平成10年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)150分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，農学部)

$\boxed{1}$〜$\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$〜$\boxed{6}$ から１題選択，$\boxed{7}$〜$\boxed{10}$ から１題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，$F(x) = e^x f(x)$ とおく。(e は自然対数の底)

(1) 定数関数でない関数 $f(x)$ で

　条件 (A)「すべての x に対して $f(x+1) = f(x)$ である」

をみたすものの例をあげよ。

(2) 関数 $f(x)$ が

　条件 (B)「すべての x に対して $f'(x) + f(x) \leqq 0$ である」

をみたすとき，$a < b$ ならば $F(a) \geqq F(b)$ であることを示せ。

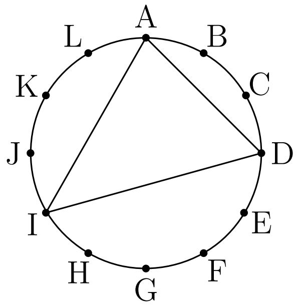
(3) 関数 $f(x)$ が (1) の条件 (A) をみたすとき，$F(x+n)$ (ただし，n は正の整数) を $F(x)$ を用いて表せ。

(4) 関数 $f(x)$ が (1)，(2) の条件 (A)，(B) をともにみたすとする。

① $f(c) \geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c) = 0$ であることを示せ。

② ある c で $f(c) = 0$ であれば，すべての x で $f(x) = 0$ となることを示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 右図のように円周を12等分する点A，B，C，D，E，F，G，H，I，J，K，Lが与えられている。これらの中から相異なる3点を選んで線分で結ぶと三角形がえられる。たとえば，A，D，Iを選べば，図のような三角形がえられる。このとき，次の問に答えよ。



(1) 正三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。

(2) 二等辺三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。

(3) 直角三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。

(4) 3点を選んでえられる三角形のうち，互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

3 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて

$$x = \sin t - t\cos t, \quad y = \cos t + t\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で与えられている。

(1) 曲線 C の長さを求めよ。

(2) 曲線 C 上の各点 P において，P における接線と P で直交する直線を考える。この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は，P を動かすときどんな図形を描くか。

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt$ を求めよ。

(4) 曲線 C と y 軸および直線 $y = -1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

4 (1) $x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。

(2) ① 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|} + \dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ。

② ① の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。

5 (1) 自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

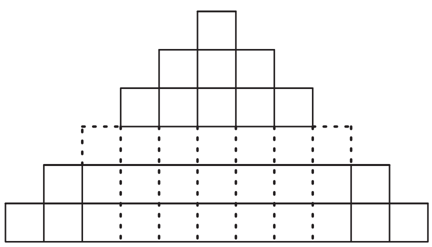
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2) 辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

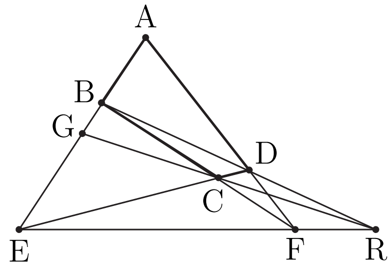
① $m = 2, 3, 4$ のとき，どのようにタイル張りすれば良いか図示せよ。

② 一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し，その式が成り立つ理由を述べよ。

(3) 辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して，すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき右図のように見えたという。ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。



6 右図のような四角形 ABCD において，直線 AB と直線 CD の交点 E，直線 BC と直線 AD の交点 F，直線 BD と直線 EF の交点 R，直線 RC と直線 AB の交点 G がえられたとする。



(1) $\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}$ が成り立つことを示せ。

(2) G が AE の中点で，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}=2$ であるとき，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{CD}=b$ とおく。次の条件を満たす x，y，z の値を求めよ。

① $\mathrm{EB}=xa$

② $\mathrm{EC}=yb$

③ 四角形 ABCD が円に内接するとき，$a=zb$

7 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする。(ただし，m, $n>0$ とする。)

(1) ① $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

② $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が垂直かどうか調べよ。

(2) ① 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるときの m，n の関係式を求めよ。

② このとき PQ，RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

③ G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。

8 k を実数とするとき，方程式

$$x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$$

の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点と見なす。

(1) z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ。

(2) z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ。

(3) 3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転してえられる 3 点を w_1，w_2，w_3 とする。w_1，w_2，w_3 およびそれらと共役な点 $\overline{w_1}$，$\overline{w_2}$，$\overline{w_3}$ とが原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ の値を求めよ。

9 3桁の自然数 $N=100a+10b+c$（a，b，c は，$1 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$，$0 \leqq c \leqq 9$ を満たす整数）を考える。

(1) 平方数かつ奇数である N で，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と接するようなものをすべて求めよ。

(2) 命題「N および a が平方数のとき2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と接する。」は正しいか。正しければそれを示し，正しくなければ反例をあげよ。

(3) ある N について，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは座標が整数である相異なる2点で x 軸と交わり，グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が4となる。このときの N を求めよ。

10 (1) 平面上に半径が R，r $(R>r)$ の2円があり，それらの中心間の距離が l であるとする。これらの2円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R，r，l を用いて表せ。

(2) 座標平面上で x 軸を準線とし，定点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通る放物線について考える。ただし，$a>0$ とする。

① そのような放物線の焦点 $\mathrm{F}(s,\ t)$ の全体はどのような図形を描くか。

② x 軸上にない点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\boldsymbol{f(x) = \sin 2\pi x}$ $\quad (f(x) = \cos 2\pi x$，$f(x) = \tan \pi x$ などもよい)

(2) $F(x) = e^x f(x)$ を微分すると，条件 (B) により

$$F'(x) = e^x\{f'(x) + f(x)\} \leqq 0$$

$F(x)$ は単調減少であるから　$a < b$ ならば　$F(a) \geqq F(b)$

(3) 条件 (A) により，$f(x)$ は周期 1 の周期関数である．

したがって，整数 n に対して　$f(x+n) = f(x)$

よって　$F(x+n) = e^{x+n}f(x+n) = e^n e^x f(x) = \boldsymbol{e^n F(x)}$

(4) ① $F(x)$ は単調減少であるから　$F(c+1) \leqq F(c)$

(3) の結果より，$F(c+1) = eF(c)$ であるから

$$eF(c) \leqq F(c) \quad ゆえに \quad (e-1)F(c) \leqq 0 \quad すなわち \quad F(c) \leqq 0$$

$F(c) = e^c f(c)$ であるから

$$e^c f(c) \leqq 0 \quad ゆえに \quad f(c) \leqq 0$$

したがって，$f(c) \geqq 0$ のとき　$f(c) = 0$

② 任意の x に対して，$x \leqq c+n$ を満たす自然数 n がとれる．

$F(x)$ は単調減少，$f(x)$ は周期 1 の周期関数であるから

$$F(x) \geqq F(c+n) = e^{c+n}f(c+n) = e^{c+n}f(c) = 0$$

ゆえに　$e^x f(x) \geqq 0$　すなわち　$f(x) \geqq 0$

したがって，① の結果より　$f(x) = 0$

別解 任意の x に対して，次式を満たす自然数 n がとれる．

$$c - n \leqq x \leqq c + n \quad \cdots(*)$$

$f(x)$ は周期 1 の周期関数であるから，$f(c) = 0$ のとき

$$F(c-n) = e^{c-n}f(c-n) = e^{c-n}f(c) = 0$$
$$F(c+n) = e^{c+n}f(c+n) = e^{c+n}f(c) = 0$$

$F(x)$ は単調減少であるから，$(*)$ の x に対して

$$F(x) = 0 \quad ゆえに \quad e^x f(x) = 0 \quad よって \quad f(x) = 0$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 正三角形は，$\triangle$AEI，$\triangle$BFJ，$\triangle$CGK，$\triangle$DHL の **4 通り**.

(2) $\angle$A を頂角とする二等辺三角形で正三角形以外のものは 4 通り.
$\angle$B から $\angle$L までの頂角についても同様である.
したがって，これらと (1) の結果を含めて

$$4 \times 12 + 4 = \mathbf{52} \quad (\text{通り})$$

(3) 直角三角形となるのは，1 辺が円の直径の場合である.
したがって，直径の選び方は 6 通りあり，その各々に対して頂点の取り方が 10 通りであるから

$$6 \times 10 = \mathbf{60} \quad (\text{通り})$$

(4) 円周を 12 等分した円弧を含む個数により，合同でない三角形を分類できる．3 頂点間の円弧の個数を x，y，z とすると

$$x + y + z = 12, \quad 1 \leqq x \leqq y \leqq z$$

を満たす整数 $(x,\ y,\ z)$ の組数であるから，次の **12 通り**.

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) =&(1,\ 1,\ 10),\ (1,\ 2,\ 9),\ (1,\ 3,\ 8),\ (1,\ 4,\ 7),\ (1,\ 5,\ 6),\\ &(2,\ 2,\ 8),\ (2,\ 3,\ 7),\ (2,\ 4,\ 6),\ (2,\ 5,\ 5),\\ &(3,\ 3,\ 6),\ (3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 4,\ 4)\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x=\sin t-t\cos t$，$y=\cos t+t\sin t$ より

$$\frac{dx}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$$
$$\frac{dy}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$$

曲線 C の長さは

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{(t\sin t)^2+(t\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\pi}t\,dt=\left[\,\frac{t^2}{2}\,\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}$$

(2) $\mathrm{P}(\sin t-t\cos t,\ \cos t+t\sin t)$ における接線の方向ベクトルは

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(t\sin t,\ t\cos t)$$

したがって，P における接線と P で直交する直線の方程式は，$t\neq 0$ のとき

$$t\sin t\{x-(\sin t-t\cos t)\}+t\cos t\{y-(\cos t+t\sin t)\}=0$$

したがって　$x\sin t+y\cos t=1 \quad \cdots ①$

なお，$t=0$ のとき，$t\to +0$ とすることにより上式を得る．

また，① に垂直で原点を通る直線は

$$-x\cos t+y\sin t=0 \quad \cdots ②$$

① と ② に交点を Q とすると，これをを解いて

$$x=\sin t=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right),\quad y=\cos t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$0\leqq t\leqq\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}-t\leqq\dfrac{\pi}{2}$

よって，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の描く図形は**半径 1 の円の $\boldsymbol{x\geqq 0}$ の部分**である．

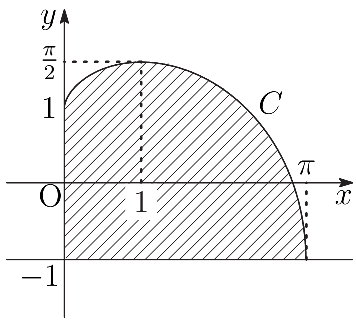
(3) $$\int_0^{\pi}t\sin 2t\,dt=-\int_0^{\pi}t\left(\frac{1}{2}\cos 2t\right)'dt=-\left[\,\frac{1}{2}t\cos 2t\,\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos 2t\,dt$$
$$=-\frac{\pi}{2}+\left[\,\frac{1}{4}\sin 2t\,\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{-\frac{\pi}{2}}$$

(4) $0 \leqq t \leqq \pi$ において

$$y-(-1)=(1+\cos t)+t\sin t \geqq 0$$

$$\frac{dx}{dt}=t\sin t$$

t	$0 \longrightarrow \pi$
x	$0 \longrightarrow \pi$



したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi}\{y-(-1)\}\,dx = \int_0^{\pi}(\cos t+t\sin t+1)\cdot t\sin t\,dt \\ &= \int_0^{\pi} t\sin t\cos t\,dt + \int_0^{\pi} t^2\sin^2 t\,dt + \int_0^{\pi} t\sin t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\cos 2t\,dt + \int_0^{\pi} t\sin t\,dt \end{aligned}$$

ここで，(3) の結果に注意して

$$\int_0^{\pi} t^2\,dt = \left[\ \frac{t^3}{3}\ \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t^2\cos 2t\,dt &= \int_0^{\pi} t^2\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)' dt \\ &= \left[\ \frac{t^2}{2}\sin 2t\ \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t\sin t\,dt &= -\int_0^{\pi} t(\cos t)'\,dt = -\left[\ t\cos t\ \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos t\,dt \\ &= \pi + \left[\ \sin t\ \right]_0^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

よって　　$S = \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi^3}{3} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} + \pi = \boldsymbol{\dfrac{\pi^3}{6} + \dfrac{\pi}{2}}$

4 (1) $x \geqq y \geqq 0$ であるから

$$\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y)-y(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \geqq 0$$

よって，与えられた不等式は成り立つ.

(2) ① $u=|x|+|y|+|z|$ とおくと

$$\frac{|x|}{1+|x|} \geqq \frac{|x|}{1+u}, \quad \frac{|y|}{1+|y|} \geqq \frac{|y|}{1+u}, \quad \frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{|z|}{1+u}$$

上の第 1 式において等号が成立するのは

$x=0$ または $|y|+|z|=0$ すなわち $x=0$ または $y=z=0$

同様に第 2, 3 式において等号が成立するのは，それぞれ

$y=0$ または $z=x=0,$ $z=0$ または $x=y=0$

3 式の辺々を加えると

$$\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}+\frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{u}{1+u} \quad \cdots(*)$$

また，$u \geqq |x+y+z|$ であるから，(1) の結果から

$$\frac{u}{1+u} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \quad \cdots(**)$$

$(*), (**)$ から $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \quad \cdots(***)$

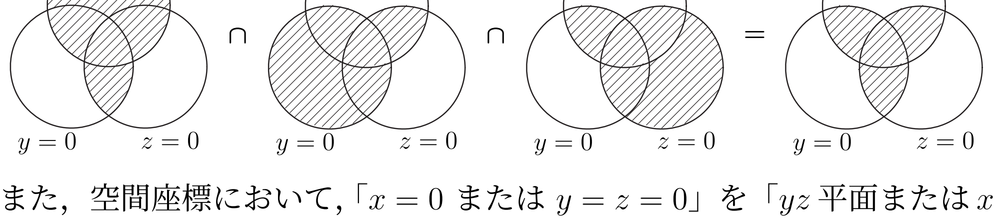
② $(*)$ の等号が成立するは，次の 3 つの条件が同時に成り立つときである．

$x=0$ または $y=z=0,$
$y=0$ または $z=x=0,$
$z=0$ または $x=y=0$

すなわち $y=z=0$ または $z=x=0$ または $x=y=0$

このとき，$(**)$ においても等号が成立するので，同時に $(***)$ においても等号が成立する．

解説 等号の成立条件をベン図で示すと次のようになる．



また，空間座標において，「$x=0$ または $y=z=0$」を「yz 平面または x 軸上」と考えると，(yz 平面または x 軸上) かつ (zx 平面または y 軸上) かつ (xy 平面または z 軸上) は，(x 軸上または y 軸上または z 軸上) となる．

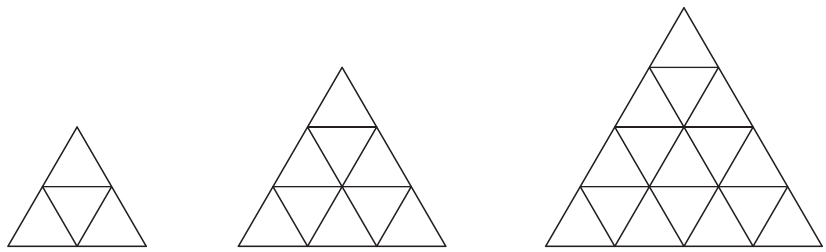
$\boxed{5}$ (1) $a_k = k(k+1)(2k+1)$，$b_k = a_k - a_{k-1}$ とおくと

$$b_k = k(k+1)(2k+1) - (k-1)k(2k-1) = 6k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 = n(n+1)(2n+1) \text{ であるから}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2) ①　$m=2$　　$m=3$　　$m=4$



② 上から k 段目には正三角形のタイルが $k + (k-1) = 2k-1$ 個並ぶ．
したがって，求める正三角形のタイルの総数は

$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1) = 2 \times \frac{1}{2}m(m+1) - m = \boldsymbol{m^2}$$

解説 面積比は相似比の 2 乗であることを考えると明らか．

(3) 上から k 段目には正三角柱のブロックが $(2k-1)^2$ 個積み上げられている
から，積み上げられたブロックの総数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 4k + 1) \\ &= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)\end{aligned}$$

また，ブロック 1 個の体積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin 60^\circ \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，求める台全体の体積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}n(2n-1)(2n+1)}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\triangle$BER にチェバの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FR}}\cdot\frac{\mathrm{RD}}{\mathrm{DB}}=1$$

$\triangle$BER および直線 AF についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FR}}\cdot\frac{\mathrm{RD}}{\mathrm{DB}}=1$$

上の 2 式から　　$\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}$

(2) ① G は AE の中点であるから，(1) の結果から

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BA}}=\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\mathrm{AB}:\mathrm{BG}:\mathrm{GE}=2:1:3$　ゆえに　$\mathrm{AB}:\mathrm{EB}=1:2$

$\mathrm{AB}=a$ より　$\mathrm{EB}=2a$　よって　$\boldsymbol{x=2}$

② $\triangle$AED および直線 BF についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}}=1\quad\text{ゆえに}\quad\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{b}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって　$\mathrm{EC}=6b$　よって　$\boldsymbol{y=6}$

別解 C は直線 DE 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

C は直線 BF 上の点であるから

$$3(1-t)+\frac{2}{3}t=1\quad\text{これを解いて}\quad t=\frac{6}{7}$$

これを ① に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AE}}+6\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{7}$

したがって　$\mathrm{EC}:\mathrm{CD}=6:1$　よって　$\mathrm{EC}=6b$

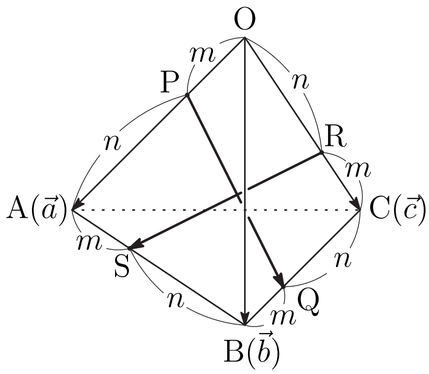
③ 方べきの定理により　$\mathrm{EA}\cdot\mathrm{EB}=\mathrm{ED}\cdot\mathrm{EC}$

ゆえに　$3a\cdot 2a=7b\cdot 6b$　したがって　$a^2=7b^2$

すなわち　$a=\sqrt{7}b$　よって　$\boldsymbol{z=\sqrt{7}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) ① $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{m\vec{a}}{m+n}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{n\vec{c}}{m+n}$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$



したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \boldsymbol{\frac{n\vec{b}+m(\vec{c}-\vec{a})}{m+n}} \\ \overrightarrow{\mathrm{RS}} &= \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}} \\ &= \boldsymbol{\frac{m\vec{b}-n(\vec{c}-\vec{a})}{m+n}}\end{aligned}$$

② $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}-\vec{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 1$, $\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ - |\vec{b}||\vec{a}|\cos 60^\circ = 0$

① の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}} &= \frac{mn(|\vec{b}|^2 - |\vec{c}-\vec{a}|^2) + (m^2-n^2)\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})}{(m+n)^2} \\ &= \frac{mn(1^2-1^2) + (m^2-n^2)\cdot 0}{(m+n)^2} = 0\end{aligned}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{RS}}$

(2) ① 平面 PQR 上の任意の点の位置ベクトルは，実数 s，t を用いて

$$s\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

と表される．PQRS が同一平面上にあるとき，次式を満たす実数 s，t が存在することを示せばよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

これに (1)① の結果を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n} &= \frac{sm\vec{a}}{m+n} + \frac{t(n\vec{b}+m\vec{c})}{m+n} + \frac{(1-s-t)n\vec{c}}{m+n} \\ n\vec{a}+m\vec{b} &= sm\vec{a} + tn\vec{b} + \{tm + (1-s-t)n\}\vec{c}\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$sm = n,\quad tn = m,\quad tm + (1-s-t)n = 0$$

上の第 1，2 式から，$s=\dfrac{n}{m}$，$t=\dfrac{m}{n}$．これらを第 3 式に代入すると

$$\frac{m^2}{n}+\left(1-\frac{n}{m}-\frac{m}{n}\right)n=0 \quad \text{ゆえに} \quad (m-n)(m^2+n^2)=0$$

したがって　　$\boldsymbol{m=n}$

② ① の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

このとき　　$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，　$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ より，四角形 PSQR は平行四辺形であるから，直線 PQ，RS の交点 G は，この平行四辺形の対角線の中点である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\boldsymbol{\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$$

③ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{a}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2)=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{2}(|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2-\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b})=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるので

$$\mathrm{GO}^2=\mathrm{GP}^2+\mathrm{PO}^2,\qquad \mathrm{GA}^2=\mathrm{GP}^2+\mathrm{PA}^2,$$
$$\mathrm{GB}^2=\mathrm{GQ}^2+\mathrm{QB}^2,\qquad \mathrm{GC}^2=\mathrm{GQ}^2+\mathrm{QC}^2$$

また，GP $=$ GQ，PO $=$ PA $=$ QB $=$ QC であるから

$$\mathrm{GO}^2=\mathrm{GA}^2=\mathrm{GB}^2=\mathrm{GC}^2$$

よって，G は正四面体 OABC に外接する球の中心である．このとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a})=\frac{1}{2}$$

また，$\mathrm{GP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，$\mathrm{PO}=\dfrac{1}{2}$ であるから，求める球の半径は

$$\mathrm{GO}=\sqrt{\mathrm{GP}^2+\mathrm{PO}^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

$\boxed{8}$ (1) $x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$ より

$$(x-1)(x^2-2kx+4k^2)=0$$

これを解いて　　$x=1,\ k(1\pm\sqrt{3}\,i)$

$z_1=1$，$z_2=k(1+\sqrt{3}\,i)$，$z_3=k(1-\sqrt{3}\,i)$ とおく．$z_2\neq z_1$，$z_3\neq z_1$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}&=\frac{k(1-\sqrt{3}\,i)-1}{k(1+\sqrt{3}\,i)-1}\\&=\frac{\{(k-1)-\sqrt{3}ki\}^2}{\{(k-1)+\sqrt{3}ki\}\{(k-1)-\sqrt{3}ki\}}\\&=\frac{(-2k^2-2k+1)-2\sqrt{3}k(k-1)i}{(k-1)^2+3k^2}\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

3 点 z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるとき，$(*)$ は実数であるから

$$-2\sqrt{3}k(k-1)=0\qquad\text{よって}\qquad \boldsymbol{k=0,\ 1}$$

(2) $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|$ であるから，z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすとき，$\angle z_2z_1z_3$ は直角である．このとき，$(*)$ は純虚数であるから

$$-2k^2-2k+1=0\qquad\text{よって}\qquad \boldsymbol{k=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}}$$

(3) $|w_1|=|z_1|=1$，$|w_2|=|z_2|$，$|w_3|=|z_3|$，$|z_2|=|z_3|=2|k|$ であるから，w_1，w_2，w_3，$\overline{w_1}$，$\overline{w_2}$，$\overline{w_3}$ が原点中心の正六角形であるとき

$$2|k|=1\quad\text{これを解いて}\quad k=\pm\frac{1}{2}$$

(i) $k=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\arg z_1=0$，$\arg z_2=\dfrac{\pi}{3}$，$\arg z_3=-\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\arg w_1=\theta,\quad \arg w_2=\frac{\pi}{3}+\theta,\quad \arg w_3=-\frac{\pi}{3}+\theta$$

$$\arg\frac{w_1}{w_3}=\arg\frac{w_2}{w_1}=\frac{\pi}{3},\quad \arg\frac{\overline{w_1}}{\overline{w_2}}=\arg\frac{\overline{w_3}}{\overline{w_1}}=\frac{\pi}{3}$$

w_1 と $\overline{w_1}$ に着目すると，これらは原点に関して対称であるから

$$\begin{aligned}\arg w_1-\arg\overline{w_1}&=(2n-1)\pi\qquad(n\text{ は整数})\\\theta-(-\theta)&=(2n-1)\pi\\\theta&=\frac{2n-1}{2}\pi\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ に注意して　　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

(ii) $k=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$\arg z_1=0$，$\arg z_2=\dfrac{4}{3}\pi$，$\arg z_3=\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$$\arg w_1=\theta,\quad \arg w_2=\frac{4}{3}\pi+\theta,\quad \arg w_3=\frac{2}{3}\pi+\theta$$

$$\arg\frac{w_3}{w_1}=\arg\frac{w_2}{w_3}=\frac{2}{3}\pi,\quad \arg\frac{\overline{w_3}}{\overline{w_2}}=\arg\frac{\overline{w_1}}{\overline{w_3}}=\frac{2}{3}\pi$$

$\triangle w_1w_2w_3$，$\triangle\overline{w_1}\,\overline{w_2}\,\overline{w_3}$ は正三角形であるから，w_1 と $\overline{w_1}$ に着目すると

$$\begin{aligned}\arg w_1-\arg\overline{w_1}&=\frac{2n-1}{3}\pi \qquad (n\text{ は整数})\\ \theta-(-\theta)&=\frac{2n-1}{3}\pi\\ \theta&=\frac{2n-1}{6}\pi\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ に注意して　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{k=\frac{1}{2}\text{のとき }\theta=\frac{\pi}{2},\quad k=-\frac{1}{2}\text{のとき }\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi}$$

9 (1) $N=100a+10b+c$ が奇数であるから，c は奇数．
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と接するから

$$b^2-4ac=0 \quad \text{ゆえに}\quad a=\frac{b^2}{4c}\quad \cdots①$$

したがって　　$N=\dfrac{25b^2}{c}+10b+c=\dfrac{(5b+c)^2}{c}$

N が平方数であるとき，c は奇数の平方数であるから　$c=1,\ 9$
① から，$c=1$ のとき，$b=2\sqrt{a}$ であるから

$$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (4,\ 4),\ (9,\ 6)$$

また，$c=9$ のとき，$b=6\sqrt{a}$ であるから　$(a,\ b)=(1,\ 6)$

よって，求める N は　　**121，441，169，961**

(2) **正しくない**
(反例)$N=14^2=196$，すなわち，$a=1$，$b=9$，$c=6$ のとき，
N および a は平方数であるが，$b^2-4ac=9^2-4\cdot1\cdot6\neq0$
このとき，$y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と接しない．

(3) 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の x 軸との交点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$，このグラフと x 軸で囲まれる部分の面積が 4 であるから

$$\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad a(\beta - \alpha)^3 = 3{\cdot}2^3$$

このとき，a，α，β は整数であるから

$$a = 3,\ \ \beta - \alpha = 2 \quad \cdots ①$$

また，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{3} & \cdots ② \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{3} & \cdots ③ \end{cases}$$

①，② から　　$\alpha = -1 - \dfrac{b}{6},\ \beta = 1 - \dfrac{b}{6}$

ここで，$b^2 - 4ac > 0$ に注意して，α，β が整数であるから，上式より

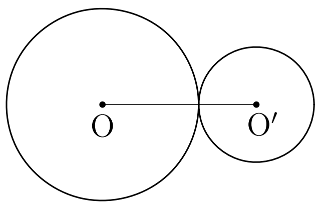
$$b = 6 \qquad \text{ゆえに} \qquad \alpha = -2,\ \beta = 0$$

さらに，これらを ③ に代入すると　　$c = 0$

以上の結果から　　$\boldsymbol{N = 360}$

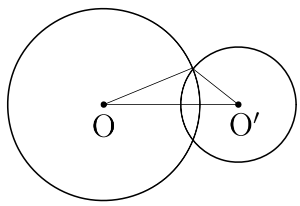
10 (1) 半径 $R,\ r\ (R > r)$ の 2 円が共有点をもつのは次の場合である．

外接する



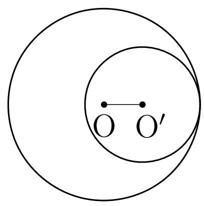
$l = R + r$

2 点で交わる



$R - r < l < R + r$

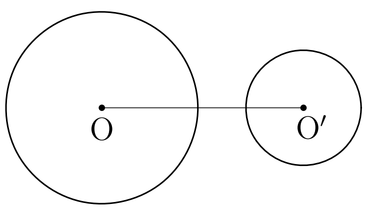
内接する



$l = R - r$

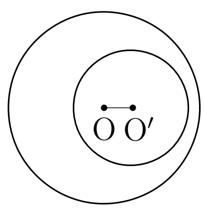
半径 $R,\ r\ (R > r)$ の 2 円が共有点をもたないのは次の場合である．

一方が他方の外部にある



$l > R + r$

一方が他方の内部にある



$l < R - r$

よって，2 円が共有点をもつための必要十分条件は　$\boldsymbol{R - r \leqq l \leqq R + r}$

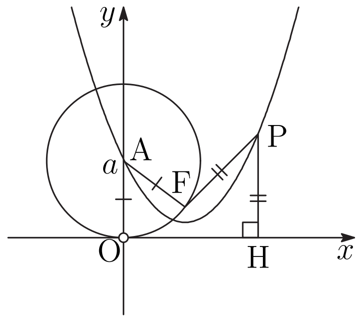
(2) ① 放物線の性質により，A$(0,\ a)$ から準線 (x 軸) に下した垂線 AO と AF が等しいから，$\mathrm{AF}^2=\mathrm{OA}^2$ より

$$s^2+(t-a)^2=a^2$$

これは，A$(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円周上に焦点 F$(s,\ t)$ があることを表している．ただし，焦点は準線 (x 軸) 上にないから，F の描く軌跡は　**原点を除く，A(0, a) を中心とする半径 a の円**

② x 軸上にない点 P$(p,\ q)$ が F$(s,\ t)$ を焦点，準線を x 軸とする放物線上にあるとき，① の放物線は x 軸の上側にあるから，P も x 軸の上側にあるから

$$q>0$$



このとき，P から x 軸に引いた垂線 PH の長さは q であり，$\mathrm{PF}^2=\mathrm{PH}^2$ であるから

$$(s-p)^2+(t-q)^2=q^2$$

これは，P$(p,\ q)$ を中心とする半径 q の円周上に焦点 F$(s,\ t)$ があることを表している．この円と ① の結果から得られた円が共有点をもつことが，本題の必要十分条件である．(1) の結果により，$|q-a|\leqq \mathrm{AP}\leqq q+a$ であるから

$$(q-a)^2\leqq p^2+(q-a)^2\leqq (q+a)^2$$

上の不等式の左側は常に成立するので，右側を展開して整理すると

$$p^2\leqq 4aq \quad \text{ゆえに} \quad q\geqq \frac{p^2}{4a}$$

ただし，$p=0$ のとき，P がこの放物線上の点であるとき，P は A に一致する．よって

$$\boldsymbol{p\neq 0\ \text{のとき}\quad q\geqq \frac{p^2}{4a},\qquad p=0\ \text{のとき}\quad q=a}$$