以上になった場合は 0 点とする。この取り決めによって，2 回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

(1) 競技者が常にサイコロを 2 回振るとすると，得点の期待値はいくらか。

(2) 競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか。

(3) 得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目を振るとよいか。

3 xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。C_1 上の点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする。以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 Q_1 の座標を求めよ。

(2) 三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3) 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の面積 S_n を求めよ。

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

4 中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ。

(2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) (2) の曲線 C の長さを求めよ。

5 実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める。このとき，次の問いに答えよ。

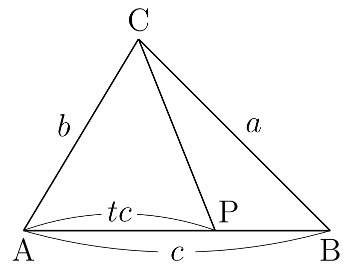
(1) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q が放物線 $9X = 2Y^2$ 全体の上を動くという。このとき，行列 A を求めよ。

(2) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q は常に円 $X^2 + (Y-1)^2 = 1$ の上にあるという。このとき，行列 A を求めよ。

(3) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q がある直線 L <u>全体</u> の上を動くための a，b，c，d についての条件を求めよ。また，その条件が成り立っているとき，直線 L の方程式を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると



$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$\triangle$APC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CP}^2 = b^2 + (tc)^2 - 2b{\cdot}tc\cos A$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2 &= b^2 + (tc)^2 - 2b{\cdot}tc \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &= b^2 + t^2c^2 - t(b^2+c^2-a^2)\\ &= \boldsymbol{ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{CP} = a$ を (1) の結果に代入すると

$$a^2 = ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2$$

ゆえに $\quad (t-1)(a^2-b^2+tc^2) = 0$

$t \geqq 0$ に注意して

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{b \geqq a} \text{ のとき} \quad \boldsymbol{t = 1,\ \frac{b^2-a^2}{c^2}}\\ &\boldsymbol{b < a} \text{ のとき} \quad \boldsymbol{t = 1}\end{aligned}$$

(3) AB 上にちょうど2つあるのは，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に (2) の条件を満たす t が2個あればよい．したがって，(2) の結果から

$b \geqq a$ のとき $(B \geqq A)$

$$\frac{b^2-a^2}{c^2} < 1 \quad \text{すなわち} \quad b^2 < c^2 + a^2 \quad \text{ゆえに} \quad B < 90^\circ$$

よって $\quad \boldsymbol{A \leqq B < 90^\circ}$ ■

2 (1) サイコロを 2 回振るときの得点は，右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{21}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

$$\begin{aligned} E =&0 \times \frac{21}{36} + 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} \\ &+ 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} \\ =&\mathbf{\frac{35}{18}} \end{aligned}$$

得　点

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0

(2) (1) の場合において，最初の目が 6 であるとき，2 回目の目に関係なく 6 点であると考えればよいので，得点は右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{15}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

得　点

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	6	6	6	6	6	6

$$E = 0 \times \frac{21}{36} + 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \mathbf{\frac{53}{18}}$$

(3) サイコロを投げて 1 回目，2 回目に出た目をそれぞれ i，j とする．1 回目 (最初) の目が n 以上であるとき ($1 \leqq n \leqq 6$)，2 回目を振らないとすると，そのときの得点の期待値 $E(n)$ は

$$E(n) = \frac{1}{6}\sum_{i=n}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1 \leqq i < n \\ i+j \leqq 6}} (i+j)$$

また，$E(n+1)$ は ($1 \leqq n \leqq 5$)

$$E(n+1) = \frac{1}{6}\sum_{i=n+1}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1 \leqq i < n+1 \\ i+j \leqq 6}} (i+j)$$

上の 2 式から，$1 \leqq n \leqq 5$ のとき

$$\begin{aligned} E(n+1) - E(n) &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{n+j \leqq 6} (n+j) \\ &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{k=n+1}^{6} k \\ &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36} \times \frac{1}{2}(6-n)(n+7) \\ &= \frac{1}{72}(-n^2 - 13n + 42) \\ &= \frac{1}{72}\{42 - n(n+13)\} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &E(2) - E(1) > 0, \quad E(3) - E(2) > 0, \quad E(4) - E(3) < 0, \\ &E(5) - E(4) < 0, \quad E(6) - E(5) < 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$E(1) < E(2) < E(3) > E(4) > E(5) > E(6)$$

したがって，得点の期待値を最大にするためには，最初に 3 以上の目が出たときに 2 回目を振らなければよい．

よって，2 回目を振るのは，最初の目が 1 または 2 のときである． ■

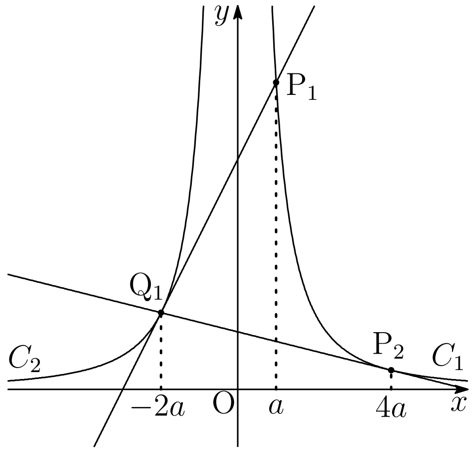
3 (1) $y=\dfrac{1}{x^2}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{2}{x^3}$

点 Q_1 の座標を $\left(b,\ \dfrac{1}{b^2}\right)$ とすると，

点 Q_1 における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{b^2}=-\frac{2}{b^3}(x-b)$$

すなわち　$y=-\dfrac{2x}{b^3}+\dfrac{3}{b^2}$



この直線が点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ を通るから

$$\frac{1}{a^2}=-\frac{2a}{b^3}+\frac{3}{b^2}\quad \text{ゆえに}\quad (b-a)^2(b+2a)=0$$

$b\neq a$ であるから　$b=-2a$　よって，点 Q_1 の座標は　$\left(\boldsymbol{-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}}\right)$

(2) (1) の計算結果から Q_1 の x 座標 b に対し，P_2 の x 座標は $-2b$ であるから，P_2 の x 座標は $4a$ となる．

したがって　$\mathrm{P}_2\left(4a,\ \dfrac{1}{16a^2}\right)$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1}=\left(a,\frac{1}{a^2}\right)-\left(-2a,\ \frac{1}{4a^2}\right)=\left(3a,\frac{3}{4a^2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2}=\left(4a,\frac{1}{16a^2}\right)-\left(-2a,\ \frac{1}{4a^2}\right)=\left(6a,-\frac{3}{16a^2}\right)$$

よって，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 は，$a>0$ に注意して

$$S_1=\frac{1}{2}\left|3a\times\left(-\frac{3}{16a^2}\right)-6a\times\frac{3}{4a^2}\right|=\boldsymbol{\frac{81}{32a}}$$

(3) P_n の x 座標を a_n とすると $(n=1,2,3,\cdots)$，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積 S_n は

$$S_n=\frac{81}{32a_n}$$

$\{a_n\}$ は，初項が a，公比 4 の等比数列であるから　$a_n=4^{n-1}a$

よって　$S_n=\dfrac{81}{32\cdot4^{n-1}a}=\boldsymbol{\dfrac{81}{32a}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，初項 $\dfrac{1}{32a}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{81}{32a}}{1-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{27}{8a}}$$

■

4 (1) 円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，円が角 t だけ回転したとき，円の中心を C，x 軸との接点を T とする．このとき，$\mathrm{OT} = \overset{\frown}{\mathrm{TP}} = at$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix}$$

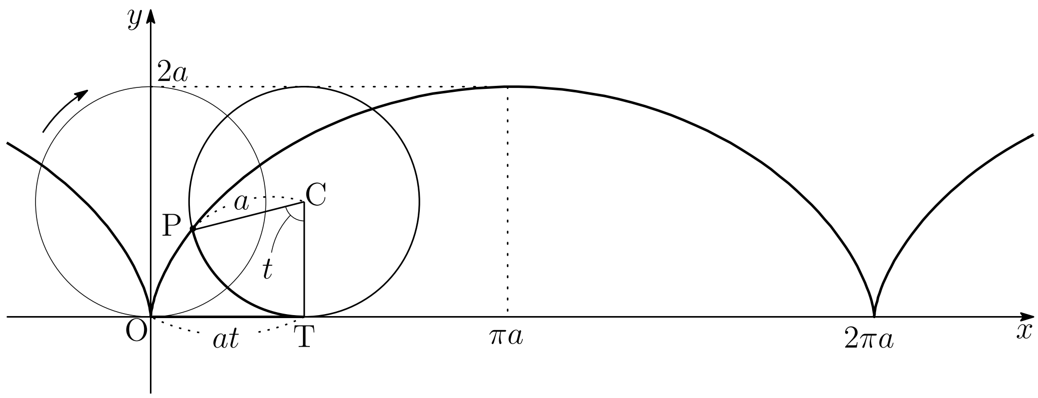
また $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{CT}}$ を $-t$ だけ回転したものであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{CT}} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

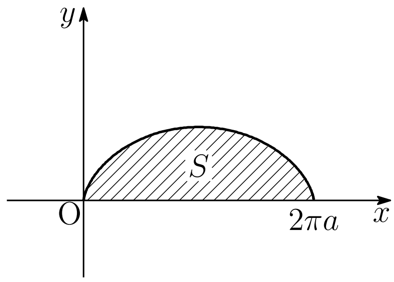
したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} \\ &= \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t-\sin t) \\ a(1-\cos t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，P の座標は　　$\boldsymbol{(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))}$



(2) 求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S=\int_0^{2\pi a} y\,dx$$

また，$x=a(t-\sin t)$ より

$$dx=a(1-\cos t)dt$$

$\leftarrow \frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$

で，x と t の対応は右のようになる．

x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
t	$0 \longrightarrow 2\pi$

よって，置換積分法により

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi a} y\,dx\\&=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt\\&=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt\\&=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt\\&=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}\\&=\boldsymbol{3\pi a^2}\end{aligned}$$

(3) 求める曲線 C の長さを L とすると，$\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$ より

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\{a(1-\cos t)\}^2+(a\sin t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt\\&=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{8a}\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ (1) 放物線 $9X = 2Y^2$ から

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$

これに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

を代入すると

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2c^2 & 2cd \\ 2cd & 2d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9a & -9b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$2c^2x^2 + 4cdxy + 2d^2y^2 - 9ax - 9by = 0$$

これに $y = x^2$ を代入して整理すると

$$2d^2x^4 + 4cdx^3 + (2c^2 - 9b)x^2 - 9ax = 0$$

上式は x に関する恒等式であるから

$$2d^2 = 0, \quad 4cd = 0, \quad 2c^2 - 9b = 0, \quad -9a = 0$$

したがって　$a = 0, \quad b = \dfrac{2}{9}c^2, \quad d = 0$

ここで A による $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ の像 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{2}{9}c^2x^2,\ cx\right)$ が $9X = 2Y^2$ 全体を動くので，$c \neq 0$

よって　$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9}c^2 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)}$$

補足

2 次曲線 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r = 0$ は，次のようにかける．

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r = 0$$

(2) 円 $X^2+(Y-1)^2=1$ から

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=0$$

これに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

を代入すると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}& \\ +\begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}&=0 \\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2c & -2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}&=0 \\ (a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)xy+(b^2+d^2)y^2-2cx-2dy&=0\end{aligned}$$

これに $y=x^2$ を代入して整理すると

$$(b^2+d^2)x^4+2(ab+cd)x^3+(a^2+c^2-2d)x^2-2cx=0$$

上式は x に関する恒等式であるから

$$b^2+d^2=0,\ 2(ab+cd)=0,\ a^2+c^2-2d=0,\ -2c=0$$

したがって　　$a=0,\quad b=0,\quad c=0,\quad d=0$

よって　　　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(3) $y=x^2$ 上の点 $(0,\ 0)$ の像は $(0,\ 0)$ であるから，L は原点を通る．
$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(-1,\ 1)$ について，$\mathrm{P}_1(\vec{p_1})$，$\mathrm{P}_2(\vec{p_2})$ とし，これらの像をそれぞれ $\mathrm{Q}_1(\vec{q_1})$，$\mathrm{Q}_2(\vec{q_2})$ とすると

$$A\begin{pmatrix}\vec{p_1} & \vec{p_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{q_1} & \vec{q_2}\end{pmatrix}$$

これから　$\det(A)\det\begin{pmatrix}\vec{p_1} & \vec{p_2}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\vec{q_1} & \vec{q_2}\end{pmatrix}\quad\cdots①$

L は原点を通る直線であるから　$\det\begin{pmatrix}\vec{q_1} & \vec{q_2}\end{pmatrix}=0$

また，$\det\begin{pmatrix}\vec{p_1} & \vec{p_2}\end{pmatrix}=2\neq 0$ であるから，① より

$$\det(A)=0\quad\cdots②$$

実際，$\vec{p_1}$，$\vec{p_2}$ は 1 次独立であるから，A により座標平面上のすべての点が L に移る．A の固有方程式は $\lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A)=0$ であるから，② より，その解は 0，$a+d$ であり，固有値 $a+d$ に対する固有ベクトルが，L の方向ベクトルである．したがって，L 上の点 $(x,\ y)$ について

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(a+d)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

すなわち　$\begin{pmatrix}-d & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\quad\cdots③$

ここで，$P(t,\ t^2)$ の A による像

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at+bt^2\\ ct+dt^2\end{pmatrix}$$

が L<u>全体</u>を動くための条件は　$\boldsymbol{b=d=0,}\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{c}\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$

よって，求める直線 L の方程式は，③ より

$$\boldsymbol{cx-ay=0}$$

解説

① は，$\det(AB)=\det(A)\det(B)$ を利用した．また，$\det(AB)=\det(BA)$ も成り立つことも覚えておきたい．つまり行列の積について交換法則は成り立たないが，行列式については交換法則が成り立つ．

一般に，$\det(A)=0$ ならば，A により平面上のすべて点は定直線上に移る．

③ より $\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}$ は L の方向ベクトルである．

定理 1

対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有ベクトルは直交する．ただし，$A \neq kE$ とする．

証明　A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

この方程式の判別式 D は

$$D = \{-(a+c)\}^2 - 4{\cdot}1(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 > 0$$

ゆえに，異なる 2 つの固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ u_1，u_2 とする．ここで，内積 $u_1{\cdot}u_2$ は行列の積 ${}^tu_1u_2$ であることに留意する．

$$(Au_1){\cdot}u_2 = {}^t(Au_1)u_2 = {}^tu_1{}^tAu_2 = {}^tu_1Au_2 = u_1{\cdot}(Au_2)$$

$Au_1 = \lambda_1 u_1$，$Au_2 = \lambda_2 u_2$ であるから上式より

$$(\lambda_1 u_1){\cdot}u_2 = u_1{\cdot}(\lambda_2 u_2) \quad \text{すなわち} \quad (\lambda_1 - \lambda_2)u_1{\cdot}u_2 = 0$$

$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ であるから　$u_1{\cdot}u_2 = 0$　よって　$u_1 \perp u_2$　**証終**

u_1，u_2 を単位固有ベクトルとし，これらを基底とする座標変換を用いることで，$ax^2 + 2bxy + cy^2$ について次の定理 2 が成り立つ．

定理 2

u_1，u_2 を A の単位固有ベクトルとする．

基底の変換　$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Xu_1 + Yu_2$　　$(x, y, X, Y$ は実数$)$

すなわち　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ により次が成り立つ．

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$$

証明　$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tu_1 \\ {}^tu_2 \end{pmatrix}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
ax^2+2bxy+cy^2 &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Au_1 & Au_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2
\end{aligned}
$$

証終

定理 3

2 次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$ を次のようにかくと

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r = 0$$

このとき $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおくと　$\det(A) = ac - b^2$

この 2 次曲線について，次が成り立つ．

$$
\begin{array}{lcl}
\text{楕円} & \Longrightarrow & \det(A) > 0 \\
\text{放物線} & \Longrightarrow & \det(A) = 0 \\
\text{双曲線} & \Longrightarrow & \det(A) < 0
\end{array}
$$

証明 定理 1 の固有方程式の解と係数の関係により　$\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$

これと定理 2 の結果から明らか． 証終

注意 定理 3 において，逆は必ずしも成り立たない．たとえば $x^2+y^2+1=0$ は $\det(A)>0$ であるが ϕ．$x^2-y^2=0$ は $\det(A)<0$ であるが 2 直線．

正則でない 1 次変換の像は，定直線上にあるので，1 次変換を表す行列 P によって曲線から曲線全体に移されるためには P は正則である必要がある．

P による $(x,\ y)$ の像を $(X,\ Y)$ とし，$Q=P^{-1}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^t Q$$

定理 3 の 2 次曲線の 2 次形式について

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^t QAQ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$\det({}^tQ)=\det(Q)$ に注意すると

$$\det({}^tQAQ)=\det({}^tQ)\det(A)\det(Q)=\det(A)\{\det(Q)\}^2$$

Q は正則であるから，$\det({}^tQAQ)$ の符号と $\det(A)$ の符号は一致する．すなわち，一次変換により移された 2 次曲線の種類はもとの 2 次曲線の種類と一致する．

したがって，$\boxed{\mathbf{5}}$(1) のように放物線から放物線全体に移ることはあるが，$\boxed{\mathbf{5}}$(2) のように放物線から楕円 (円も含む) 全体に移ることはない．■