

平成9年度 九州大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(経済(経工), 理, 医, 歯, 薬, 工, 芸工, 農学部)

問題 1 2 必答, 3 4 5 から1題選択, 6 7 8 から1題選択,
9 10 11 から1題選択

1 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 (x, y) が $x = r(t) \cos t$, $y = r(t) \sin t$ で与えられている。ただし, $r(t) = 1 + \cos t$ であるとする。

- (1) $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で, 点Pの速さ(速度の大きさ)が1となる時刻を求めよ。
- (2) $0 \leq t \leq 2\pi$ の間に, 点Pが動いた道のりを求めよ。
- (3) 点Pが $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で描く曲線と x 軸, y 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

2 m を正の定数とし, $x \geq 0$ で定義された連続関数 $S(x)$ が常に正の値をとるとき, $x \geq 0$ において関数 $u(x)$, $v(x)$, $f(x)$, $g(x)$ を

$$u(x) = \int_0^x S(t) dt + m, \quad v(x) = \int_0^x tS(t) dt + m,$$

$$f(x) = \frac{v(x)}{u(x)}, \quad g(x) = v(x) - xu(x)$$

とおく。

- (1) $g(0) > 0$, $g(1) < 0$ および $x > 0$ において $g'(x) < 0$ を示せ。
- (2) $f(x) = x$ を満たす x の値がただ1つ存在することを示せ。
- (3) $f(x) = x$ を満たす x の値を a とすると, $f(x)$ の最小値を求めよ。

3 (1) $2^m \leq 4m^2$ であるが, $2^{m+1} > 4(m+1)^2$ である最小の自然数 m を求めよ。
(2) m を(1)で求めた自然数とする。そのとき $m < n$ を満たすすべての自然数 n について, $4n^2 < 2^n$ が成り立つことを示せ。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 4k^2$ とする。 n を動かしたときの S_n の最小値を求めよ。

4 次の命題(1), (2), (3)について, 真のときは証明を与え, 偽のときは反例を与えよ。

(1) x, y を実数とする。

$|x| \leq 1$ かつ $|y| \leq 1$ ならば, $(x+y)^2 \leq (xy+1)^2$ である。

(2) a, b, c を実数とする。

すべての実数 x について $ax^2 + bx + c > 0$ ならば, $b^2 - 4ac < 0$ である。

(3) a を整数とする。

2次方程式 $x^2 + 3x + a = 0$ が有理数の解をもつならば, a は偶数である。

5 (1) 次の の中をうめよ。

① 2直線 a, b が1点 P で交わる時 a, b 上にない点 X について, X から a, b にそれぞれ垂線 XJ, XK をひく。ただし, J, K は P と異なるとする。このとき, X が $\angle JPK$ の二等分線上にあるための必要十分条件は, $XJ = \text{ (あ)}$ が成り立つことである。

② 2点 C, D に対し, 点 X が線分 CD の垂直二等分線上にあるための必要十分条件は, $\text{ (イ)} = \text{ (ウ)}$ が成り立つことである。

(2) $\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線とこの三角形の外接円との交点で A と異なる点を D とおく。

① 線分 AD 上に $DB = DX$ となる点 X をとると, X より辺 BC, AB にひいた垂線の長さは等しいことを示せ。

② 線分 AD の D の方向への延長上にある点 Y から直線 BC, AB にひいた垂線の長さが等しいならば, D は線分 XY の中点となることを示せ。

6 四面体 $OABC$ において, 点 G を $\vec{OG} = k(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ である点とする。また, 3点 P, Q, R を, $\vec{OP} = p\vec{OA}, \vec{OQ} = q\vec{OB}, \vec{OR} = r\vec{OC}$ ($0 < p < 1, 0 < q < 1, 0 < r < 1$) である点とする。

(1) 点 G が四面体 $OABC$ の内部にあるとき, k の満たすべき条件を求めよ。ただし, 四面体の内部とは, 四面体からその表面を除いた部分をさす。

(2) 四面体 $OABC$ と四面体 $OPQR$ の体積をそれぞれ V, V' とするとき, $\frac{V'}{V}$ を p, q, r を用いて表せ。

(3) 4点 G, P, Q, R が同一平面上にあるとき, k を p, q, r を用いて表せ。

(4) $p = 3k = \frac{1}{2}$ であって, 4点 G, P, Q, R が同一平面上にあるとき, $\frac{V'}{V}$ の最小値を求めよ。

7 複素数平面において、点 z に関する次の条件を考える。

「原点と異なる点 α を中心として点 z を角 θ だけ回転すると、移った点の絶対値が α の絶対値の $\frac{1}{2}$ になる」

- (1) $\alpha = i, \theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか。
- (2) (α, θ) を一組固定したとき、上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか。
- (3) 点 α が実軸上にあるとき、(2) の図形が虚軸に接するときの θ を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

8 n 個の袋があり、それぞれの袋には金色のカード 3 枚と銀色のカード $(3n - 3)$ 枚入っている。それぞれの袋から 1 枚ずつカードを抜き出すとき、確率変数 X_n を抜き出された金色のカードの枚数とおく。

- (1) X_4 が値 3 をとる確率 $P(X_4 = 3)$ 、および値 2 をとる確率 $P(X_4 = 2)$ を求めよ。
- (2) 金色のカードを 1 枚抜き出すごとに賞金 100 円を受け取る。 $n = 4$ のときに受ける賞金の期待値を求めよ。
- (3) 一般の n ($n \geq 3$) について、 X_n が値 3 をとる確率 $P(X_n = 3)$ を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 3)$ を求めよ。

9 a, b を与えられた実数とする。

- (1) 方程式 $ax = b$ がただ 1 つの解をもつときの条件を述べよ。
また、この方程式が無数の解をもつときの条件および、解をもたないときの条件を述べよ。
- (2) 連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2a+3 & 3 & -2 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がただ 1 つの解をもつときの a の条件を求め、このときの解を求めよ。

- (3) (2) の連立 1 次方程式が無数の解をもつときの a の条件を求めよ。さらに、このときの解を $x = u, y = v, z = w$ とするとき、 v, w を u で表せ。
- (4) (2) の連立 1 次方程式が解をもたないときの a の条件を求めよ。

10 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) の接線 $y = mx + n$ にこの双曲線の焦点 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$) より垂線 FH , $F'H'$ をひく。

- (1) n を m で表せ。
- (2) H , H' は, 原点 O を中心とする半径 a の円周上にあることを示せ。
- (3) 原点 O から接線 $y = mx + n$ への距離を t とするとき, $\triangle HOH'$ の面積 S を t で表せ。さらにこの接線を動かすとき, t のとり得る範囲および S の最大値を求めよ。

11 正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$ (k は 2 以上の整数) の近似値を求めるため

$$f(x) = x^k - c, \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (x > 0)$$

とおき,

$$\sqrt[k]{c} < a_1, \quad a_{n+1} = g(a_n), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とする。

- (1) $\sqrt[k]{c} < a_n$ ならば, $\sqrt[k]{c} < a_{n+1} < a_n$ を示せ。
- (2) $k = 3$ のとき, $\sqrt[3]{c} < a_n$ ならば, $a_{n+1} - \sqrt[3]{c} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n - \sqrt[3]{c})^2$ を示せ。
- (3) $k = 3$, $c = 2$, $a_1 = 1.3$ のとき, $a_5 - \sqrt[3]{2} < \frac{1}{2^5 \cdot 10^{16}}$ を示せ。

解答例

1 (1) $r = 1 + \cos t$ より

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = (1 + \cos t)^2 + (-\sin t)^2 \\ &= 2 + 2\cos t \end{aligned}$$

点 P の速さ $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ が 1 のとき, 上式より

$$1^2 = 2 + 2\cos t \quad \text{ゆえに} \quad \cos t = -\frac{1}{2}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ において, これを解くと $t = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

補足 $x = r(t)\cos t, y = r(t)\sin t$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos t - r\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin t + r\cos t$$

よって
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

(2) $\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = \sqrt{2 + 2\cos t} = 2\left|\cos \frac{t}{2}\right|$ より, 求める道のりは

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} 2\left|\cos \frac{t}{2}\right| dt &= \int_0^{\pi} 2\left|\cos \frac{t}{2}\right| dt + \int_{\pi}^{2\pi} 2\left|\cos \frac{t}{2}\right| dt \\ &= \int_0^{\pi} 4\cos \frac{t}{2} dt = \left[8\sin \frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 8 \end{aligned}$$

補足 $\int_{\pi}^{2\pi} 2\left|\cos \frac{t}{2}\right| dt$ において, $t = 2\pi - u$ とおくと ($dt = -du$)

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} 2\left|\cos \frac{t}{2}\right| dt &= \int_{\pi}^0 2\left|\cos \frac{2\pi - u}{2}\right| (-du) \\ &= \int_0^{\pi} 2\left|\cos \frac{u}{2}\right| du = \int_0^{\pi} 2\cos \frac{t}{2} dt \end{aligned}$$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}r^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{4} + \cos t + \frac{1}{4}\cos 2t\right) dt \\ &= \left[\frac{3}{4}t + \sin t + \frac{1}{8}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\pi + 1 \end{aligned}$$

■

2 (1) $S(t) > 0$, $m > 0$ であるから

$$g(0) = v(0) - 0 \cdot u(0) = \int_0^0 tS(t) dt + m = m > 0$$

$$\begin{aligned} g(1) &= v(1) - 1 \cdot u(1) = \int_0^1 tS(t) dt + m - \left(\int_0^1 S(t) dt + m \right) \\ &= \int_0^1 (t-1)S(t) dt < 0 \end{aligned}$$

$$u(x) = \int_0^x S(t) dt + m, \quad v(x) = \int_0^x tS(t) dt + m \text{ を微分すると}$$

$$u'(x) = S(x), \quad v'(x) = xS(x) \quad \cdots (*)$$

上式を利用して, $g(x) = v(x) - xu(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= v'(x) - u(x) - xu'(x) \\ &= xS(x) - u(x) - x \cdot S(x) \\ &= -u(x) = - \left(\int_0^x S(t) dt + m \right) < 0 \end{aligned}$$

(2) $S(x)$ は連続関数であるから, $g(x) = v(x) - xu(x)$ は連続である.
 $g(0) > 0$, $g(1) < 0$, $g'(x) < 0$ であるから, $g(x)$ は単調減少で

$$g(x) = v(x) - xu(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) = \frac{v(x)}{u(x)} = x$$

をみたす x ($0 < x < 1$) がただ一つ存在する.

(3) (*) を利用して, $f(x) = \frac{v(x)}{u(x)}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{v'(x)u(x) - v(x)u'(x)}{\{u(x)\}^2} = \frac{xS(x)u(x) - v(x)S(x)}{\{u(x)\}^2} \\ &= -\frac{S(x)\{v(x) - xu(x)\}}{\{u(x)\}^2} = -\frac{S(x)g(x)}{\{u(x)\}^2} \end{aligned}$$

$g(x) = 0$, すなわち, $f(x) = x$ をみたす x の値は a であるから

x	0	...	a	...
$g(x)$		+	0	-
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	極小 $f(a)$	↗

よって, 求める $f(x)$ の最小値は $f(a) = a$ ■

- 3** (1) $2^m \leq 4m^2$, $2^{m+1} > 4(m+1)^2$ より $2(m+1)^2 < 2^m \leq 4m^2 \dots \textcircled{1}$

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$2(m+1)^2$	8	18	32	50	72	98	128	162
2^m	2	4	8	16	32	64	128	256
$4m^2$	4	16	36	64	100	144	196	256

$\textcircled{1}$ を満たす最小の m であるから $m = 8$

- (2) (1) の結果から $2^n > 4n^2$ ($n \geq 8$) $\dots (*)$

これを数学的帰納法を用いて証明する.

(i) $n = 9$ のとき $2^9 = 512$, $4 \cdot 9^2 = 324$ よって, $(*)$ は成り立つ.

(ii) $n = k$ のとき, $(*)$ が成り立つと仮定すると

$$2^k > 4k^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{k+1} > 8k^2$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad 8k^2 - 4(k+1)^2 &= 4k^2 - 8k - 4 \\ &= 4\{(k-1)^2 - 2\} = 4(8^2 - 2) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad 2^{k+1} > 8k^2 > 4(k+1)^2$$

よって, $n = k+1$ のとき, $(*)$ は成り立つ.

(i), (ii) より, 9以上の自然数 n に対して, $(*)$ は成り立つ.

- (3) (1) の表および (2) の結論により

$$1 \leq k \leq 7 \text{ のとき} \quad 2^k - 4k^2 < 0$$

$$k = 8 \text{ のとき} \quad 2^k - 4k^2 = 0$$

$$9 \leq k \text{ のとき} \quad 2^k - 4k^2 > 0$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 4k^2 = \sum_{k=1}^n (2^k - 4k^2)$$

ゆえに, S_n を最小にする整数 n は $n = 7, 8$

よって, 求める S_n の最小値は

$$\begin{aligned} S_7 &= \sum_{k=1}^7 2^k - \sum_{k=1}^7 4k^2 \\ &= \frac{2(2^7 - 1)}{2 - 1} - 4 \times \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 15 = -306 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \boxed{4} \quad (1) \quad (xy+1)^2 - (x+y)^2 &= (xy+x+y+1)(xy-x-y+1) \\
 &= (x+1)(y+1)(x-1)(y-1) \\
 &= (x^2-1)(y^2-1) = (1-|x|^2)(1-|y|^2) \\
 &= (1+|x|)(1-|x|)(1+|y|)(1-|y|)
 \end{aligned}$$

したがって、 $|x| \leq 1$ かつ $|y| \leq 1$ ならば $1-|x| \geq 0$, $1-|y| \geq 1$

ゆえに $(x+y)^2 \leq (xy+1)^2$ よって、この命題は真である。

(2) 偽 (反例)

$a = b = 0$, $c > 0$ のとき、すべての x について $ax^2 + bx + c > 0$

このとき $b^2 - 4ac = 0$

(3) a は整数, $x^2 + 3x + a = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ が有理数の解 $\frac{p}{q}$ (p と q は互いに素な整数, $q > 0$) をもつとすると

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 3\left(\frac{p}{q}\right) + a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{p^2}{q} = -aq - 3p$$

右辺は整数であるから、左辺も整数。また、 p , q は互いに素であるから、 $q = 1$ 。これを上式に代入すると

$$p^2 = -a - 3p \quad \text{ゆえに} \quad a = -p(p+3)$$

p と $p+3$ の偶奇は一致しないので、 $p(p+3)$ は偶数。ゆえに、 a は偶数。よって、この命題は真である。 ■

- 5 (1) ① (あ) XK
 ② (い) XC (う) XD
 (2) ① $\angle CAB = 2\alpha$, $\angle CBX = \beta$ とおく.

\widehat{CD} の円周角により

$$\angle CAD = \angle CBD = \alpha$$

条件により, $DX = DB$ であるから

$$\angle DXB = \angle DBX = \alpha + \beta$$

$\triangle XAB$ について, $\angle XAB + \angle XBA = \angle DXB$ であるから

$$\alpha + \angle XBA = \alpha + \beta \quad \text{ゆえに} \quad \angle XBA = \beta$$

$\angle CBX = \angle XBA$ となり, BX は $\angle ABC$ の二等分線である.

よって, X より辺 BC , AB にひいた垂線の長さは等しい.

- ② Y から辺 AB , BC にそれぞれ垂線 YG , YH を引く. $YG = YH$ より,
 $\triangle YBG \equiv \triangle YBH$ であるから, $\angle DBY = \gamma$ とおくと

$$\angle YBG = \angle YBH = \alpha + \gamma$$

$\angle YBG + \angle YBH + \angle ABC = 180^\circ$ であるから

$$(\alpha + \gamma) + (\alpha + \gamma) + 2\beta = 180^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \gamma = 90^\circ - \alpha - \beta$$

$\triangle DBX$ において, 上の結果により

$$\angle BDX = 180^\circ - 2(\alpha + \beta) = 2(90^\circ - \alpha - \beta) = 2\gamma$$

$\angle DBY + \angle DYB = \angle BDX$ であるから

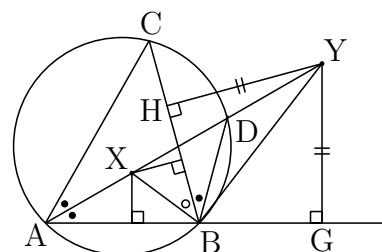
$$\gamma + \angle DYB = 2\gamma \quad \text{ゆえに} \quad \angle DYB = \gamma$$

$\angle DBY = \angle DYB$ であるから $DB = DY$

また, 条件により, $DB = DX$ であるから $DX = DY$

よって, D は線分 XY の中点である.

補足 X は $\triangle ABC$ の内心. 4点 B, C, X, Y は D を中心とする同心円上にある.



- 6 (1) $\triangle ABC$ の重心を G' とすると

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OG} = 3k\overrightarrow{OG'}$$

G が四面体 $OABC$ の内部にあるとき

$$0 < 3k < 1 \quad \text{よって} \quad 0 < k < \frac{1}{3}$$

- (2) \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} のなす角を θ , C から平面 OAB に垂線 CH を引き, $\angle COH = \alpha$ とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \triangle OAB \times OC \sin \alpha = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \theta \times OC \sin \alpha \\ &= \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC \sin \theta \sin \alpha \end{aligned}$$

3点 P, Q, R は, それぞれ OA, OB, OC 上の点であるから, 上の結果を利用して

$$V' = \frac{1}{6} OP \cdot OQ \cdot OR \sin \theta \sin \alpha \quad \text{よって} \quad \frac{V'}{V} = \frac{OP}{OA} \cdot \frac{OQ}{OB} \cdot \frac{OR}{OC} = pqr$$

- (3) $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{p}\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{q}\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{r}\overrightarrow{OR}$ より

$$\overrightarrow{OG} = k \left(\frac{1}{p}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{q}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{r}\overrightarrow{OR} \right) = \frac{k}{p}\overrightarrow{OP} + \frac{k}{q}\overrightarrow{OQ} + \frac{k}{r}\overrightarrow{OR}$$

$$\text{このとき} \quad \frac{k}{p} + \frac{k}{q} + \frac{k}{r} = 1 \quad \text{よって} \quad k = \frac{pqr}{pq + qr + rp}$$

- (4) $p = 3k = \frac{1}{2}$ であるから, $p = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{6}$ を (3) の結果に代入すると

$$\frac{1}{6} = \frac{\frac{1}{2}qr}{\frac{1}{2}q + qr + \frac{1}{2}r} \quad \text{ゆえに} \quad 4qr = q + r$$

$q > 0, r > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の関係により $q + r \geq 2\sqrt{qr}$

$$\text{したがって} \quad 4qr \geq 2\sqrt{qr} \quad \text{ゆえに} \quad qr \geq \frac{1}{4}$$

上式において, 等号が成立するのは, $q = r = \frac{1}{2}$ のときである.

$$\text{したがって} \quad \frac{V'}{V} = pqr = \frac{1}{2}qr \geq \frac{1}{8} \quad \text{よって, 求める最小値は} \quad \frac{1}{8} \quad \blacksquare$$

- 7 (1) 与えられた条件により, 点 z が移動した点を w とすると

$$w = \alpha + (z - \alpha)(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \cdots (*)$$

このとき, $\alpha = i$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ であるから

$$w = i + (z - i)i = i(z + 1 - i)$$

また, $|w| = \frac{1}{2}|\alpha| = \frac{1}{2}|i| = 1$ であるから

$$|w| = |i(z + 1 - i)| \quad \text{ゆえに} \quad |z + 1 - i| = \frac{1}{2}$$

よって, z は, 点 $-1 + i$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円.

- (2) (*) より $|w| = |\alpha + (z - \alpha)(\cos \theta + i \sin \theta)|$

これに $|w| = \frac{1}{2}|\alpha|$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\alpha| &= |\cos \theta + i \sin \theta| \left| \frac{\alpha}{\cos \theta + i \sin \theta} + z - \alpha \right| \\ &= |\alpha(\cos \theta - i \sin \theta) + z - \alpha| \\ &= |z - \alpha(1 - \cos \theta + i \sin \theta)| \end{aligned}$$

よって, 点 z は, $\alpha(1 - \cos \theta + i \sin \theta)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}|\alpha|$ の円.

- (3) (2) の円の中心の実部 $\alpha(1 - \cos \theta)$ の絶対値がこの円の半径 $\frac{1}{2}|\alpha|$ に等しいとき, この円は虚軸に接するから

$$|\alpha(1 - \cos \theta)| = \frac{1}{2}|\alpha|$$

ここで, $\alpha \neq 0$, $1 - \cos \theta \geq 0$ に注意して

$$1 - \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{より} \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \quad \blacksquare$$

- 8 (1) $n = 4$ のとき, それぞれの袋には金色のカード 3 枚と銀色のカード 9 枚が入っている. したがって, 求める確率は

$$P(X_4 = 3) = {}_4C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64},$$

$$P(X_4 = 2) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}$$

- (2) (1) と同様にして

$$P(X_4 = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256},$$

$$P(X_4 = 1) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{108}{256},$$

$$P(X_4 = 4) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

したがって, $n = 4$ のときの X_4 の確率分布表は次のようになる.

X	0	1	2	3	4	計
$P(X)$	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$	1

よって, 求める期待値は

$$100 \times \frac{108}{256} + 200 \times \frac{54}{256} + 300 \times \frac{12}{256} + 400 \times \frac{1}{256} = 100 \text{ (円)}$$

別解 X_4 は二項分布 $B(4, \frac{1}{4})$ に従うので, 求める期待値は

$$E(100X_4) = 100E(X_4) = 100 \times 4 \cdot \frac{1}{4} = 100 \text{ (円)}$$

$$(3) P(X_n = 3) = {}_nC_3 \left(\frac{3}{3n}\right)^3 \left(\frac{3n-3}{3n}\right)^{n-3} = \frac{(n-2)(n-1)^{n-2}}{6n^{n-1}}$$

- (4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \frac{n}{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{6e} \end{aligned}$$



- 9 (1) $ax = b$ がただ 1 つの解をもつときの条件は $a \neq 0$
 $ax = b$ が無数の解をもつときの条件は $a = b = 0$

$$(2) \quad \begin{aligned} -3x - 2y + z &= 3 & \cdots \textcircled{1} \\ (2a + 3)x + 3y - 2z &= -2 & \cdots \textcircled{2} \\ 2x + ay - z &= 1 & \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \text{ より} \quad (2a - 3)x - y = 4 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より} \quad -x + (a - 2)y = 4 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} \times (a - 2) + \textcircled{5} \text{ より}$$

$$\{(2a - 3)(a - 2) - 1\}x = 4(a - 2) + 4$$

$$(a - 1)(2a - 5)x = 4(a - 1) \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ から } y \text{ を消去すると} \quad z = (4a - 3)x - 5$$

上式および $\textcircled{4}, \textcircled{6}$ から

$$(*) \quad \begin{cases} (a - 1)(2a - 5)x = 4(a - 1) \\ y = (2a - 3)x - 4 \\ z = (4a - 3)x - 5 \end{cases}$$

(*) から, ただ 1 つの解をもつとき $(a - 1)(2a - 5) \neq 0$ すなわち $a \neq 1, \frac{5}{2}$

$$\text{このとき, } (*) \text{ の第 1 式から} \quad x = \frac{4}{2a - 5}$$

$$\text{これを } (*) \text{ の第 2} \cdot \text{3 式に代入すると} \quad y = \frac{8}{2a - 5}, z = \frac{6a + 13}{2a - 5}$$

- (3) 方程式が無数の解をもつとき, (*) の第 1 式から $a = 1$

このときの解 $x = u, y = v, z = w$ は, $a = 1$ を (*) の第 2・3 式に代入することにより

$$v = -u - 4, w = u - 5$$

- (4) 連立方程式が解をもたないとき, (*) の第 1 式から $a = \frac{5}{2}$

解説 与えた行列の行列式を Δ とすると $\Delta = (a - 1)(2a - 5)$

方程式がただ一つの解をもつとき, $\Delta \neq 0$, すなわち, $a \neq 1, \frac{5}{2}$ ■

10 (1) 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (*)$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

この直線は原点を通らないから、これが接線 $y = mx + n$ に一致するとき、 $n \neq 0$ であるから

$$-\frac{mx}{n} + \frac{y}{n} = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から $\frac{x_1}{a^2} = -\frac{m}{n}$, $-\frac{y_1}{b^2} = \frac{1}{n}$ ゆえに $\frac{x_1}{a} = -\frac{ma}{n}$, $\frac{y_1}{b} = -\frac{b}{n}$

点 (x_1, y_1) は双曲線 $(*)$ 上の点であるから

$$\left(-\frac{ma}{n}\right)^2 - \left(-\frac{b}{n}\right)^2 = 1 \quad \text{よって} \quad n = \pm\sqrt{m^2a^2 - b^2}$$

別解 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = mx + n$ から y を消去して整理すると

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - a^2(n^2 + b^2) = 0$$

双曲線の漸近線が $y = \pm\frac{b}{a}x$ であるから、 $m < -\frac{b}{a}$, $\frac{b}{a} < m$ より、 $b^2 - a^2m^2 \neq 0$ であることに注意して、上式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-a^2mn)^2 + a^2(b^2 - a^2m^2)(n^2 + b^2) \\ &= a^2b^2(b^2 - m^2a^2 + n^2) \end{aligned}$$

このとき、 $D = 0$ であるから $n = \pm\sqrt{m^2a^2 - b^2}$

(2) 点 $F(c, 0)$ を通り、直線 $y = mx + n$ に垂直な直線は $y = -\frac{1}{m}(x - c)$

この2直線の交点 H の座標は、連立方程式を解いて

$$H\left(\frac{c - mn}{m^2 + 1}, \frac{mc + n}{m^2 + 1}\right)$$

したがって $OH^2 = \left(\frac{c - mn}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{mc + n}{m^2 + 1}\right)^2 = \frac{n^2 + c^2}{m^2 + 1} \quad \cdots \textcircled{3}$

これに (1) の結果および $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ を代入すると

$$OH^2 = \frac{(a^2m^2 - b^2) + (a^2 + b^2)}{m^2 + 1} = a^2$$

OH' は ③ の c を $-c$ に置き換えたものであるから、 $OH' = OH$

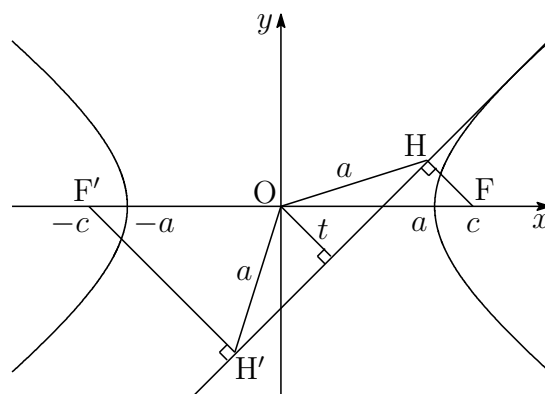
よって、 H, H' は、原点 O を中心とする半径 a の円周上にある。

- (3) (2) の結果から, $\triangle HOH'$ は,
 $OH = OH' = a$ の二等辺三角
 形であるから

$$HH' = 2\sqrt{a^2 - t^2}$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}t \cdot HH' = t\sqrt{a^2 - t^2}$$



双曲線の接線は原点を通らない. また, 直線 $y = mx + n$ は双曲線の頂点 $(\pm a, 0)$ を通らないから, 2点 H, H' は円周上の異なる点である. したがって, t のとり得る値の範囲は

$$0 < t < a$$

ゆえに
$$S = \sqrt{t^2(a^2 - t^2)} = \sqrt{-\left(t^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 + \frac{a^4}{4}}$$

よって $t^2 = \frac{a^2}{2}$ すなわち $t = \frac{a}{\sqrt{2}}$ のとき, S は最大値 $\frac{a^2}{2}$ をとる. ■

11 (1) $\sqrt[k]{c} < a_n$, $f(x) = x^k - c$, $f'(x) = kx^{k-1}$ より

$$f(a_n) > 0, \quad f'(a_n) > 0$$

定義式により, $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \dots (*)$ であるから

$$a_n - a_{n+1} = \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_n > a_{n+1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ は区間 $[\sqrt[k]{c}, a_n]$ で連続で, 区間 $(\sqrt[k]{c}, a_n)$ で微分可能であるから

$$\frac{f(a_n) - f(\sqrt[k]{c})}{a_n - \sqrt[k]{c}} = f'(d) \quad (\sqrt[k]{c} < d < a_n)$$

を満たす d が存在する. このとき, $f(\sqrt[k]{c}) = 0$ であるから

$$f(a_n) = kd^{k-1}(a_n - \sqrt[k]{c})$$

上式および $f'(a_n) = ka_n^{k-1}$ を $(*)$ に代入すると

$$a_{n+1} = a_n - \frac{kd^{k-1}(a_n - \sqrt[k]{c})}{ka_n^{k-1}} = a_n - (a_n - \sqrt[k]{c}) \left(\frac{d}{a_n}\right)^{k-1}$$

$$\text{ゆえに} \quad a_{n+1} - \sqrt[k]{c} = (a_n - \sqrt[k]{c}) \left\{ 1 - \left(\frac{d}{a_n}\right)^{k-1} \right\} > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

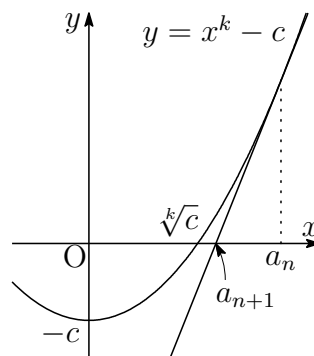
$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad \sqrt[k]{c} < a_{n+1} < a_n$$

解説 $y = f(x)$ 上の点 $(a_n, f(a_n))$ における接線の方程式は

$$y - f(a_n) = f'(a_n)(x - a_n)$$

この直線の x 軸との交点の x 座標を a_{n+1} とすると

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$



$f(x) = x^k - c$ ($c > 0, k$ は 2 以上の整数) であるから, $\sqrt[k]{c} < a_n$ ならば

$$\sqrt[k]{c} < a_{n+1} < a_n$$

参照 ニュートン法 (http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf [8])

(2) $k = 3$ のとき, (*) より

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= a_n - \frac{a_n^3 - c}{3a_n^2} \\
 a_{n+1} - \sqrt[3]{c} &= a_n - \sqrt[3]{c} - \frac{(a_n - \sqrt[3]{c})(a_n^2 + a_n\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2})}{3a_n^2} \\
 &= (a_n - \sqrt[3]{c}) \left(1 - \frac{a_n^2 + a_n\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2}}{3a_n^2} \right) \\
 &= \frac{(a_n - \sqrt[3]{c})(2a_n^2 - a_n\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{c^2})}{3a_n^2} \\
 &= \frac{(a_n - \sqrt[3]{c})^2(2a_n + \sqrt[3]{c})}{3a_n^2} \quad \dots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

ここで, $\sqrt[3]{c} < a_n$ より

$$\frac{2a_n + \sqrt[3]{c}}{3a_n^2} < \frac{2a_n + \sqrt[3]{c}}{2a_n^2 + a_n\sqrt[3]{c}} = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より} \quad a_{n+1} - \sqrt[3]{c} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n - \sqrt[3]{c})^2$$

(3) (2) の結果に $c = 2$, $a_1 = 1.3$ を適用すると

$$\begin{aligned}
 a_5 - \sqrt[3]{2} &< \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(a_4 - \sqrt[3]{2})^2 \\
 &< \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^2 (a_3 - \sqrt[3]{2})^4 \\
 &< \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^4 (a_2 - \sqrt[3]{2})^8 \\
 &< \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^4 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^8 (a_1 - \sqrt[3]{2})^{16} \\
 &= \frac{1}{2^5}(1.3 - \sqrt[3]{2})^{16} \quad \dots \textcircled{5}
 \end{aligned}$$

ここで, $1.2^3 = 1.728 < 2$ より, $1.2 < \sqrt[3]{2}$ であるから

$$1.3 - \sqrt[3]{2} < 1.3 - 1.2 = \frac{1}{10} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ より} \quad a_5 - \sqrt[3]{2} < \frac{1}{2^5 \cdot 10^{16}}$$

■