平成 12 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，芸工，農学部)

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 1 題選択，$\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ から 1 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$　係数が 0 か 1 である x の整式を，ここでは **M 多項式**とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を 0 でおきかえ，奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は，このおきかえによって等しくなるとき**合同**であるという。例えば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式が共に x^2+1 となるので，合同である。

M 多項式は，2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき**可約**であるといい，可約でないとき**既約**であるという。例えば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1) x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2) 1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。

(3) x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 定数 a，b を係数とする 2 次関数 $y=-ax^2+b$ のグラフが，原点を中心とする半径 1 の円と異なる 2 点で接しているとする。ただし，$a>0$ とする。

(1) a，b の条件式，および接点の座標を求めよ。

(2) 与えられた 2 次関数のグラフと x 軸とで囲まれる部分を，y 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V を a を用いて表せ。

(3) V を最小にする a，b の値，およびそのときの V の値を求めよ。

3 n を自然数として，$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ とおく。

(1) $x<1$ において，

$$f(x)=-\log(1-x)-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$\log$ は自然対数を表す。

(2) $|x| \leqq \dfrac{1}{3}$ とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

(i) $x \geqq 0$ において，$\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leqq \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$

(ii) $x<0$ において，$\displaystyle\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt\right| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$

(iii) $\displaystyle\left|f(x)-f(-x)-\log\frac{1+x}{1-x}\right| \leqq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

(3) この不等式を用いて，$\log 2$ の近似値を誤差が $\dfrac{1}{100}$ 以下となるような分数で求めよ。

4 複素数 $z=\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ$ と，それに共役な複素数 $\overline{z}$ に対し

$$\alpha = z+\overline{z}$$

とする。

(1) α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3) 有理数を係数とする 2 次方程式で，α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。

5 1からnまでの数でm個からなる重複しない数の順列を作り出す算法として，下記のものを考えた。ただし，Sは順列を表し，算法の開始の時は数を含まない (Sは空であるという) とする。算法の終了時には結果として順列を得るものとする。

算法 ［以下 (a)，(b)，(c)，$\cdots$ の順に行う］

(a) Sを空とし，$j = n - m + 1$とする。

(b) 1からjまでの数からデタラメに数tを選ぶ。

(c) tが順列Sに入っているならば，tの直後にjを入れ，そうでないならば，tをSの先頭に入れる。

(d) jを1増やす。

(e) $j \leqq n$ならば，(b) へもどる。$j > n$ならば，終了する。

(1) $n = 10$，$m = 6$の場合で (b) において選ばれた数tは順に4，3，6，3，2，5であった。その結果として得られる順列Sはどのような順列か。

(2) $n = 10$，$m = 6$の場合で結果として得られた順列Sが8 2 7 5 9 3であった。(b) で選ばれた数tの列は何であったか。

(3) 算法の結果として得られた順列Sから (b) において選ばれた数の列を復元する算法を記述せよ。

6 a，b，cを0でない実数として，空間内に3点A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$をとる。

(1) 空間内の点Pが$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CP}}) = 0$を満たしながら動くとき，この点Pはある定点Qから一定の距離にあることを示せ。

(2) (1) における定点Qは3点A，B，Cを通る平面上にあることを示せ。

(3) (1) におけるPについて，四面体ABCPの体積の最大値を求めよ。

7 発芽して一定期間後の，ある花の苗の高さの分布は母平均 m (cm)，母標準偏差 $\sigma = 1.5$(cm) の正規分布であるとする。

(1) 花壇に植えるとき，高さが 7.3cm より低い苗と 13.0cm より高い苗は間引くとする。$m = 10$(cm) としたとき，苗が間引かれる確率を求めよ。

(2) 母平均 m が未知であったため，大きさ n の標本を任意抽出して，信頼度 95%の m に対する信頼区間を求めたところ，$[9.81,\ 10.79]$ であった。標本平均 $\overline{x}$ の値と n を求めよ。

(3) 赤花と白花を交配して得られた種子と，赤花同志の交配で得られた種子をまいて育てた苗の花の色を調べた。赤白交配の種子を 1，赤花のみからの種子を 0 とし，咲いた花の色については，赤白混じったものは 1，赤のみであれば 0 として，観察した結果は以下の通りとなった。種子の種類と咲いた花の色の相関関係を求めよ。

種　子	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
花の色	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

正規分布表 $P(0 \leqq U \leqq u_0)$

u_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817

8 平面上の点の極座標を，原点 O からの距離 $r(\geqq 0)$ と偏角 θ を用いて $(r,\ \theta)$ で表す。

(1) 平面上の 2 曲線 $C_1 : r = 2\cos(\pi+\theta)$，$C_2 : r = 2(\cos\theta+1)$，$\left(\text{ただし，}\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ の概形を描き，この 2 曲線 C_1，C_2 の交点の極座標を求めよ。

(2) 平面上の 3 点 P_1，P_2，E の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$，$(1,\ 0)$ とするとき，三角形 OEP_1 と三角形 $\mathrm{OP}_2\mathrm{Q}$ とが相似となる点 Q を $\mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2$ で表す。点 $\mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。ただし，点 Q は $\angle\mathrm{EOP}_1 = \angle\mathrm{P}_2\mathrm{OQ}$ となるように向きも込めて定める。

(3) 3 点 O，P_1，P_2 が同一直線上にないとき，四辺形 $\mathrm{OP}_1\mathrm{RP}_2$ が平行四辺形となるような点 R を $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2$ で表す。P_1，P_2 の極座標が $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$ で $r_1 = r_2 = r$ のとき，点 $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。

(4) さらに，平面上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として，実数 k に対し点 $k\mathrm{P}$ を，$k \geqq 0$ のときは極座標が $(kr,\ \theta)$ となる点，$k < 0$ のときは $(|k|r,\ \theta+\pi)$ となる点とする。(1) で求めた 2 曲線 C_1，C_2 の交点を V として，点 $k(V\circ(V*V))$ が曲線 C_1 上にあるための k の条件を求めよ。

9 3 次単位行列 E の第 1 行の -2 倍を第 3 行に加えた行列を P とする。

(1) $QP = E$ となる行列 Q を求めよ。

(2) 行列

$$R = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

について，$S = PR$ を求めよ。

(3) 3×3 行列 A と 3×1 行列 B が与えられているとき，$PAX = PB$ を満たす行列 X は $AX = B$ を満たすことを示せ。

(4) x，y，z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = a \\ -3x + 4y - 5z = b \\ 6x - 5y + 4z = c \end{cases}$$

の係数が作る行列を A として，この方程式を $AX = B$ で表すとき，この両辺に左から P をかけた連立 1 次方程式を書け。

(5) 上と同様の操作を繰り返すことにより，(4) で与えた連立 1 次方程式が解を持つための条件を求め，解があるときはその解をすべて求めよ。

解答例

1 (1) 以下，合同を記号「≡」で表すことにする．

1 次の M 多項式は，x と $x+1$ であるから，可約な 2 次の M 多項式は

$$xx = x^2, \quad x(x+1) = x^2+x, \quad (x+1)^2 = x^2+2x+1 \equiv x^2+1$$

すべての 2 次の M 多項式は

$$x^2, \quad x^2+1, \quad x^2+x, \quad x^2+x+1 \quad \cdots (*)$$

であるから，x^2+x+1 は既約な 2 次の M 多項式である．

(2) $(*)$ から，3 次の可約な M 多項式は

$$\begin{array}{ll} xx^2 = x^3, & x(x^2+1) = x^3+x, \\ x(x^2+x) = x^3+x^2, & x(x^2+x+1) = x^3+x^2+x, \\ (x+1)x^2 = x^3+x^2, & (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1, \\ (x+1)(x^2+x) \equiv x^3+x, & (x+1)(x^2+x+1) \equiv x^3+1 \end{array}$$

したがって，3 次の既約な既約な M 多項式は　x^3+x+1，x^3+x^2+1

よって，3 次以下の既約な M 多項式は，これと (1) の結果により

$$\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x+1}, \quad \boldsymbol{x^2+x+1}, \quad \boldsymbol{x^3+x+1}, \quad \boldsymbol{x^3+x^2+1}$$

(3) x^4+x+1 が 1 次と 3 次の M 多項式の積と合同であるとすると，定数項に注意して (a，b は 0 または 1)

$$\begin{aligned} x^4+x+1 &\equiv (x+1)(x^3+ax^2+bx+1) \\ &= x^4+(a+1)x^3+(a+b)x^2+(b+1)x+1 \end{aligned}$$

上式から　$a+1$ は偶数，　$a+b$ は偶数，　$b+1$ は奇数

これを満たす a，b は存在しない．

x^4+x+1 が 2 つの 2 次の M 多項式の積と合同であるとすると，2 次の M 多項式の一方が可約であるなら，1 次と 3 次の M 多項式の積で表されることになる．したがって，ともに既約な 2 次の M 多項式の積について調べればよい．(1) の結果から

$$(x^2+x+1)^2 \equiv x^4+x^2+1$$

よって，x^4+x+1 は既約である．■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=-ax^2+b\cdots①$，$x^2+y^2=1\cdots②$ から x を消去し整理すると

$$ay^2-y-a+b=0 \quad \cdots(*)$$

この y に関する 2 次方程式 $(*)$ は重解をもつので，係数について

$$(-1)^2-4a(-a+b)=0 \quad \text{すなわち} \quad b=a+\frac{1}{4a}$$

また，方程式 $(*)$ の重解は，係数から

$$y=-\frac{-1}{2a}=\frac{1}{2a} \quad \cdots③$$

このとき，①，② は異なる 2 点で交わるから，a の符号に注意して

$$0<\frac{1}{2a}<1 \quad \text{すなわち} \quad a>\frac{1}{2}$$

③ を ② に代入して，x について解くと　$x=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{4a^2}}$

よって，a，b の条件式および接点の座標は

$$\boldsymbol{a>\frac{1}{2},\ \ b=a+\frac{1}{4a},\ \ \textbf{接点}\left(\pm\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}},\ \frac{1}{2a}\right)}$$

(2) 求める回転体の体積 V は，① より

$$V=\pi\int_0^b x^2\,dy=\frac{\pi}{a}\int_0^b (b-y)\,dx=\frac{\pi}{a}\Big[\,by-\frac{1}{2}y^2\,\Big]_0^b=\frac{b^2\pi}{2a}$$

$$=\frac{\pi}{2a}\left(a+\frac{1}{4a}\right)^2=\boldsymbol{\frac{\pi}{32a^3}(4a^2+1)^2}$$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{dV}{da}&=\frac{\pi}{32}\left\{-\frac{3}{a^4}(4a^2+1)^2+\frac{1}{a^3}\cdot 2(4a^2+1)\cdot 8a\right\}\\&=\frac{\pi}{32a^4}(4a^2+1)\{-3(4a^2+1)+16a^2\}\\&=\frac{\pi}{32a^4}(4a^2+1)(4a^2-3)\end{aligned}$$

V の $a>\dfrac{1}{2}$ における増減表は

a	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$
$\frac{dV}{da}$		$-$	0	$+$
V		$\searrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$	$\nearrow$

よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$ のとき，V は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi}$ をとる． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $t \neq 1$ のとき

$$1+\sum_{k=2}^{n} t^{k-1}=\frac{1-t^n}{1-t}$$

したがって，$x<1$ において

$$\int_0^x \left(1+\sum_{k=2}^{n} t^{k-1}\right) dt=\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{t^n}{k}\right]_0^x=\Big[-\log(1-t)\Big]_0^x-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}=-\log(1-x)-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

よって，$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ とおくと，$x<1$ において，次式が成り立つ．

$$f(x)=-\log(1-x)-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

(2) (i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqq \int_0^x \frac{t^n}{1-\frac{1}{3}}\,dt=\left[\frac{3t^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^x=\frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$$

(ii) $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ において $(x<0)$，$t=-u$ とおくと

$$dt=-du,\qquad \begin{array}{c|c} t & 0 \longrightarrow x \\ \hline u & 0 \longrightarrow |x| \end{array}$$

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt=\int_0^{|x|}\frac{(-u)^n}{1+u}(-du)=(-1)^{n+1}\int_0^{|x|}\frac{u^n}{1+u}\,du$$

したがって

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right|=\int_0^{|x|}\frac{u^n}{1+u}\,du \leqq \int_0^{|x|} u^n\,du=\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

(iii) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，(1) の結果から

$$f(x) + \log(1-x) = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt,$$
$$f(-x) + \log(1+x) = -\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - f(-x) - \log\frac{1+x}{1-x} \right| &= \left| \int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}\,dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \right| \\
&\leqq \left| \int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}\,dt \right| + \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \right| \\
&= \left| \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,(-dt) \right| + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \\
&= \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \\
&= \int_0^x t^n\,dt + \int_0^x \frac{3}{2}t^n\,dt = \frac{5x^{n+1}}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

したがって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，次式が成立する．

$$\left| f(x) - f(-x) - \log\frac{1+x}{1-x} \right| \leqq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)} \qquad \cdots (*)$$

$-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 0$ のとき，$0 \leqq -x \leqq \dfrac{1}{3}$ であるから，$(*)$ により

$$\left| f(-x) - f(-(-x)) - \log\frac{1+(-x)}{1-(-x)} \right| \leqq \frac{5|-x|^{n+1}}{2(n+1)}$$
$$\left| f(x) - f(-x) - \log\frac{1+x}{1-x} \right| \leqq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$$

よって，$|x| \leqq \dfrac{1}{3}$ に対して，$(*)$ は成立する．

(3) $n=3$，$x=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$\frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}=\frac{5}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{5}{648}<\frac{5}{500}=\frac{1}{100}$$

$$f(x)-f(-x)=\sum_{k=1}^{3}\frac{x^k}{k}-\sum_{k=1}^{3}\frac{(-x)^k}{k}=2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$$

$$=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}=\frac{56}{81}$$

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\log\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\log 2$$

これらの結果と $(*)$ により

$$\left|\frac{56}{81}-\log 2\right|<\frac{1}{100}$$

よって，求める分数は　$\boldsymbol{\dfrac{56}{81}}$

補足 実際，$n=4$，$x=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$\frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{486}<\frac{1}{400}$$

$$f(x)-f(-x)=\sum_{k=1}^{4}\frac{x^k}{k}-\sum_{k=1}^{4}\frac{(-x)^k}{k}=2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$$

$$=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}=\frac{56}{81}$$

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\log\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\log 2$$

これらの結果と $(*)$ により　$\left|\dfrac{56}{81}-\log 2\right|<\dfrac{1}{400}$　■

4 (1) $z=\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ$，$\alpha = z+\overline{z}$ より

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= (z+\overline{z})^3 = z^3+\overline{z}^3+3(z+\overline{z})\\ &= (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)+(\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ)+3\alpha\\ &= 1+3\alpha\end{aligned}$$

したがって　　$\alpha^3-3\alpha-1=0$

よって，α は整数を係数とする 3 次方程式 $x^3-3x-1=0$ の解である．

別解 $\alpha = 2\cos 20^\circ$ であるから，3 倍角の公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

において $\theta=20^\circ$ とし，上式に $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$，$\cos\theta = \dfrac{\alpha}{2}$ を代入すると

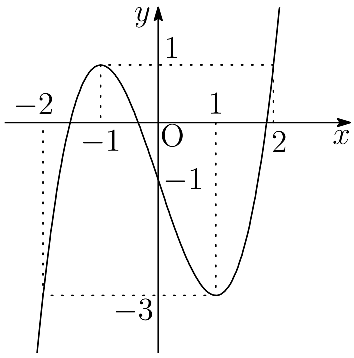
$$\frac{1}{2} = 4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 - 3\cdot\frac{\alpha}{2} \qquad \text{整理すると} \qquad \alpha^3-3\alpha-1=0$$

(2) $f(x)=x^3-3x-1$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 1	↘	極小 -3	↗



$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．

極大値 $f(-1)=1>0$，極小値 $f(1)=-3<0$ であるから，

3 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつ．

次に，有理数 $\dfrac{p}{q}$(p は整数，q は自然数，p と q は互いに素) が 3 次方程式

$$x^3-3x-1=0 \quad \cdots(*)$$

の解であるとすると

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\cdot\frac{p}{q} - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p^3 = q^2(3p+q)$$

p と q は互いに素であるから，$q=1$ となり，このとき

$$p^3-3p-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p^2-3)=1$$

これを満たす整数 p は存在しないから，$(*)$ は，有理数の解をもたない．

補足 グラフから，$(*)$ の解は $-2<x<-1$，$-1<x<0$，$1<x<2$ にあり，
$p^3-3p-1=0$ を満たす整数 p は存在しない．

(3) α を解にもつ有理数を係数とする 2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ が存在すると仮定する．このとき，$f(x)$ を x^2+bx+c で割った商を $x+s$，余りを $tx+u$ とおくと (s，t，u は有理数)．

$$f(x)=(x^2+bx+c)(x+s)+tx+u \quad \cdots ①$$

① に $x=\alpha$ を代入すると　$t\alpha+u=0$　$\cdots$ ②

$t\neq 0$ のとき　　$\alpha=-\dfrac{u}{t}$

このとき，左辺は無理数，右辺は有理数となり，矛盾．

ゆえに，$t=0$ を ② に代入すると，$u=0$．これらを ① に代入すると

$$f(x)=(x^2+bx+c)(x+s)$$

上式より，有理数 $-s$ が方程式 $f(x)=0$ が解となり，(2) の結論に反する．

よって，α を解にもつ有理数を係数とする 2 次方程式は存在しない．

解説 $f(x)=x^3-3x-1$ に $x=2\cos\theta$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(2\cos\theta) &= (2\cos\theta)^3-3\cdot 2\cos\theta-1 \\ &= 2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-1 \\ &= 2\cos 3\theta-1 \end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で $f(2\cos\theta)=0$ を満たす θ は

$$3\theta=60^\circ,\ 300^\circ,\ 420^\circ \quad \text{すなわち} \quad \theta=20^\circ,\ 100^\circ,\ 140^\circ$$

よって，$x^3-3x-1=0$ の解は　$x=2\cos 20^\circ,\ 2\cos 100^\circ,\ 2\cos 140^\circ$

$$\begin{aligned} 2\cos 20^\circ &\fallingdotseq 2\times 0.9397=1.8794 \\ 2\cos 100^\circ &\fallingdotseq 2\times(-0.1736)=-0.3472 \\ 2\cos 140^\circ &\fallingdotseq 2\times(-0.7660)=-1.5320 \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $n=10$，$m=6$ より，$j=n-m+1=10-6+1=5$

j	t	S	
5	4	4	$\leftarrow j=5$，$t=4$，S には t の 4 が入る
6	3	34	$\leftarrow j=j+1$，$t=3$ は S にないから S の先頭
7	6	634	$\leftarrow j=j+1$，$t=6$ は S にないから S の先頭
8	3	6384	$\leftarrow j=j+1$，$t=3$ は S にあるから 3 の直後に j
9	2	26384	$\leftarrow j=j+1$，$t=2$ は S にないから S の先頭
10	5	526384	$\leftarrow j=j+1$，$t=5$ は S にないから S の先頭

よって，S は　**526384**

(2) $n=10$，$m=6$ より，$j=n-m+1=10-6+1=5$
(一番下の段から表を完成していく)

j	t	S	
5	3	3	$\leftarrow j=5$，$t=3$，S には t の 3 が入る
6	5	53	$\leftarrow j=j+1$，$t=5$ は S にないから S の先頭
7	7	753	$\leftarrow j=j+1$，$t=7$ は S にないから S の先頭
8	2	2753	$\leftarrow j=j+1$，$t=2$ は S にないから S の先頭
9	5	27593	$\leftarrow j=j+1$，$t=5$ は S にあるから 5 の直後に j
10	8	827593	$\leftarrow j=j+1$，$t=8$ は S にないから S の先頭

よって，t の列は　$\mathbf{3, 5, 7, 2, 5, 8}$

(3) t の列を T とする．求める算法は

(a) T を空とし，$j=n+1$ とする．

(b) j を 1 減らす

(c) j が S の先頭以外に入っているならば，S の中の j の直前の数を T の先頭に入れ，j を S から除く．そうでないならば，S の先頭の数を T の先頭に移動する．

(d) $j>n-m+1$ ならば，(b) へもどる．
$j \leqq n-m+1$ ならば，終了する．■

6 (1) 3点A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$の座標より$(a, b, c \neq 0)$，
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ であることに注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CP}}) = 0$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(3\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}) = 0$$
$$3|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 - (3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$$

ゆえに $$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6}\right|^2 = \left|\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6}\right|^2 \quad \cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6}$ とおくと

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = \frac{1}{36}(9|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + 4|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2) = \frac{1}{36}(9a^2 + b^2 + 4c^2)$$

①より $|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{QP}}| = \dfrac{\sqrt{9a^2 + b^2 + 4c^2}}{6}$

よって，PはQを中心とする半径 $r = \dfrac{\sqrt{9a^2 + b^2 + 4c^2}}{6}$ の球面上にある．

別解 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CP}}) = 0$ より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(3\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}) = 0$
線分BCを$2:1$に内分する点をDとすると $3\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}$
したがって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(3\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OD}}) = 0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}} = 0$
PはADを直径とする球面上にあり，その中心をQ，半径をrとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}) = \frac{1}{6}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$
$$r^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = \left|\frac{-3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6}\right|^2 = \frac{9a^2 + b^2 + 4c^2}{36}$$

(2) $$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
よって，Qは3点A，B，Cを通る平面上にある．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-a,\ 0,\ c)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = a^2 + b^2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = a^2 + c^2,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = a^2$$

ゆえに $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$
QPが平面ABCに垂直であるとき，四面体ABCPの体積は最大となり，

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot r = \boldsymbol{\frac{1}{36}\sqrt{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(9a^2 + b^2 + 4c^2)}}$$

■

$\boxed{7}$ (1) 苗の高さを確率変数 X で表す．X が $N(10,\ 1.5^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-10}{1.5}$ とおくとき，Z は $N(0,\ 1)$ に従う．苗が間引かれない確率は

$$\begin{aligned}P(7.3 \leqq X \leqq 13.0) &= P\left(\frac{7.3-10}{1.5} \leqq Z \leqq \frac{13.0-10}{1.5}\right)\\ &= P(-1.8 \leqq Z \leqq 2)\\ &= P(-1.8 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 2)\\ &= P(0 \leqq Z \leqq 1.8)+P(0 \leqq Z \leqq 2)\\ &= 0.4641+0.4772=0.9413\end{aligned}$$

よって，苗が間引かれる確率は　$1-0.9413=\mathbf{0.0587}$

(2) 信頼度 95%の m に対する信頼区間が $[9.81,\ 10.79]$ であるから

$$\overline{x}-1.96\times\frac{1.5}{\sqrt{n}}=9.81,\quad \overline{x}+1.96\times\frac{1.5}{\sqrt{n}}=10.79$$

これを解いて　$\boldsymbol{\overline{x}=10.3}$ [cm]，$\boldsymbol{n=36}$

(3) 種子の色を x，咲いた花の色を y とすると

x	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
y	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

このとき

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{10}(8\times1+2\times0)=0.8\\ \overline{x^2} &= \frac{1}{10}(8\times1^2+2\times0^2)=0.8\\ \overline{y} &= \frac{1}{10}(6\times1+4\times0)=0.6\\ \overline{y^2} &= \frac{1}{10}(6\times1^2+4\times0^2)=0.6\\ \overline{xy} &= \frac{1}{10}(6\times1\cdot1+2\times1\cdot0+2\times0\cdot0)=0.6\end{aligned}$$

したがって

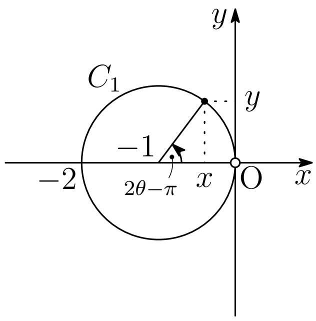
$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sqrt{\overline{x^2}-\overline{x}^2}=\sqrt{0.8-0.8^2}=\sqrt{0.16}=0.4\\ \sigma_y &= \sqrt{\overline{y^2}-\overline{y}^2}=\sqrt{0.6-0.6^2}=\sqrt{0.24}\\ \sigma_{xy} &= \overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}=0.6-0.8\times0.6=0.12\end{aligned}$$

よって，求める相関係数は

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{0.12}{0.4\times\sqrt{0.24}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}\quad(\fallingdotseq \mathbf{0.612})$$

■

$\boxed{8}$ (1) C_1 上の点 $(x,\ y)$ を



$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

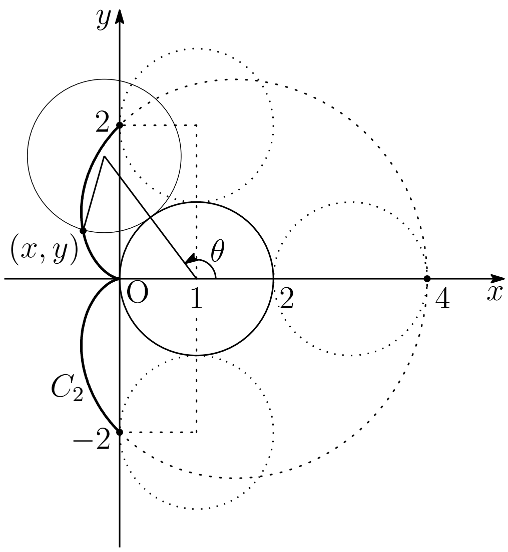
とすると

$$\begin{aligned} x &= 2\cos(\pi+\theta)\cos\theta = -2\cos^2\theta \\ &= -\cos 2\theta - 1 = \cos(2\theta-\pi) - 1 \\ y &= 2\cos(\pi+\theta)\sin\theta = -2\sin\theta\cos\theta \\ &= -\sin 2\theta = \sin(2\theta-\pi) \end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ より，$0 < 2\theta - \pi < 2\pi$ であるから

C_1 は，$(-1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 (原点を除く)．C_1 の概形は右上の図のようになる．

また，C_2 上の点 $(x,\ y)$ を



$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

とすると

$$\begin{aligned} x &= 2(\cos\theta+1)\cos\theta \\ &= 2\cos^2\theta + 2\cos\theta \\ &= 1 + 2\cos\theta + \cos 2\theta \\ y &= 2(\cos\theta+1)\sin\theta \\ &= 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta \\ &= 2\sin\theta + \sin 2\theta \end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ より，C_2 の概形は右の図のようになる．

次に，$C_1 : r = 2\cos(\pi+\theta)$ と $C_2 : r = 2(\cos\theta+1)$ の交点は

$$2\cos(\pi+\theta) = 2(\cos\theta+1) \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ に注意して，これを解くと　$\theta = \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$

よって，交点の極座標は　$\boldsymbol{\left(1,\ \dfrac{2}{3}\pi\right),\ \left(1,\ \dfrac{4\pi}{3}\right)}$

解説 極方程式 $r = a(1+\cos\theta)$ の表す図形をカージオイド (cardioid) という．

(2) $\triangle \mathrm{OEP}_1 \backsim \triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{Q}$ であるから

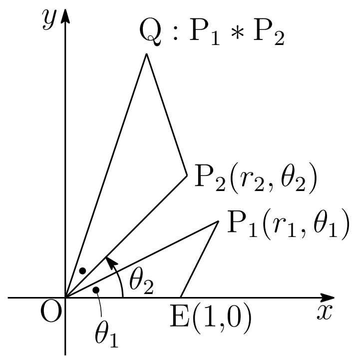
$$\mathrm{OE} : \mathrm{OP}_1 = \mathrm{OP}_2 : \mathrm{OQ}$$

ゆえに　　$1 : r_1 = r_2 : \mathrm{OQ}$

したがって　$\mathrm{OQ} = r_1r_2$

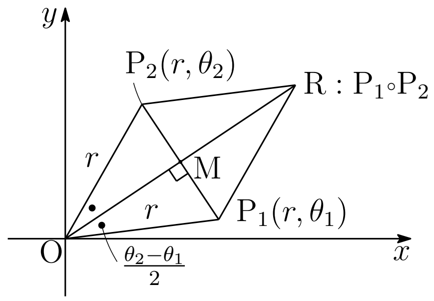
また，Q の偏角は　$\theta_1 + \theta_2$

よって　$\mathbf{P_1 * P_2(\boldsymbol{r_1r_2},\ \boldsymbol{\theta_1+\theta_2})}$



(3) $\mathrm{OP}_1 = \mathrm{OP}_2 = r$ であるから，2 点 P_1，P_2 の中点を M とすると

$$\mathrm{OM} = r\cos\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$
$$\mathrm{OR} = 2\mathrm{OM} = 2r\cos\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$



また，R の偏角は　$\dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$

よって　　$\mathbf{P_1 \circ P_2}\left(\boldsymbol{2r\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2}},\ \boldsymbol{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)$

(4)　i) V が $\left(1,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$ のとき

$$V * V = \left(1\cdot 1,\ \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \left(1,\ \frac{4\pi}{3}\right)$$
$$V\circ(V * V) = \left(2\cdot 1\cos\frac{\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}}{2},\ \frac{\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}}{2}\right) = (1,\ \pi)$$
$$k(V\circ(V * V)) = (k,\ \pi)$$

これが，C_1 上にあるから，(1) の図から　$k = 2$

ii) V が $\left(1,\ \dfrac{4\pi}{3}\right)$ のとき

$$V * V = \left(1\cdot 1,\ \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = \left(1,\ \frac{8\pi}{3}\right)$$
$$V\circ(V * V) = \left(2\cdot 1\cos\frac{\frac{8\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}}{2},\ \frac{\frac{4\pi}{3} + \frac{8\pi}{3}}{2}\right) = (-1,\ 2\pi) = (1,\ \pi)$$
$$k(V\circ(V * V)) = (k,\ \pi)$$

i) と同様に，これが，C_1 上にあるから，(1) の図から　$k = 2$

i),ii) より　$\boldsymbol{k = 2}$　■

$\boxed{9}$ (1) $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，次の行列の第1行の2倍を第3行に加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $\quad \boldsymbol{Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(2) $S=PR=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$

$$=\boldsymbol{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ -2a_1+c_1 & -2a_2+c_2 & -2a_3+c_3 & -2a_4+c_4 \end{pmatrix}}$$

(3) (1) の結果から　$QP=E$

$PAX=PB$ の両辺に左側から Q を掛けると

$$QPAX=QPB \quad ゆえに \quad AX=B$$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

上式の両辺に左側から $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を掛けると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

よって $\quad \boldsymbol{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ -2a+c \end{pmatrix}}$

(5) 拡大係数行列を用いる．第 1 行を $\dfrac{1}{3}$ 倍にすると

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & a \\ -3 & 4 & -5 & b \\ 6 & -5 & 4 & c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{a}{3} \\ -3 & 4 & -5 & b \\ 6 & -5 & 4 & c \end{pmatrix}$$

第 2 行に第 1 行の 3 倍を加え，第 3 行から第 1 行の 6 倍を引き，その第 2 行を $\dfrac{1}{2}$ 倍にすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & 2 & -4 & a+b \\ 0 & -1 & 2 & -2a+c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \\ 0 & -1 & 2 & -2a+c \end{pmatrix}$$

第 1 行に第 2 行の $\dfrac{2}{3}$ 倍を加え，第 3 行に第 2 行を加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+c \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

したがって，(4) で与えられた連立方程式が解を持つための条件は

$$-\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+c=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{c=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b}$$

$z=t$ とおくと (t は任意の実数)，$(*)$ から

$$x-t=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b, \quad y-2t=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$$

よって，このとき，解は

$$\boldsymbol{x=t+\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b,\ \ y=2t+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b,\ \ z=t} \quad (\boldsymbol{t}\ \textbf{は任意の実数})$$

■