平成 11 年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，農学部)

$\boxed{1}$〜$\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$〜$\boxed{6}$ から 1 題選択，$\boxed{7}$〜$\boxed{9}$ から 1 題選択

$\boxed{1}$ m を 2 以上の自然数，e を自然対数の底とする。

(1) 方程式 $xe^x - me^x + m = 0$ をみたす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ。またその値を c とするとき，$m-1 < c < m$ となることを示せ。

(2) $x > 0$ の範囲で $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m}$ は $x = c$ で最小となることを示せ。

(3) a_m を (2) で求められる $f(x)$ の最小値とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{\log a_m}{m \log m}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直線錐の側面上で 2 点 A，B を結ぶ最短の道を ℓ とする。直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし以下の問に答えよ。

(1) 直円錐の展開図をもちいて ℓ の長さを求めよ。

(2) ℓ 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ} = \theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(3) P から線分 OQ に下した垂線を PR とし，A から線分 OQ に下した垂線を AS とする。$0^\circ < \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$ (1) 実数 $k \geqq 0$ に対し，

$$\int_0^{2\pi} \left\{ y\left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2\right) - \left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2\right)^2 \right\} \cos\theta \, d\theta = 2k\pi$$

をみたす xy 平面内の曲線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた曲線と直線 $y = a$ との共有点が 1 個であるような実数 a の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x) = 1 - x^2$ について，次の問に答えよ。

(1) $f(a) = a$ をみたす正の実数 a を求めよ。

(2) a を (1) で求めた実数とする。$x \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば,

$$|f(x) - f(a)| \geqq \frac{\sqrt{5}}{2}|x - a|$$

となることを示せ。

(3) a を (1) で求めた実数とする。$\dfrac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$ として,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ がなりたつならば，$x_1 = a$ であることを示せ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 実数 a，b は $0 < a < b$ をみたすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a + 2b}{3}, \quad \sqrt{ab}, \quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2 + ab + b^2)}{3}}$$

6 次の (1)，(2) では，それぞれ，その目的を実行するための BASIC によるプログラムの始めの部分が与えられている。方針を記述してから，プログラムの残りの部分を完成せよ。ただし，変数 A(1)，A(2) 等には座標 a_1，a_2 等が入力されるものとする。

注意：(1) のプログラムでは配列を表すために DIM 文を使っているが，DIM 文を使わないプログラムを作成してもよい。そのときは，行番号 10 の文は消去し，行番号 20，30 の文は

```
20  INPUT  A1, A2
30  INPUT  P1, P2
```

で置き換えるものとする。(2) についても同様である。

(1) 座標平面上の原点 O と異なる点 A$(a_1,\ a_2)$ について，任意の点 P$(p_1,\ p_2)$ から直線 OA への距離を表示すること。

```
10  DIM    A(2), P(2)
20  INPUT  A(1), A(2)
30  INPUT  P(1), P(2)
```

(2) 点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ を座標平面上の相異なる点とし，直線 AB で平面を二分する。点 P$(p_1,\ p_2)$，Q$(q_1,\ q_2)$ がこの直線の同じ側にあるときは 1 を，異なる側にあるときは -1 を，P，Q の少なくとも一方がこの直線上にあるときは 0 を表示すること。ただし，ある点と直線との距離が，与えられた正数 0.00001 より小さいときはその点は直線上にあるとみなすことにする。

```
10  DIM    A(2), B(2), P(2), Q(2)
20  EPS = 0.00001
30  INPUT  A(1), A(2)
40  INPUT  B(1), B(2)
50  INPUT  P(1), P(2)
60  INPUT  Q(1), Q(2)
```

$\boxed{7}$ A，B の 2 名で次のゲームを行う。A，B はそれぞれ表に 1 から n までの数字がひとつずつ書かれた n 枚のカードを持っている (裏には何も書かれていない)。A は自分のすべてのカードを表を下にしてならべる。B は，A がならべたそれぞれのカードの前に自分のカードを表を上にして 1 枚ずつならべる。次に A のカードを表向きにし，B は数字が一致したカードの枚数だけ得点を得る。確率変数 X を B が 1 回のゲームで得る点数とするとき次の問いに答えよ。

(1) $n=5$ のとき確率 $P(X=2)$ を求めよ。

(2) B のカードのうち数字が 1 のものが一致する確率を p とする。

$$p=\sum_{k=1}^{n} a_k P(X=k)$$

と表すとき，a_k $(k=1,2,3,\cdots,n)$ を求めよ。

(3) 期待値 $E(X)$ を求めよ。

$\boxed{8}$ k を実数として，2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の 2 つの解を α，β $(\alpha \neq \beta)$ とする。i を虚数単位として次の問に答えよ。

(1) $|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2$ の値を k を用いて表せ。

(2) 複素数平面において，複素数 α，β，i を表す点をそれぞれ A，B，P とする。∠APB が直角になるような k の値を求めよ。

$\boxed{9}$ 大きさ 1 の空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2},\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

をみたすように与えらえているとする。また空間ベクトル $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ が

$$\begin{array}{lll} \vec{a}\cdot\vec{d}=1, & \vec{b}\cdot\vec{d}=0, & \vec{c}\cdot\vec{d}=0, \\ \vec{a}\cdot\vec{e}=0, & \vec{b}\cdot\vec{e}=1, & \vec{c}\cdot\vec{e}=0, \\ \vec{a}\cdot\vec{f}=0, & \vec{b}\cdot\vec{f}=0, & \vec{c}\cdot\vec{f}=1 \end{array}$$

をみたすとき，点 D$(\vec{d})$，E$(\vec{e})$，F$(\vec{f})$ および原点 O について次の問に答えよ。

(1) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ となるような実数 x，y，z を求めよ。同様に $\vec{f}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) ベクトル $\vec{d}$，$\vec{f}$，$\vec{d}-\vec{f}$ の大きさを求めよ。

(3) 三角形 ODF の面積を求めよ。

(4) 四面体 ODEF の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $g(x) = xe^x - me^x + m$ とおくと

$$g'(x) = xe^x + e^x - me^x = e^x(x - m + 1)$$

$x \geqq 0$ における $g(x)$ の増減表は (条件より $m-1$ は自然数)

x	(0)	$\cdots$	$m-1$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$

また，$g(m) = m > 0$ であるから，$g(c) = 0$ をみたす正の実数 c は，上の増減表より

$$m - 1 < c < m$$

となる．

(2) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m} = x^{-m}(e^x - 1)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -mx^{-m-1}(e^x - 1) + x^{-m}e^x \\ &= x^{-m-x}\{-m(e^x - 1) + e^x\} = \frac{g(x)}{x^{m+1}} \end{aligned}$$

$x > 0$ において，$f'(x)$ の符号と $g(x)$ の符号が一致する．
したがって，(1) の結果により，$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x = c$ で最小となる．

(3) (2) の結果から最小値 a_m は

$$a_m = f(c) = \frac{e^c - 1}{c^m}$$

$g(c) = 0$ であるから

$$ce^c - me^c + m = 0 \quad \text{ゆえに} \quad e^c - 1 = \frac{ce^c}{m}$$

上の 2 式から　$a_m = \dfrac{1}{c^m} \times \dfrac{ce^c}{m} = \dfrac{e^c}{mc^{m-1}}$

両辺の自然対数をとると

$$\log a_m = c - \log m - (m - 1)\log c$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{\log a_m}{m\log m} &= \frac{c}{m\log m} - \frac{1}{m} - \left(1-\frac{1}{m}\right)\times\frac{\log c}{\log m}\\ &= \frac{c}{m}\cdot\frac{1}{\log m} - \frac{1}{m} - \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{\log\frac{c}{m}}{\log m}\right)\end{aligned}$$

ここで，(1) の結果から　　$1-\dfrac{1}{m} < \dfrac{c}{m} < 1$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m} = 0$ より，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{c}{m} = 1$

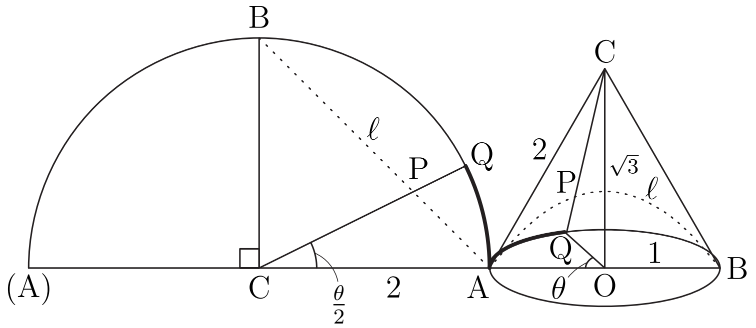
よって　　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{\log a_m}{m\log m} = 1\cdot 0 - 0 - (1-0)(1+0) = \boldsymbol{-1}$

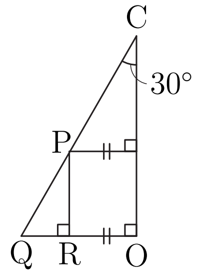
2 (1) 下の図において，$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OC}=\sqrt{3}$ であるから　$\mathrm{AC}=2$

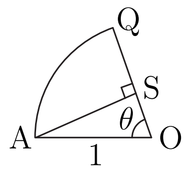
O を中心とする $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中心角は 180° であるから，$\mathrm{OA}:\mathrm{CA}=1:2$ より，

C を中心とする $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中心角は 90° である．

$\triangle$ACB は直角二等辺三角形であるから　　$\ell=\sqrt{2}\mathrm{AC}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$







(2) O を中心とする $\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}$ の中心角は θ であるから，$\mathrm{OA}:\mathrm{CA}=1:2$ より，

C を中心とする $\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}$ の中心角は $\dfrac{\theta}{2}$ である．

$\triangle$CAP において，$\angle\mathrm{PCA}=\dfrac{\theta}{2}$，$\angle\mathrm{CAP}=45^\circ$ であるから

$$\angle\mathrm{APC}=180^\circ-\left(\frac{\theta}{2}+45^\circ\right)=135^\circ-\frac{\theta}{2}$$

$\triangle$CAP に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{CP}}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin\left(135^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}$$

したがって　　$\mathrm{CP}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ\cos\frac{\theta}{2}-\cos 135^\circ\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2}{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}$

よって　　$\mathrm{CP}^2=\dfrac{4}{1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{1+\sin\theta}}$

(3) $\mathrm{OR} = \mathrm{CP}\sin 30^\circ$ であるから，(2) の結果から

$$\mathrm{OR}^2 = \mathrm{CP}^2\sin^2 30^\circ = \frac{4}{1+\sin\theta} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{1+\sin\theta}$$

また　$\mathrm{OS} = \mathrm{OA}\cos\theta = 1\cos\theta = \cos\theta$

したがって　$\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2} = \cos^2\theta(1+\sin\theta) = (1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$

$0^\circ < \theta \leqq 90^\circ$ より，$t = \sin\theta$，$f(t) = \dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ とおくと，

$$f(t) = (1-t^2)(1+t) = -t^3 - t^2 + t + 1 \qquad (0 < t \leqq 1)$$

ゆえに　$f'(t) = -3t^2 - 2t + 1 = -(t+1)(3t-1)$

$f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	

よって，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{32}{27}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left\{ y\left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2\right) - \left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2\right)^2 \right\} \cos\theta\, d\theta$ とおくと

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}y^2 \cos\theta\, d\theta - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y + x\cos\theta\right)^2 \cos\theta\, d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y + x\cos\theta\right)^2 \cos\theta\, d\theta \\
&= -\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y + x\cos\theta\right)^2 \cos\theta\, d\theta \\
&\qquad\qquad - \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y + x\cos\theta\right)^2 \cos\theta\, d\theta \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

上の第 2 項について，$\theta = t + \pi$ とおくと，$d\theta = dt$

θ	$\pi \longrightarrow 2\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y + x\cos\theta\right)^2 \cos\theta\, d\theta \\
&= -\int_0^{\pi} \left\{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y + x\cos(t+\pi)\right\}^2 \cos(t+\pi)\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y - x\cos t\right)^2 \cos t\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y - x\cos\theta\right)^2 \cos\theta\, d\theta \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

② を ① に代入すると

$$
\begin{aligned}
I &= -\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y + x\cos\theta\right)^2 \cos\theta\, d\theta \\
&\qquad\qquad + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y - x\cos\theta\right)^2 \cos\theta\, d\theta \\
&= -2x(x^2 - y)\int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= -x(x^2 - y)\int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = -x(x^2 - y)\pi
\end{aligned}
$$

$I = 2k\pi$ であるから

$$
-x(x^2 - y)\pi = 2k\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x(y - x^2) = 2k}
$$

別解 $I=-\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y+x\cos\theta\right)^2\cos\theta\,d\theta$ より

$$I=-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y\right)^2\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta$$
$$-x(x^2-y)\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta-x^2\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta$$

ここで

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\Big]_0^{2\pi}=0$$
$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\pi$$
$$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\cos\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta=\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{2\pi}=0$$

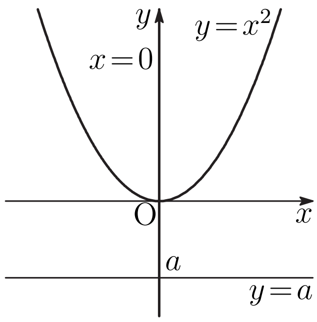
したがって　$I=-x(x^2-y)\pi$

(2)　i) $k=0$ のとき，(1) で求めた曲線は

$$x=0 \quad または \quad y=x^2$$

右のグラフから，この曲線と $y=a$ の共有点が 1 個であるのは

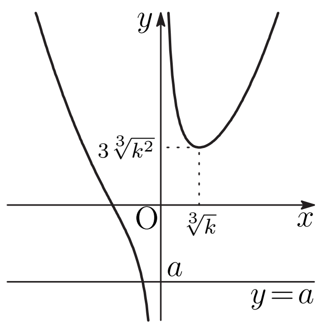
$$a\leqq 0$$



ii) $k>0$ のとき，(1) の結果から，$x\neq 0$ であることに注意して

$$y=x^2+\frac{2k}{x}$$

ゆえに　$y'=2x-\frac{2k}{x^2}=\frac{2(x^3-k)}{x^2}$



よって，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\sqrt[3]{k}$	$\cdots$
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	$\searrow$		$\searrow$	極小 $3\sqrt[3]{k^2}$	$\nearrow$

$\lim_{x\to-\infty}y=\infty$,　$\lim_{x\to-0}y=-\infty$,
$\lim_{x\to 0}y=\infty$,　$\lim_{x\to\infty}y=\infty$

この曲線と $y=a$ の共有点が 1 個であるのは　$a<3\sqrt[3]{k^2}$

i)，ii) より　**$k=0$ のとき $a\leqq 0$,**
$k>0$ のとき $a<3\sqrt[3]{k^2}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 関数 $f(x)=1-x^2$ について，$f(a)=a$ であるとき

$$1-a^2=a \quad \text{すなわち} \quad a^2+a-1=0$$

$a>0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

(2) $f(x)-f(a)=(1-x^2)-(1-a^2)=-(x^2-a^2)=-(x+a)(x-a)$

したがって　$|f(x)-f(a)|=|x+a||x-a| \quad \cdots①$

$x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき　$x+a \geqq \dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

このとき　$|x+a| \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2} \quad \cdots②$

①，② より　$|f(x)-f(a)| \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$

補足 $f(x)=px^2+qx+r$ とすると，任意の実数 a に対して，次式が成り立つ．

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+p(x-a)^2$$

$f(x)=1-x^2$ のとき，$f'(x)=-2x$ より

$$f(x)=f(a)-2a(x-a)-(x-a)^2$$

したがって　$f(x)-f(a)=-2a(x-a)-(x-a)^2=-(x+a)(x-a)$

(3) すべての n に対して $\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ が成り立つならば，(2) の結果から

$$|f(x_n)-f(a)| \geqq \frac{\sqrt{5}}{2}|x_n-a| \quad \text{すなわち} \quad |x_{n+1}-a| \geqq \frac{\sqrt{5}}{2}|x_n-a|$$

したがって　$|x_n-a| \geqq \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}|x_1-a|$

$x_1 \neq a$ と仮定すると，上式から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|x_n-a|=\infty$

これは，すべての n に対して，$\dfrac{1}{2}<x_n<1$ であることに反する．

よって　$x_1=a$

$\boxed{\mathbf{5}}$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3-\left(\frac{a+2b}{3}\right)^3$$
$$=\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}-\frac{a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3}{27}$$
$$=\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{27}=\frac{(b-a)^3}{27}>0\quad(b-a>0)$$

次に $\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\dfrac{a^2+4ab+4b^2}{9}-ab$

$$=\frac{4b^2-5ab+a^2}{9}$$
$$=\frac{(b-a)(4b-a)}{9}>0\quad(b-a>0,\ 4b-a>0)$$

$\dfrac{a+2b}{3}>0$，$\sqrt{ab}>0$，$\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}>0$ であるから

$$\boldsymbol{\sqrt{ab}<\frac{a+2b}{3}<\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}}$$

補足 $a=1$，$b=4$ とすると，次の値から結果が推測できる．

$$\frac{a+2b}{3}=3,\quad \sqrt{ab}=2,\quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}=\sqrt[3]{28}>3$$

また，$x=\dfrac{b}{a}$ とおくと $(x>1)$

$$\frac{a+2b}{3}=\frac{a(1+2x)}{3},\quad \sqrt{ab}=a\sqrt{x},\quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}=a\sqrt[3]{\frac{x+x^2+x^3}{3}}$$

したがって，$x>1$ のとき，次の大小関係を求めてもよい．

$$\frac{1+2x}{3},\quad \sqrt{x},\quad \sqrt[3]{\frac{x+x^2+x^3}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1)

```
10  DIM A(2),P(2)
20  INPUT "A(1)=";A(1)
30  INPUT "A(2)=";A(2)
40  INPUT "P(1)=";P(1)
50  INPUT "P(2)=";P(2)
60  PRINT (ABS(A(2)*P(1)-A(1)*P(2)))/SQR(A(1)^2+A(2)^2)
70  END
```

解説 原点 O と点 $A(a_1,\ a_2)$ を通る直線は $a_2x - a_1y = 0$．点 $P(p_1,\ p_2)$ とこの直線の距離は

$$\frac{|a_2p_1 - a_1p_2|}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$$

(2)

```
10  DIM A(2),B(2),P(2),Q(2),DF(2)
20  DD=0.00001
30  INPUT "A(1)=";A(1)
40  INPUT "A(2)=";A(2)
50  INPUT "B(1)=";B(1)
60  INPUT "B(2)=";B(2)
70  INPUT "P(1)=";P(1)
80  INPUT "P(2)=";P(2)
90  INPUT "Q(1)=";Q(1)
100 INPUT "Q(2)=";Q(2)
110 SS=SQR((B(1)-A(1))^2+(B(2)-A(2))^2)
120 DF(1)=(B(2)-A(2))*P(1)-(B(1)-A(1))*P(2)-A(1)*B(2)+A(2)*B(1)
130 DF(2)=(B(2)-A(2))*Q(1)-(B(1)-A(1))*Q(2)-A(1)*B(2)+A(2)*B(1)
140 IF ABS(DF(1)/SS) < DD THEN DF(1)=0
150 IF ABS(DF(2)/SS) < DD THEN DF(2)=0
160 IF DF(1)*DF(2) > 0 THEN PRINT"1"
170 IF DF(1)*DF(2) < 0 THEN PRINT"-1"
180 IF DF(1)*DF(2)=0 THEN PRINT"0"
190 END
```

解説 2 点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ を通る直線の方程式は

$$(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y - a_1b_2 + a_2b_1 = 0$$

点 $P(p_1,\ p_2)$ とこの直線の距離は

$$\frac{|(b_2 - a_2)p_1 - (b_1 - a_1)p_2 - a_1b_2 + a_2b_1|}{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 3 個の完全順列の総数を M_3 とすると　$M_3 = 2$

したがって　$P(X=2) = \dfrac{{}_5\mathrm{C}_2 \times M_3}{5!} = \dfrac{10 \times 2}{120} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

補足 $0 \leqq k \leqq 5$ のとき　$P(X=k) = \dfrac{{}_5\mathrm{C}_k \times M_{5-k}}{5!}$

なお　$M_0 = 1,\ M_1 = 0,\ M_2 = 1,\ M_3 = 2,\ M_4 = 9,\ M_5 = 44$ (後述)

(2) B のカードのうち数字が 1 のものが一致する条件付き確率を $P_1(X=k)$, $n-k$ 個の完全順列の総数を M_{n-k} とすると

$$P_1(X=k) = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \cdot M_{n-k}}{n!} = \frac{k}{n} \times \frac{{}_n\mathrm{C}_k \cdot M_{n-k}}{n!} = \frac{k}{n} \times P(X=k)$$

よって　$\boldsymbol{a_k = \dfrac{k}{n}}$

(3) B のカードのうち数字が 1 のものが一致する確率 p は

$$p = \frac{1 \times (n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

(2) の結果から　$p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot P(X=k)$

上の 2 式から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot P(X=k) = \frac{1}{n}$

よって　$E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \mathbf{1}$

別解 (2) の計算により　$kP(X=k) = \dfrac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \cdot M_{n-k}}{(n-1)!}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \cdot M_{n-k}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k} \cdot M_{n-1-k}}{(n-1)!} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

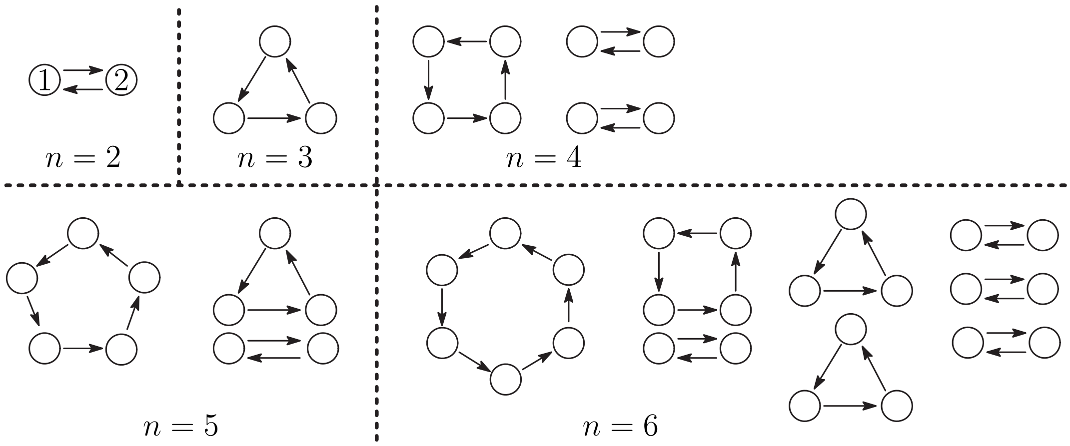
モンモール数

n 個の整数 $1, 2, 3, \cdots, n$ を要素とする順列において，i 番目 $(1 \leqq i \leqq n)$ が i でない順列を**完全順列**という．

完全順列の総数を**モンモール数** (Montmort number) という．n 個の要素の完全順列の総数を M_n で表すことにする．

例えば，n 人が各自 1 個ずつプレゼントを持ち寄り，プレゼントの交換会を行うとき (全員が交換)，プレゼントの交換方法の総数が M_n に等しい．

モンモール数は，次の図に示したループにより求めることもできる．



まず，$M_1 = 0$，$M_2 = 1$ は明らか．$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について

$$
\begin{aligned}
M_3 &= 2! = 2, \\
M_4 &= 3! + \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!} = 9, \\
M_5 &= 4! + {}_5\mathrm{C}_3 \times 2! = 44, \\
M_6 &= 5! + {}_6\mathrm{C}_4 \times 3! + \frac{{}_6\mathrm{C}_3 \times 2! \times 2!}{2!} + \frac{{}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2}{3!} = 265
\end{aligned}
$$

n 個の整数 $1, 2, \ldots, n$ の完全順列の総数 M_n を，上の図で示したループを用いて考える．あるループの中で i $(1 \leqq i \leqq n-1)$ に n が続くとする．このとき，次の場合分けができる．

(i) i と n が互換でないとき (i と n を含むループが 3 個以上で構成)，i と n を同一視することにより，$n-1$ 個の完全順列の総数 M_{n-1} に等しい．

(ii) i と n が互換であるとき (i と n を含むループが 2 個で構成)，i と n を除く残りの $n-2$ 個の完全順列の総数 M_{n-2} に等しい．

(i)，(ii) から次の漸化式が成立する．

$$M_n = (n-1)(M_{n-1} + M_{n-2}) \quad \cdots (*)$$

$M_1 = 0$，$M_2 = 1$ であるから，$(*)$ より，順次以下の結果を得る．

$$\begin{aligned} &M_1 = 0,\ M_2 = 1,\ M_3 = 2,\ M_4 = 9,\ M_5 = 44,\ M_6 = 265, \\ &M_7 = 1854,\ M_8 = 14833,\ M_9 = 133496, \cdots \end{aligned}$$

$(*)$ に $n = 2$ を代入すると　$M_2 = M_1 + M_0$

これから便宜的に $M_0 = 1$ とすることがある．また，$(*)$ より

$$\begin{aligned} M_k - kM_{k-1} &= -\{M_{k-1} - (k-1)M_{k-2}\} \\ &= (-1)^{k-2}(M_2 - 2M_1) = (-1)^{k-2} \end{aligned}$$

ゆえに　$$\frac{M_k}{k!} - \frac{M_{k-1}}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

したがって　$$\sum_{k=2}^{n} \left\{ \frac{M_k}{k!} - \frac{M_{k-1}}{(k-1)!} \right\} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\frac{M_n}{n!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$M_0 = 1$，$M_1 = 0$ であるから，$n \geqq 0$ について，次式が成立する．

$$M_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

n 人が各自 1 個ずつプレゼントを持ち寄り，くじ引きでプレゼント交換を行うとき，全員が交換する確率は

$$\frac{M_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

とくに　$$\lim_{n \to \infty} \frac{M_n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

上の結果から，このくじ引きによるプレゼント交換会において，n がいくら大きくてもプレゼントが交換できない人がいる確率は

$$1 - \frac{1}{e} \fallingdotseq 0.632 \cdots$$

$\boxed{8}$ (1) 解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-2k, \quad \alpha\beta=3k$$

2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の判別式を D とすると

$$D/4=k^2-3k=k(k-3)$$

i) $D>0$，すなわち $k<0,\ 3<k$ のとき，α，β は実数であるから

$$\begin{aligned}|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2 &= (\alpha-i)(\overline{\alpha-i})+(\beta-i)(\overline{\beta-i}) \\ &= (\alpha-i)(\alpha+i)+(\beta-i)(\beta+i) \\ &= \alpha^2+\beta^2+2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2 \\ &= (-2k)^2-2{\cdot}3k+2=\boldsymbol{4k^2-6k+2}\end{aligned}$$

ii) $D<0$，すなわち $0<k<3$ のとき，α と β は共役複素数であるから

$$\begin{aligned}|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2 &= (\alpha-i)(\overline{\alpha-i})+(\beta-i)(\overline{\beta-i}) \\ &= (\alpha-i)(\beta+i)+(\beta-i)(\alpha+i) \\ &= 2\alpha\beta+2=2{\cdot}3k+2=\boldsymbol{6k+2}\end{aligned}$$

(2) $\angle\mathrm{APB}$ が直角であるとき

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=\mathrm{AB}^2 \quad \text{すなわち} \quad |\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=|\beta-\alpha|^2 \quad \cdots ①$$

(i) $k<0,\ 3<k$ のとき，α，β は実数であるから

$$\begin{aligned}|\beta-\alpha|^2 &= (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= (-2k)^2-4{\cdot}3k=4k^2-12k\end{aligned}$$

(1) の結果および上式を ① に代入すると

$$4k^2-6k+2=4k^2-12k \quad \text{ゆえに} \quad 6k+2=0$$

k の値の範囲に注意してこれを解くと　　$k=-\dfrac{1}{3}$

(ii) $0 < k < 3$ のとき，$\overline{\alpha} = \beta$，$\overline{\beta} = \alpha$ であるから

$$\begin{aligned}|\beta - \alpha|^2 &= (\beta - \alpha)(\overline{\beta - \alpha}) = (\beta - \alpha)(\alpha - \beta)\\ &= -(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta = -(-2k)^2 + 4\cdot 3k = -4k^2 + 12k\end{aligned}$$

(1) の結果および上式を ① に代入すると

$$6k + 2 = -4k^2 + 12k \quad \text{ゆえに} \quad (k-1)(2k-1) = 0$$

k の値の範囲に注意してこれを解くと　　$k = \dfrac{1}{2},\ 1$

よって　　$\boldsymbol{k = -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2},\ 1}$

別解 $\angle$APB が直角であるとき，$\dfrac{\beta - i}{\alpha - i}$ は純虚数である．

(i) $k < 0,\ 3 < k$ のとき，α，β は実数であるから

$$\frac{\beta - i}{\alpha - i} = \frac{(\beta - i)(\alpha + i)}{(\alpha - i)(\alpha + i)} = \frac{\alpha\beta + (\beta - \alpha)i + 1}{\alpha^2 + 1} = \frac{3k + 1 + (\beta - \alpha)i}{\alpha^2 + 1}$$

このとき　　$3k + 1 = 0$

k の値の範囲に注意してこれを解くと　$k = -\dfrac{1}{3}$

(ii) $0 < k < 3$ のとき，$\overline{\alpha} = \beta$，$\overline{\beta} = \alpha$ であるから

$$\frac{\beta - i}{\alpha - i} = \frac{(\beta - i)(\overline{\alpha - i})}{(\alpha - i)(\overline{\alpha - i})} = \frac{(\beta - i)(\beta + i)}{|\alpha - i|^2} = \frac{\beta^2 + 1}{|\alpha - i|^2}$$

β は方程式 $x^2 + 2kx + 3k = 0$ の解であるから

$$\beta^2 + 1 = -2k\beta - 3k + 1, \quad \beta = -k \pm \sqrt{3k - k^2}\, i$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}\beta^2 + 1 &= -2k(-k \pm \sqrt{3k - k^2}\, i) - 3k + 1\\ &= 2k^2 - 3k + 1 \mp 2k\sqrt{3k - k^2}\, i\end{aligned}$$

このとき　　$2k^2 - 3k + 1 = 0$

k の値の範囲に注意してこれを解くと　$k = \dfrac{1}{2},\ 1$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ を $\vec{a}\cdot\vec{d}=1$，$\vec{b}\cdot\vec{d}=0$，$\vec{c}\cdot\vec{d}=0$ にそれぞれ代入すると

$$x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}+z\vec{a}\cdot\vec{c}=1,$$
$$x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2+z\vec{b}\cdot\vec{c}=0,$$
$$x\vec{a}\cdot\vec{c}+y\vec{b}\cdot\vec{c}+z|\vec{c}|^2=0$$

上の 3 式に $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ を代入すると

$$x-\frac{1}{2}y=1,\quad -\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}z=0,\quad -\frac{1}{2}y+z=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2},\ y=1,\ z=\dfrac{1}{2}}$

同様に，$\vec{f}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおき，これを $\vec{a}\cdot\vec{f}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{f}=0$，$\vec{c}\cdot\vec{f}=1$ にそれぞれ代入すると

$$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{a}\cdot\vec{c}=0,$$
$$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2+u\vec{b}\cdot\vec{c}=0,$$
$$s\vec{a}\cdot\vec{c}+t\vec{b}\cdot\vec{c}+u|\vec{c}|^2=1$$

上の 3 式に $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ を代入すると

$$s-\frac{1}{2}t=0,\quad -\frac{1}{2}s+t-\frac{1}{2}u=0,\quad -\frac{1}{2}t+u=1$$

これを解いて　$s=\dfrac{1}{2}$，$t=1$，$u=\dfrac{3}{2}$　よって　$\boldsymbol{\vec{f}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}|\vec{d}|^2&=\left|\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right|^2\\&=\frac{9}{4}|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=\frac{9}{4}+1+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\|\vec{f}|^2&=\left|\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}\right|^2\\&=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\frac{9}{4}|\vec{c}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

したがって　　$\boldsymbol{|\vec{d}|=|\vec{f}|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

また　　$\vec{d}-\vec{f}=\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}\right)=\vec{a}-\vec{c}$

したがって　　$|\vec{d}-\vec{f}|^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=1+1=2$

よって　　$\boldsymbol{|\vec{d}-\vec{f}|=\sqrt{2}}$

(3) (2) の結果から

$$\vec{d}\cdot\vec{f}=\frac{1}{2}(|\vec{d}|^2+|\vec{f}|^2-|\vec{d}-\vec{f}|^2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-(\sqrt{2})^2\right\}=\frac{1}{2}$$

よって　$\triangle\mathrm{ODF}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{d}|^2|\vec{f}|^2-(\vec{d}\cdot\vec{f})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

別解 (2) の結果より，$\triangle$ODF は OD $=$ OF の二等辺三角形であるから，DF の中点を M とすると

$$\mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{OD}^2-\left(\frac{\mathrm{DF}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=1$$

よって　　$\triangle\mathrm{ODF}=\frac{1}{2}\mathrm{DF}\cdot\mathrm{OM}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{d}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\vec{d}-\vec{f}=\vec{a}-\vec{c}$ であるから

$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0,\quad \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

したがって，$\vec{b}$ は平面 ODF と垂直である．

また，$\vec{e}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ とおき，これを $\vec{a}\cdot\vec{e}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{e}=1$，$\vec{c}\cdot\vec{e}=0$ にそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}\alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b}+\gamma\vec{a}\cdot\vec{c}&=0,\\ \alpha\vec{a}\cdot\vec{b}+\beta|\vec{b}|^2+\gamma\vec{b}\cdot\vec{c}&=0,\\ \alpha\vec{a}\cdot\vec{c}+\beta\vec{b}\cdot\vec{c}+\gamma|\vec{c}|^2&=1\end{aligned}$$

上の 3 式に $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ を代入すると

$$\alpha-\frac{1}{2}\beta=0,\quad -\frac{1}{2}\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma=1,\quad -\frac{1}{2}\beta+\gamma=0$$

これを解いて　$\alpha=1$，$\beta=2$，$\gamma=1$　よって　$\vec{e}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$

また　$\vec{b}\cdot\vec{e} = \vec{b}\cdot(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + 2|\vec{b}|^2 + \vec{b}\cdot\vec{c} = -\dfrac{1}{2} + 2 - \dfrac{1}{2} = 1$

E から平面 ODF に下ろした垂線の長さを h とすると　$h = |\vec{b}\cdot\vec{e}| = 1$

したがって，求める体積を V とすると，(3) の結果により

$$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ODF}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{6}}$$

解説 $X = (\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\ )$，$Y = (\ \vec{d}\ \ \vec{e}\ \ \vec{f}\ )$，$A = {}^tXX$ とおくと (E は単位行列)

$$A = {}^tXX = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},\quad {}^tXY = {}^tYX = E$$

したがって　$Y = ({}^tX)^{-1} = ({}^tXXX^{-1})^{-1} = X({}^tXX)^{-1} = XA^{-1}$

すなわち　$(\ \vec{d}\ \ \vec{e}\ \ \vec{f}\ ) = (\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\ )\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

よって　$\vec{d} = \dfrac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\vec{e} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$

$\vec{f} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{3}{2}\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ より，$\vec{h} = \vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{c}$ とおくと，$\vec{h}\cdot\vec{a} = \vec{h}\cdot\vec{c} = 0$

ゆえに　$\vec{h} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$，$|\vec{h}| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

したがって　$|\det(\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\ )| = |\det(\ \vec{a}\ \ \vec{h}\ \ \vec{c}\ )| = |\vec{a}||\vec{h}||\vec{c}| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

また，$\det(A^{-1}) = 2$ により

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}|\det(\ \vec{d}\ \ \vec{e}\ \ \vec{f}\ )| \\ &= \frac{1}{6}|\det(\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\ )||\det(A^{-1})| \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$