平成13年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工)，理，医，歯，薬，工，農学部)

$\boxed{\mathbf{1}}$〜$\boxed{\mathbf{3}}$ 必答，$\boxed{\mathbf{4}}$〜$\boxed{\mathbf{6}}$ から1題選択，$\boxed{\mathbf{7}}$〜$\boxed{\mathbf{9}}$ から1題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a = 0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 3次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) 直線 $mx + ny = 0$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。ただし m，n は共には0でないとする。

(4) G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は一辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。$0 < r \leqq \sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

(1) 高さが $z = t\ (-r \leqq t \leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2) K の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3) $0 < r \leqq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 複素数平面上の点 z を考える。

(1) 実数 a，c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p，q に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q}) = \overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか。

$\boxed{\mathbf{5}}$ サイコロを n 回振って，出た目を小さい方から順に並べ，第 i 番目を X_i $(i = 1, \cdots, n)$ とする。

(1) $n = 7$ のとき，3 の目が 3 回，5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。

(2) 一般の n に対して，$X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ。

(3) 一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(E(X_1) - 1)$ を求めよ。ここで $\log$ は自然対数を表す。

(5) 一般の n に対して，期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{6}}$ m，n を自然数とする。次の算法を考える。

(a) $i = m$，$j = n$，$k = 0$.

(b) $i = 1$ ならば $\mathrm{Ans} = k + j$ として終了する.

(c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする.

(d) $i = [i/2]$.　(e) $j = 2 * j$.　(f) (b) にもどる.

(ここで，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。)

(1) $m = 100$ のとき，3 周目と 4 週目の (b) における i，j，k の値を求めよ。たとえば 1 周目では $i = 100$，$j = n$，$k = 0$ である。

(2) 一般の m に対して，(b) における i，j，k の値について $i * j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。

(3) 一般の m に対して，Ans を求めよ。

(4) l を自然数とする。$m = 3{\cdot}2^l$ のとき，終了するまでに何回 (d) を実行するか。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし，関数 $y = f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし，$\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2} < \theta(t) < \dfrac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする。また，点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2) $\alpha(t)$，$\beta(t)$ を求めよ。

(3) t が a から b $(a < b)$ まで変化するとき，点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1，L_2 とする。$L_2 - L_1$ を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) e を自然対数の底とし，$f(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2}x^2\right)$ とおく。

$0 < x < 1$ においては $0 < f(x) < x^3$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ を示せ。

必要であれば $e < 3$ を使ってよい。

(2) 関数 $g(x) = e^x$ を考える。区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 個の小区間に等分して，各小区間を底辺，小区間の左端の点における関数 $g(x)$ の値を高さとする長方形の面積の和を K_n とする。$n \to \infty$ のとき

$$n^k \left| \int_0^1 g(x)\,dx - K_n \right|$$

が有限の値に収束するような最大の自然数 k とそのときの極限値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{9}}$ p，q を整数とし，x，y を未知数とする連立 1 次方程式 $\begin{cases} 4x + 9y = p \\ 2x + 6y = q \end{cases}$ を考える。

(1) この方程式を行列を用いて表し，係数行列の逆行列を求めよ。

(2) 上の連立方程式の解 x，y が共に整数であるような組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。ただし $0 \leqq p \leqq 5$，$0 \leqq q \leqq 5$ とする。

(3) 正の整数 d で,「d のどんな倍数 p，q に対しても上の連立方程式の解 x，y が整数になる」ものが存在することを示せ。

(4) (3) における d のうちで最小のものを求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)$ を微分すると，$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1 \qquad \cdots(*)$

$a\neq 0$ のとき，すべての自然数 x に対して，$f'(x)\geqq 0$ となるための条件は

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると　$2a>0,\ \ D\leqq 0$

$D/4=(a+b)^2-2a(b+1)=a^2+b^2-2a\cdots①$ により

$a>0,\ \ (a-1)^2+b^2\leqq 1$

$a=0$ のとき　$f(x)=bx^2+(b+1)x$ となる．

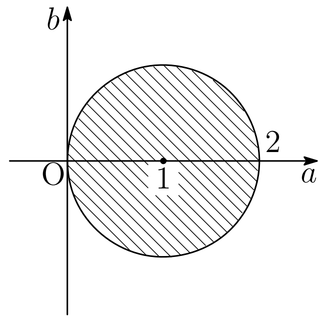
これがつねに増加するためには　$b=0$

すなわち $f(x)=x$ となり，条件を満たす．

よって　$a>0$ のとき　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

$a=0$ のとき　$b=0$

したがって　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$



これを ab 平面上に図示すると，右の図のような円 $(a-1)^2+b^2=1$ の内部で，境界線を含む．

(2) $a=0$ のとき　$f(x)=bx^2+(b+1)x$

$b\geqq 0$ は，$x>-1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=2bx+b+1$

$b>0$ のとき，$f'(-1)\geqq 0$ であることが条件であるから

$b>0,\ \ 2b(-1)+b+1\geqq 0$　すなわち　$0<b\leqq 1$

$b=0$ のとき　$f(x)=x$ となり，これは条件を満たす．

よって　$\mathbf{0\leqq \boldsymbol{b}\leqq 1}$

(3) $a\geqq 0$ は，$x>-1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$a=0$ の場合が (2) であり，$a>0$，$D\leqq 0$ の場合が (1) である．

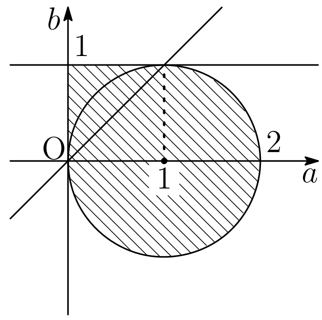
したがって，$a>0$，$D>0$ の場合を求める．

$(*)$ より

$$f'(x)=2a\left(x+\frac{a+b}{2a}\right)^2-\frac{a^2+b^2-2a}{2a}$$

ゆえに　$-\dfrac{a+b}{2a}\leqq -1,\ \ f'(-1)=-b+1\geqq 0$

$D>0$ であるから，① より　$a^2+b^2-2a>0$



これを解いて　$a>0,\ b\geqq a,\ b\leqq 1,\ (a-1)^2+b^2>1$

求める領域は，右の図のように (1)，(2) の結果および上式をまとめた領域で，境界線を含む．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると $\dfrac{x+X}{2}=p$, $\dfrac{y+Y}{2}=q$

よって，求める点の座標は $\boldsymbol{(2p-X,\ 2q-Y)}$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおくと，任意の定数 p に対して

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+(x-p)^3 \quad \cdots ①$$

が成り立つ．G の点 $(p,\ f(p))$ に関して $y=f(x)$ と対称なグラフは

$$2f(p)-y=f(2p-x) \quad \text{ゆえに} \quad y=2f(p)-f(2p-x) \quad \cdots ②$$

② のグラフは ① より

$$\begin{aligned} y &= 2f(p)-\{f(p)+f'(p)(2p-x-p) \\ &\qquad +\frac{1}{2}f''(p)(2p-x-p)^2+(2p-x-p)^3\} \\ &= f(p)+f'(p)(x-p)-\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+(x-p)^3 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

$f''(p)=0$，すなわち $p=-\dfrac{a}{3}$ とすると，①，③ は一致する．
したがって，G は変曲点に関して対称である．

(3) 直線 $mx+ny=0$ の方向ベクトル $\vec{d}$，法線ベクトル $\vec{n}$ を

$$\vec{d}=\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix}, \quad \vec{n}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

とする．実数 s，t を用いて

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=s\vec{d}+t\vec{n}=s\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ns+mt \\ -ms+nt \end{pmatrix}$$

とすると $s=\dfrac{nX-mY}{m^2+n^2}$, $t=\dfrac{mX+nY}{m^2+n^2}$

したがって，直線 $mx+ny=0$ に関して点 $(X,\ Y)$ と対称な点は

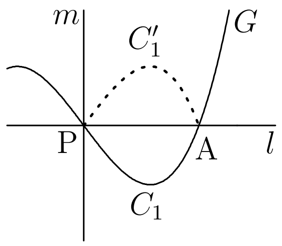
$$\begin{aligned} s\vec{d}-t\vec{n} &= \frac{nX-mY}{m^2+n^2}\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix}-\frac{mX+nY}{m^2+n^2}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2+n^2}\begin{pmatrix} -(m^2-n^2)X-2mnY \\ -2mnX+(m^2-n^2)Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{\left(\dfrac{-(m^2-n^2)X-2mnY}{m^2+n^2},\ \dfrac{-2mnX+(m^2-n^2)Y}{m^2+n^2}\right)}$

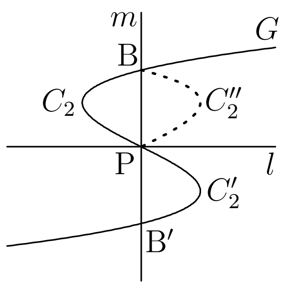
(4) G がある直線 l に関して対称であるとき，G の変曲点 P が l 上にないと仮定すると，P と l に関して対称な変曲点 P' が G にあり，G に 2 個の変曲点が存在することなる．このことは G が 3 次関数のグラフであることに反する．したがって，P は l 上にある．

P を通り，l に垂直な直線を m とする．G は P に関して対称であるから，G と l，m の位置関係について次のようになる．

i) G が P 以外に l と共有点 A をもつと仮定すると，P から A までの G の曲線部分を C_1 とすると，C_1 と l に関して対称な曲線部分 C_1' があり，C_1 および C_1' によるループ (loop) ができ，これは G が 3 次関数であることに反する．

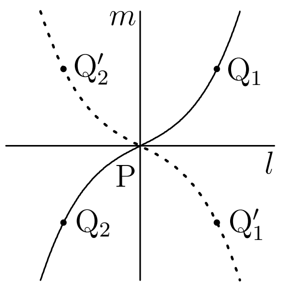


ii) G が P 以外に m と共有点 B をもつと仮定すると，P から B までの G の曲線部分を C_2 とすると，C_2 と P に関して対称な曲線部分 C_2' があり，さらに C_2' と l に関して対称な C_2'' がある．C_2 および C_2'' によるループができ，これは G が 3 次関数であることに反する．



したがって，i)，ii) により，G と l，m との共有点は P に限る．

G 上に P と異なる点 Q_1 をとり，Q_1 と P に関して対称な点を Q_2 とし，2 点 Q_1，Q_2 と l に関して対称な点をそれぞれ Q_1'，Q_2' とする．このとき，これらの 4 点を結ぶ曲線部分は，P において自己交差 (Self-Intersection) し，G が 3 次関数であることに反する．
よって，題意は成立する．



補足 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を $x = p$ でテイラー展開を行うと

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2 + a(x-p)^3$$

であり，$f''(p) = 0$，すなわち $p = -\dfrac{b}{3a}$ とすると，曲線 $y = f(x)$ は

$$y = f(p) + f'(p)(x-p) + a(x-p)^3$$

となり，変曲点 $(p,\ f(p))$ に関して対称である．よって，(4) の結果から，3 次関数のグラフは，どんな直線に関しても線対称ではない．

解説

$f(t)$ を必要な回数だけ微分可能 (C^∞級) な関数とし，$k \geqq 1$ とする．

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt &= -\int_a^x \left\{\frac{(x-t)^k}{k!}\right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\ \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\ \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

上式を $k = 1, 2, 3, \dots n-1$ について辺々を加えると

$$\int_a^x f'(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \tag{1}$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ が最大値，最小値をもつとき，それらをそれぞれ M，m とすると，$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$ は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M\,dt = \frac{M}{n!}(x-a)^n, \quad \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} m\,dt = \frac{m}{n!}(x-a)^n$$

の間の値をとるので，この区間内のある c は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{2}$$

を満たす．(2) を (1) に代入すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{3}$$

(3) を $f(x)$ の $x = a$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion) という．解答の ① は，$f(x)$ の $x = p$ におけるテイラー展開である．

とくに $a = 0$ とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n$$

となり，これをマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) という．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 平面 $z=t\ (-r \leqq t \leqq r)$，円柱 $y^2+z^2 \leqq r^2$，正四角柱 $|x|+|y| \leqq \dfrac{2}{r}$ で囲まれた領域は

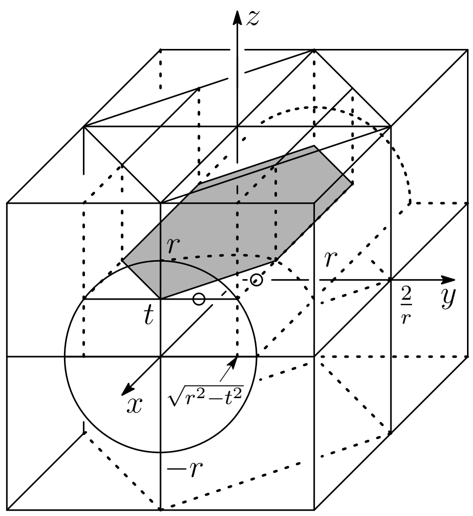
$$z=t, \quad -\sqrt{r^2-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-t^2}, \quad -\left(\frac{2}{r}-|y|\right) \leqq x \leqq \frac{2}{r}-|y|$$

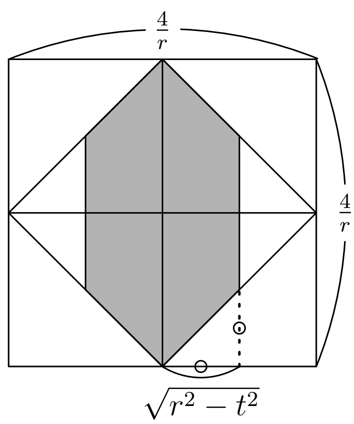
よって，求める面積を $S(t)$ とすると

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{-\sqrt{r^2-t^2}}^{\sqrt{r^2-t^2}} 2\left(\frac{2}{r}-|y|\right)dy = 4\int_0^{\sqrt{r^2-t^2}} \left(\frac{2}{r}-|y|\right)dy \\ &= 4\int_0^{\sqrt{r^2-t^2}} \left(\frac{2}{r}-y\right)dy = 4\left[\ \frac{2y}{r}-\frac{y^2}{2}\ \right]_0^{\sqrt{r^2-t^2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}-2(r^2-t^2)} \end{aligned}$$

別解 K を $z=t$ で切った断面は下の図のようになる．

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{4}{r}\times 2\sqrt{r^2-t^2} - 4\times\frac{1}{2}(\sqrt{r^2-t^2})^2 \\ &= \frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}-2(r^2-t^2) \end{aligned}$$





(2) (1) の結果から，$V(r)$ は

$$
\begin{aligned}
V(r) &= \int_{-r}^{r} S(t)\,dt \\
&= \int_{-r}^{r} \left\{ \frac{8}{r}\sqrt{r^2 - t^2} - 2(r^2 - t^2) \right\} dt \\
&= \frac{16}{r} \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - t^2}\,dt - 4\int_{0}^{r} (r^2 - t^2)\,dt \\
&= \frac{16}{r} \cdot \frac{\pi r^2}{4} - 4\left[\ r^2 t - \frac{t^3}{3}\ \right]_0^r \\
&= \boldsymbol{4\pi r - \frac{8}{3}r^3}
\end{aligned}
$$

(3) $V(r) = 4\pi r - \dfrac{8}{3}r^3 \ (0 < r \leqq \sqrt{2})$ より

$$
V'(r) = 4\pi - 8r^2 = -8\left(r + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\left(r - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)
$$

増減表は，次のようなる．

r	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める最大値は

$$
V\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi^{\frac{3}{2}}}
$$

$\boxed{4}$ (1) $az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ (a，c は実数) より

$$a^2z\overline{z}+a(\overline{b}z+b\overline{z})+b\overline{b}=b\overline{b}-ac$$

ゆえに　$(az+b)(a\overline{z}+\overline{b})=|b|^2-ac$

したがって　$|az+b|^2=|b|^2-ac$

$|b|^2-ac>0$ より　$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$

よって，z は**中心 $-\dfrac{b}{a}$，半径 $\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$ の円**を描く.

(2) $d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$ より

$$i(d-\overline{d})z\overline{z}+i(\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q})z+i(\overline{d}q-dp)\overline{z}+i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)=0 \quad \cdots ①$$

i) $d\neq\overline{d}$ のとき (d は虚数)

$$a=i(d-\overline{d}),\quad b=i(\overline{d}q-dp),\quad c=i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)$$

とおくと，a，c は実数であり，① から　$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$

したがって，(1) の結果により

$$\begin{aligned}|b|^2-ac&=b\overline{b}-ac\\&=i(\overline{d}q-dp)\cdot(-i)(d\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p})-i(d-\overline{d})\cdot i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)\\&=|d|^2(|p|^2-p\overline{q}-\overline{p}q+|q|^2)\\&=|d(p-q)|^2\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}=\left|\frac{d(p-q)}{d-\overline{d}}\right|,\quad -\frac{b}{a}=-\frac{i(\overline{d}q-dp)}{i(d-\overline{d})}=\frac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}$$

よって，z は**中心 $\dfrac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}$，半径 $\left|\dfrac{d(p-q)}{d-\overline{d}}\right|$ の円**を描く.

ii) $d=\overline{d}$ のとき (d は実数)

$d=\overline{d}\neq0$ より　$(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$

したがって　$\dfrac{z-p}{z-q}=\overline{\left(\dfrac{z-p}{z-q}\right)}$　ゆえに，$\dfrac{z-p}{z-q}$ は実数である.

よって，z は**2 点 p，q を通る直線**を描く.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 次の6通りに分類できる．

$X_1\,X_2\,3\,3\,3\,5\,5$ のとき　$X_4=3$
$X_1\,3\,3\,3\,X_5\,5\,5$ のとき　$X_4=3$
$X_1\,3\,3\,3\,5\,5\,X_7$ のとき　$X_4=3$
$3\,3\,3\,X_4\,X_5\,5\,5$ のとき　$X_4=3,4,5$
$3\,3\,3\,X_4\,5\,5\,X_7$ のとき　$X_4=3,4,5$
$3\,3\,3\,5\,5\,X_6\,X_7$ のとき　$X_4=5$

よって，X_4 のとりうる値は　$\mathbf{3,4,5}$

(2) $P(X_1=2)=P(X_1\geqq 2)-P(X_1\geqq 3)=\boldsymbol{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

(3) $1\leqq k\leqq 6$ のとき　$P(X_1=k)=\left(\dfrac{7-k}{6}\right)^n-\left(\dfrac{6-k}{6}\right)^n$

$$\begin{aligned}E(X_1)&=\sum_{k=1}^{6}kP(X_1=k)=\sum_{k=1}^{6}k\left\{\left(\frac{7-k}{6}\right)^n-\left(\frac{6-k}{6}\right)^n\right\}\\&=\sum_{k=1}^{6}k\left(\frac{7-k}{6}\right)^n-\sum_{k=1}^{6}k\left(\frac{6-k}{6}\right)^n\\&=\sum_{k=0}^{5}(k+1)\left(\frac{6-k}{6}\right)^n-\sum_{k=0}^{5}k\left(\frac{6-k}{6}\right)^n\\&=\frac{1}{6^n}\sum_{k=0}^{5}(6-k)^n\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6^n}(1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n)}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から　$E(X_1)-1=\dfrac{1}{6^n}(1^n+2^n+3^n+4^n+5^n)$

したがって　$$\left(\frac{5}{6}\right)^n<E(X_1)-1<5\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$n\log\frac{5}{6}<\log(E(X_1)-1)<\log 5+n\log\frac{5}{6}$$

ゆえに　$$\log\frac{5}{6}<\frac{1}{n}\log(E(X_1)-1)<\frac{1}{n}\log 5+\log\frac{5}{6}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log 5+\log\frac{5}{6}\right)=\log\frac{5}{6}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(E(X_1)-1)=\log\frac{5}{6}}$$

(5) $2 \leqq k \leqq 6$ のとき

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(X_n \leqq k) - P(X_n \leqq k-1) \\ &= \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

$P(X_n = 1) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ であるから，上式は $k = 1$ のときも成り立つ．

ゆえに，$1 \leqq k \leqq 6$ のとき　　$P(X_n = k) = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{6}\right)^n$

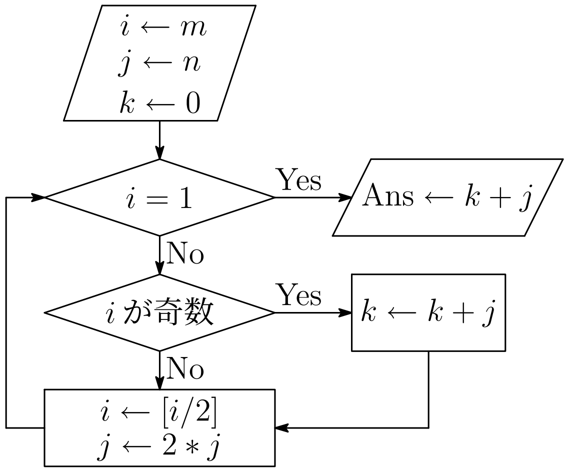
$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k-1}{6}\right)^n \\ &= 6 + \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{5}(k+1)\left(\frac{k}{6}\right)^n \\ &= 6 - \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{k}{6}\right)^n \\ &= 6 - \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \end{aligned}$$

よって，上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_n) &= E(X_1) + E(X_n) \\ &= \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n) \\ &\qquad\qquad + 6 - \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \\ &= \mathbf{7} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 右のフローチャートから

	i	j	k
1 周目	100	n	0
2 周目	50	$2n$	0
3 周目	**25**	$\boldsymbol{4n}$	**0**
4 周目	**12**	$\boldsymbol{8n}$	$\boldsymbol{4n}$



(2) i) i が奇数のとき，$[i/2] = \dfrac{i-1}{2}$ であるから

$k \leftarrow k + j$，$i \leftarrow \dfrac{i-1}{2}$，$j \leftarrow 2 * j$ より

$$i * j + k = \frac{i-1}{2} * (2 * j) + (j + k) = i * j + k$$

ii) i が偶数のとき，$[i/2] = \dfrac{i}{2}$ であるから

$i \leftarrow \dfrac{i}{2}$，$j \leftarrow 2 * j$ より

$$i * j + k = \frac{i}{2} * (2 * j) + k = i * j + k$$

i)，ii) より，$i * j + k$ は一定である．

(3) 1 周目の $i * j + k$ は　$m \times n + 0 = mn$

この値は i の値に関係なく不変であり，$i = 1$ のとき $k + j$ となる．

したがって，求める Ans は　　$\boldsymbol{mn}$

(4) フローチャートから，与えられた自然数 m を 2 で割り続けるアルゴリズムである．よって，$3{\cdot}2^l = 2^{l+1} + 2^l$ であるから，(d) を $\boldsymbol{l + 1}$ **回**実行する．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\theta = \theta(t)$ とすると $\qquad f'(t) = \tan\theta$

これを t で微分すると $\quad f''(t) = \dfrac{\theta'}{\cos^2\theta}$

$f''(t) > 0$ であるから $\quad \theta' > 0 \quad$ よって，$\theta(t)$ は増加関数である．

(2) P における G の下側の向きの単位法ベクトルは $\quad \vec{n} = (\sin\theta, -\cos\theta)$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}},\quad \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

したがって $\qquad \vec{n} = \left(\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \vec{n}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(t + \frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},\ f(t) - \frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha(t) = t + \frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},\ \beta(t) = f(t) - \frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}}$$

(3) $L_1 = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{1+\tan^2\theta}\,dt = \int_a^b \frac{dt}{\cos\theta}$

$\alpha(t) = t + \sin\theta$，$\beta(t) = f(t) - \cos\theta$ であるから，これを微分して

$$\alpha'(t) = 1 + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\beta'(t) = f'(t) + \sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \tan\theta + \sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \tan\theta\left(1+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\{\alpha'(t)\}^2 + \{\beta'(t)\}^2 = (1+\tan^2\theta)\left(1+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$L_2 = \int_a^b \sqrt{\{\alpha'(t)\}^2 + \{\beta'(t)\}^2}\,dt = \int_a^b \frac{dt}{\cos\theta} + \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} d\theta$$

よって $\qquad L_2 - L_1 = \displaystyle\int_{\theta(a)}^{\theta(b)} d\theta = \Big[\ \theta\ \Big]_{\theta(a)}^{\theta(b)} = \boldsymbol{\theta(b) - \theta(a)}$

補足 単位法ベクトルの向きは，単位接ベクトルを反時計周りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させるのが一般的である．関連問題が 2009 年九州大学 (理系) 前期 $\boxed{\mathbf{3}}$ に出題されている．

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $0<x<1$ のとき

$$0<\int_0^x e^t\,dt<\int_0^x 6\,dt \quad ゆえに \quad 0<e^x-1<6x$$

これから

$$0<\int_0^x (e^t-1)dt<\int_0^x 6t\,dt \quad ゆえに \quad 0<e^x-1-x<3x^2$$

さらに

$$0<\int_0^x (e^t-1-t)dt<\int_0^x 3t^2\,dt \quad ゆえに \quad 0<e^x-1-x-\frac{x^2}{2}<x^3$$

よって，$0<x<1$ において，$0<f(x)<x^3$ が成り立つ．
$n>1$ のとき，$0<\dfrac{1}{n}<1$ であるから，上式により

$$0<f\left(\frac{1}{n}\right)<\left(\frac{1}{n}\right)^3 \quad ゆえに \quad 0<n^2f\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2f\left(\frac{1}{n}\right)=0$

(2) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 e^x\,dx=\Big[\,e^x\,\Big]_0^1=e-1$，$\displaystyle K_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\times\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,dx-K_n&=(e-1)\left\{1-\frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}\right\}\\&=(e-1)\times\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\left\{n(e^{\frac{1}{n}}-1)-1\right\}\end{aligned}$$

$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=e^{\frac{1}{n}}-1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}$ より，$n(e^{\frac{1}{n}}-1)-1=nf\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{2n}$ から

$$n\left\{\int_0^1 g(x)\,dx-K_n\right\}=(e-1)\times\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\times\left\{n^2f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\right\}$$

よって，求める最大の自然数 k は $\boldsymbol{k=1}$ であり，そのときの極限値は

$$\lim_{n\to\infty}n\left|\int_0^1 g(x)\,dx-K_n\right|=(e-1)\times1\times\left(0+\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{e-1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 方程式を行列を用いて表すと $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$

係数行列の逆行列は $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

(2) (1) の結果から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \cdots(*)$

ゆえに　$x = p - \dfrac{3}{2}q \cdots ①$，$y = -\dfrac{1}{3}p + \dfrac{2}{3}q \cdots ②$

① より，整数 m を用いて　$q = 2m \quad \cdots ③$

これを ② に代入すると

$$y = -\frac{1}{3}p + \frac{2}{3}\cdot 2m = m - \frac{p-m}{3}$$

上式より，整数 n を用いて

$$p - m = 3n \quad \text{すなわち} \quad p = m + 3n \quad \cdots ④$$

$0 \leqq p \leqq 5$，$0 \leqq q \leqq 5$ をみたす $(m,\ n)$ の組は，③，④ より

$$(m,\ n) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1)$$

これらの組に対して，$(p,\ q)$ は

$$\boldsymbol{(p,\ q) = (0,\ 0),\ (3,\ 0),\ (1,\ 2),\ (4,\ 2),\ (2,\ 4),\ (5,\ 4)}$$

(3) $(*)$ から，d が 6 の倍数のとき，整数解 $(x,\ y)$ が存在する．

(4) (3) における d で最小のものを d' とする．このとき，任意の整数 p'，q' に対して，$p = d'p'$，$q = d'q'$ が整数解 $(x,\ y)$ をもつので，$(*)$ より

$$x = \frac{d'(2p' - 3q')}{2},\quad y = \frac{d'(-p' + 2q')}{3}$$

$p' = 2$，$q' = 1$ とすると，第 1 式から　$x = \dfrac{d'}{2}$

$p' = 1$，$q' = 1$ とすると，第 2 式から　$y = \dfrac{d'}{3}$

上の 2 式から，d' は 2 の倍数かつ 3 の倍数でなければならない．

よって，求める最小の d の値は　**6**