平成９年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (経済 (経工)，理，医，歯，薬，工，農学部)

$\boxed{\mathbf{1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$ 必答，$\boxed{\mathbf{3}}$～$\boxed{\mathbf{5}}$，$\boxed{\mathbf{6}}$～$\boxed{\mathbf{8}}$，$\boxed{\mathbf{9}}$～$\boxed{\mathbf{11}}$ からそれぞれ 1 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x = r(t)\cos t$，$y = r(t)\sin t$ で与えられている。ただし，$r(t) = 1 + \cos t$ であるとする。

(1) $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で，点 P の速さ (速度の大きさ) が 1 となる時刻を求めよ。

(2) $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の間に，点 P が動いた道のりを求めよ。

(3) 点 P が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で描く曲線と x 軸，y 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ m を正の定数とし，$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $S(x)$ が常に正の値をとるとき，$x \geqq 0$ において関数 $u(x)$，$v(x)$，$f(x)$，$g(x)$ を

$$u(x) = \int_0^x S(t)\,dt + m, \quad v(x) = \int_0^x tS(t)\,dt + m,$$

$$f(x) = \frac{v(x)}{u(x)}, \quad g(x) = v(x) - xu(x)$$

とおく。

(1) $g(0) > 0$，$g(1) < 0$ および $x > 0$ において $g'(x) < 0$ を示せ。

(2) $f(x) = x$ を満たす x の値がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) $f(x) = x$ を満たす x の値を a とするとき，$f(x)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $2^m \leqq 4m^2$ であるが，$2^{m+1} > 4(m+1)^2$ である最小の自然数 m を求めよ。

(2) m を (1) で求めた自然数とする。そのとき $m < n$ を満たすすべての自然数 n について，$4n^2 < 2^n$ が成り立つことを示せ。

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 4k^2$ とする。n を動かしたときの S_n の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の命題 (1)，(2)，(3) について，真のときは証明を与え，偽のときは反例を与えよ。

(1) x，y を実数とする。
$|x| \leqq 1$ かつ $|y| \leqq 1$ ならば，$(x+y)^2 \leqq (xy+1)^2$ である。

(2) a，b，c を実数とする。
すべての実数 x について $ax^2+bx+c>0$ ならば，$b^2-4ac<0$ である。

(3) a を整数とする。
2 次方程式 $x^2+3x+a=0$ が有理数の解をもつならば，a は偶数である。

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 次の $\boxed{\phantom{\text{（あ）}}}$ の中をうめよ。

① 2 直線 a，b が 1 点 P で交わるとき a，b 上にない点 X について，X から a，b にそれぞれ垂線 XJ，XK をひく。ただし，J，K は P と異なるとする。このとき，X が ∠JPK の二等分線上にあるための必要十分条件は，XJ $=$ $\boxed{\text{（あ）}}$ が成り立つことである。

② 2 点 C，D に対し，点 X が線分 CD の垂直二等分線上にあるための必要十分条件は，$\boxed{\text{（イ）}} = \boxed{\text{（ウ）}}$ が成り立つことである。

(2) △ABC の ∠A の二等分線とこの三角形の外接円との交点で A と異なる点を D とおく。

① 線分 AD 上に DB $=$ DX となる点 X をとると，X より辺 BC，AB にひいた垂線の長さは等しいことを示せ。

② 線分 AD の D の方向への延長上にある点 Y から直線 BC，AB にひいた垂線の長さが等しいならば，D は線分 XY の中点となることを示せ。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 四面体 OABC において，点 G を $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ である点とする。また，3 点 P，Q，R を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $(0<p<1,\ 0<q<1,\ 0<r<1)$ である点とする。

(1) 点 G が四面体 OABC の内部にあるとき，k の満たすべき条件を求めよ。ただし，四面体の内部とは，四面体からその表面を除いた部分をさす。

(2) 四面体 OABC と四面体 OPQR の体積をそれぞれ V，V' とするとき，$\dfrac{V'}{V}$ を p，q，r を用いて表せ。

(3) 4 点 G，P，Q，R が同一平面上にあるとき，k を p，q，r を用いて表せ。

(4) $p=3k=\dfrac{1}{2}$ であって，4 点 G，P，Q，R が同一平面上にあるとき，$\dfrac{V'}{V}$ の最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 複素数平面において，点 z に関する次の条件を考える。

「原点と異なる点 α を中心として点 z を角 θ だけ回転すると，移った点の絶対値が α の絶対値の $\dfrac{1}{2}$ になる」

(1) $\alpha = i$，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか。

(2) (α, θ) を一組固定したとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか。

(3) 点 α が実軸上にあるとき，(2) の図形が虚軸に接するときの θ を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

$\boxed{\mathbf{8}}$ n 個の袋があり，それぞれの袋には金色のカード 3 枚と銀色のカード $(3n-3)$ 枚入っている。それぞれの袋から 1 枚ずつカードを抜き出すとき，確率変数 X_n を抜き出された金色のカードの枚数とおく。

(1) X_4 が値 3 をとる確率 $P(X_4 = 3)$，および値 2 をとる確率 $P(X_4 = 2)$ を求めよ。

(2) 金色のカードを 1 枚抜き出すごとに賞金 100 円を受け取る。$n = 4$ のときに受ける賞金の期待値を求めよ。

(3) 一般の n $(n \geqq 3)$ について，X_n が値 3 をとる確率 $P(X_n = 3)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(X_n = 3)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{9}}$ a，b を与えられた実数とする。

(1) 方程式 $ax = b$ がただ 1 つの解をもつときの条件を述べよ。
また，この方程式が無数の解をもつときの条件および，解をもたないときの条件を述べよ。

(2) 連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2a+3 & 3 & -2 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がただ 1 つの解をもつときの a の条件を求め，このときの解を求めよ。

(3) (2) の連立 1 次方程式が無数の解をもつときの a の条件を求めよ。さらに，このときの解を $x = u$，$y = v$，$z = w$ とするとき，v，w を u で表せ。

(4) (2) の連立 1 次方程式が解をもたないときの a の条件を求めよ。

$\boxed{\mathbf{10}}$ 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a,\ b>0)$ の接線 $y=mx+n$ にこの双曲線の焦点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$ より垂線 FH，F′H′ をひく。

(1) n を m で表せ。

(2) H，H′ は，原点 O を中心とする半径 a の円周上にあることを示せ。

(3) 原点 O から接線 $y=mx+n$ への距離を t とするとき，△HOH′ の面積 S を t で表せ。さらにこの接線を動かすとき，t のとり得る範囲および S の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{11}}$ 正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$（k は 2 以上の整数）の近似値を求めるため

$$f(x)=x^k-c,\quad g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\quad (x>0)$$

とおき，

$$\sqrt[k]{c}<a_1,\quad a_{n+1}=g(a_n),\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

とする。

(1) $\sqrt[k]{c}<a_n$ ならば，$\sqrt[k]{c}<a_{n+1}<a_n$ を示せ。

(2) $k=3$ のとき，$\sqrt[3]{c}<a_n$ ならば，$a_{n+1}-\sqrt[3]{c}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n-\sqrt[3]{c})^2$ を示せ。

(3) $k=3$，$c=2$，$a_1=1.3$ のとき，$a_5-\sqrt[3]{2}<\dfrac{1}{2^5{\cdot}10^{16}}$ を示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $r=1+\cos t$ より

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=r^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=(1+\cos t)^2+(-\sin t)^2$$
$$=2+2\cos t$$

点 P の速さ $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ が 1 のとき，上式より

$$1^2=2+2\cos t \quad \text{ゆえに} \quad \cos t=-\frac{1}{2}$$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において，これを解くと　$\boldsymbol{t=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi}$

補足 $x=r(t)\cos t$，$y=r(t)\sin t$ のとき

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos t-r\sin t, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin t+r\cos t$$

よって　$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=r^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$

(2) $\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}=\sqrt{2+2\cos t}=2\left|\cos\frac{t}{2}\right|$ より，求める道のりは

$$\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=\int_0^{\pi}2\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt+\int_{\pi}^{2\pi}2\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt$$
$$=\int_0^{\pi}4\cos\frac{t}{2}\,dt=\left[\,8\sin\frac{t}{2}\,\right]_0^{\pi}=\mathbf{8}$$

補足 $\int_{\pi}^{2\pi}2\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt$ において，$t=2\pi-u$ とおくと $(dt=-du)$

$$\int_{\pi}^{2\pi}2\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=\int_{\pi}^{0}2\left|\cos\frac{2\pi-u}{2}\right|(-du)$$
$$=\int_0^{\pi}2\left|\cos\frac{u}{2}\right|du=\int_0^{\pi}2\cos\frac{t}{2}\,dt$$

(3) 求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos t)^2\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{4}+\cos t+\frac{1}{4}\cos 2t\right)dt$$
$$=\left[\,\frac{3}{4}t+\sin t+\frac{1}{8}\sin 2t\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{3}{8}\pi+1}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $S(t) > 0$，$m > 0$ であるから

$$g(0) = v(0) - 0 \cdot u(0) = \int_0^0 tS(t)\,dt + m = m > 0$$

$$\begin{aligned} g(1) = v(1) - 1 \cdot u(1) &= \int_0^1 tS(t)\,dt + m - \left(\int_0^1 S(t)\,dt + m\right) \\ &= \int_0^1 (t-1)S(t)\,dt < 0 \end{aligned}$$

$u(x) = \displaystyle\int_0^x S(t)\,dt + m$，$v(x) = \displaystyle\int_0^x tS(t)\,dt + m$ を微分すると

$$u'(x) = S(x), \quad v'(x) = xS(x) \quad \cdots (*)$$

上式を利用して，$g(x) = v(x) - xu(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= v'(x) - u(x) - xu'(x) \\ &= xS(x) - u(x) - x \cdot S(x) \\ &= -u(x) = -\left(\int_0^x S(t)\,dt + m\right) < 0 \end{aligned}$$

(2) $S(x)$ は連続関数であるから，$g(x) = v(x) - xu(x)$ は連続である．
$g(0) > 0$，$g(1) > 0$，$g'(x) < 0$ であるから，$g(x)$ は単調減少で

$$g(x) = v(x) - xu(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) = \frac{v(x)}{u(x)} = x$$

をみたす x $(0 < x < 1)$ がただ一つ存在する．

(3) $(*)$ を利用して，$f(x) = \dfrac{v(x)}{u(x)}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{v'(x)u(x) - v(x)u'(x)}{\{u(x)\}^2} = \frac{xS(x)u(x) - v(x)S(x)}{\{u(x)\}^2} \\ &= -\frac{S(x)\{v(x) - xu(x)\}}{\{u(x)\}^2} = -\frac{S(x)g(x)}{\{u(x)\}^2} \end{aligned}$$

$g(x) = 0$，すなわち，$f(x) = x$ をみたす x の値は a であるから

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$g(x)$		$+$	0	$-$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小 $f(a)$	$\nearrow$

よって，求める $f(x)$ の最小値は　　$f(a) = \boldsymbol{a}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $2^m \leqq 4m^2$，$2^{m+1} > 4(m+1)^2$ より　　$2(m+1)^2 < 2^m \leqq 4m^2$　$\cdots$①

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$2(m+1)^2$	8	18	32	50	72	98	128	162
2^m	2	4	8	16	32	64	128	256
$4m^2$	4	16	36	64	100	144	196	256

① を満たす最小の m であるから　　$\boldsymbol{m = 8}$

(2) (1) の結果から　　$2^n > 4n^2 \quad (n \geqq 8) \quad \cdots (*)$

これを数学的帰納法を用いて証明する．

(i) $n = 9$ のとき　$2^9 = 512$，$4 \cdot 9^2 = 324$　　よって，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$2^k > 4k^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{k+1} > 8k^2$$

ここで

$$\begin{aligned} 8k^2 - 4(k+1)^2 &= 4k^2 - 8k - 4 \\ &= 4\{(k-1)^2 - 2\} = 4(8^2 - 2) > 0 \end{aligned}$$

したがって　　$2^{k+1} > 8k^2 > 4(k+1)^2$

よって，$n = k+1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，9 以上の自然数 n に対して，$(*)$ は成り立つ．

(3) (1) の表および (2) の結論により

$$\begin{array}{ll} 1 \leqq k \leqq 7 \text{ のとき} & 2^k - 4k^2 < 0 \\ k = 8 \text{ のとき} & 2^k - 4k^2 = 0 \\ 9 \leqq k \text{ のとき} & 2^k - 4k^2 > 0 \end{array}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 4k^2 = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 4k^2)$$

ゆえに，S_n を最小にする整数 n は　$n = 7,\ 8$

よって，求める S_n の最小値は

$$\begin{aligned} S_7 &= \sum_{k=1}^{7} 2^k - \sum_{k=1}^{7} 4k^2 \\ &= \frac{2(2^7 - 1)}{2 - 1} - 4 \times \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 15 = \mathbf{-306} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $(xy+1)^2-(x+y)^2=(xy+x+y+1)(xy-x-y+1)$

$$=(x+1)(y+1)(x-1)(y-1)$$
$$=(x^2-1)(y^2-1)=(1-|x|^2)(1-|y|^2)$$
$$=(1+|x|)(1-|x|)(1+|y|)(1-|y|)$$

したがって，$|x| \leqq 1$ かつ $|y| \leqq 1$ ならば　$1-|x| \geqq 0$，$1-|y| \geqq 1$

ゆえに　$(x+y)^2 \leqq (xy+1)^2$　よって，この命題は**真**である．

(2) **偽** (反例)

$a=b=0,\ c>0$ のとき，すべての x について　$ax^2+bx+c>0$

このとき　　$b^2-4ac=0$

(3) a は整数，$x^2+3x+a=0$　$\cdots$ ①

① が有理数の解 $\dfrac{p}{q}$ (p と q は互いに素な整数, $q>0$) をもつとすると

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2+3\left(\frac{p}{q}\right)+a=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{p^2}{q}=-aq-3p$$

右辺は整数であるから，左辺も整数．また，p，q は互いに素であるから，$q=1$．これを上式に代入すると

$$p^2=-a-3p \quad \text{ゆえに} \quad a=-p(p+3)$$

p と $p+3$ の偶奇は一致しないので，$p(p+3)$ は偶数．ゆえに，a は偶数．

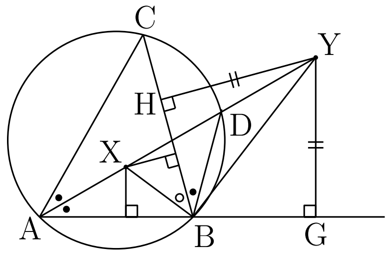
よって，この命題は**真**である．

5 (1) ① (あ) XK

② (い) XC　(う) XD

(2) ① $\angle\mathrm{CAB} = 2\alpha$，$\angle\mathrm{CBX} = \beta$ とおく．

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の円周角により



$$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{CBD} = \alpha$$

条件により，$\mathrm{DX} = \mathrm{DB}$ であるから

$$\angle\mathrm{DXB} = \angle\mathrm{DBX} = \alpha + \beta$$

$\triangle\mathrm{XAB}$ について，$\angle\mathrm{XAB} + \angle\mathrm{XBA} = \angle\mathrm{DXB}$ であるから

$$\alpha + \angle\mathrm{XBA} = \alpha + \beta \quad \text{ゆえに} \quad \angle\mathrm{XBA} = \beta$$

$\angle\mathrm{CBX} = \angle\mathrm{XBA}$ となり，BX は $\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線である．

よって，X より辺 BC，AB にひいた垂線の長さは等しい．

② Y から辺 AB，BC にそれぞれ垂線 YG，YH を引く．$\mathrm{YG} = \mathrm{YB}$ より，

$\triangle\mathrm{YBG} \equiv \triangle\mathrm{YBH}$ であるから，$\angle\mathrm{DBY} = \gamma$ とおくと

$$\angle\mathrm{YBG} = \angle\mathrm{YBH} = \alpha + \gamma$$

$\angle\mathrm{YBG} + \angle\mathrm{YBH} + \angle\mathrm{ABC} = 180^\circ$ であるから

$$(\alpha + \gamma) + (\alpha + \gamma) + 2\beta = 180^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \gamma = 90^\circ - \alpha - \beta$$

$\triangle\mathrm{DBX}$ において，上の結果により

$$\angle\mathrm{BDX} = 180^\circ - 2(\alpha + \beta) = 2(90^\circ - \alpha - \beta) = 2\gamma$$

$\angle\mathrm{DBY} + \angle\mathrm{DYB} = \angle\mathrm{BDX}$ であるから

$$\gamma + \angle\mathrm{DYB} = 2\gamma \quad \text{ゆえに} \quad \angle\mathrm{DYB} = \gamma$$

$\angle\mathrm{DBY} = \angle\mathrm{DYB}$ であるから　$\mathrm{DB} = \mathrm{DY}$

また，条件により，$\mathrm{DB} = \mathrm{DX}$ であるから　$\mathrm{DX} = \mathrm{DY}$

よって，D は線分 XY の中点である．

補足 X は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心．4 点 B，C，X，Y は D を中心とする同心円上にある．

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\triangle$ABC の重心を G$'$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG'}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OG}} = 3k\overrightarrow{\mathrm{OG'}}$$

G が四面体 OABC の内部にあるとき

$$0 < 3k < 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0 < k < \frac{1}{3}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ，C から平面 OAB に垂線 CH を引き，$\angle\mathrm{COH} = \alpha$ とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB} \times \mathrm{OC}\sin\alpha = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta \times \mathrm{OC}\sin\alpha \\ &= \frac{1}{6}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin\theta\sin\alpha \end{aligned}$$

3 点 P，Q，R は，それぞれ OA，OB，OC 上の点であるから，上の結果を利用して

$$V' = \frac{1}{6}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}\sin\theta\sin\alpha \quad \text{よって} \quad \frac{\mathrm{V'}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{pqr}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{1}{p}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{1}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{1}{r}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\left(\frac{1}{p}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{1}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{1}{r}\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right) = \frac{k}{p}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{k}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{k}{r}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

このとき $\dfrac{k}{p} + \dfrac{k}{q} + \dfrac{k}{r} = 1$ よって $\boldsymbol{k = \dfrac{pqr}{pq+qr+rp}}$

(4) $p = 3k = \dfrac{1}{2}$ であるから，$p = \dfrac{1}{2}$，$k = \dfrac{1}{6}$ を (3) の結果に代入すると

$$\frac{1}{6} = \frac{\frac{1}{2}qr}{\frac{1}{2}q + qr + \frac{1}{2}r} \qquad \text{ゆえに} \qquad 4qr = q + r$$

$q > 0$，$r > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により $q+r \geqq 2\sqrt{qr}$

したがって $4qr \geqq 2\sqrt{qr}$ ゆえに $qr \geqq \dfrac{1}{4}$

上式において，等号が成立するのは，$q = r = \dfrac{1}{2}$ のときである．

したがって $\dfrac{V'}{V} = pqr = \dfrac{1}{2}qr \geqq \dfrac{1}{8}$ よって，求める最小値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 与えられた条件により，点 z が移動した点を w とすると

$$w = \alpha + (z-\alpha)(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \cdots(*)$$

このとき，$\alpha = i$，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$w = i + (z-i)i = i(z+1-i)$$

また，$|w| = \dfrac{1}{2}|\alpha| = \dfrac{1}{2}|i| = 1$ であるから

$$|w| = |i(z+1-i)| \quad \text{ゆえに} \quad |z+1-i| = \frac{1}{2}$$

よって，z は，**点 $\boldsymbol{-1+i}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ の円.**

(2) $(*)$ より $\qquad |w| = |\alpha + (z-\alpha)(\cos\theta + i\sin\theta)|$

これに $|w| = \dfrac{1}{2}|\alpha|$ を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\alpha| &= |\cos\theta + i\sin\theta)|\left|\frac{\alpha}{\cos\theta + i\sin\theta} + z - \alpha\right| \\ &= |\alpha(\cos\theta - i\sin\theta) + z - \alpha| \\ &= |z - \alpha(1 - \cos\theta + i\sin\theta)|\end{aligned}$$

よって，点 z は，**$\boldsymbol{\alpha(1-\cos\theta + i\sin\theta)}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}|\alpha|}$ の円.**

(3) (2) の円の中心の実部 $\alpha(1-\cos\theta)$ の絶対値がこの円の半径 $\dfrac{1}{2}|\alpha|$ に等しいとき，この円は虚軸に接するから

$$|\alpha(1-\cos\theta)| = \frac{1}{2}|\alpha|$$

ここで，$\alpha \neq 0$，$1-\cos\theta \geqq 0$ に注意して

$$1-\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $\qquad \boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}}$

$\boxed{8}$ (1) $n=4$ のとき，それぞれの袋には金色のカード 3 枚と銀色のカード 9 枚が入っている．したがって，求める確率は

$$P(X_4=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{64}},$$
$$P(X_4=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\boldsymbol{\frac{27}{128}}$$

(2) (1) と同様にして

$$P(X_4=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256},$$
$$P(X_4=1)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{108}{256},$$
$$P(X_4=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$$

したがって，$n=4$ のときの X_4 の確率分布表は次のようになる．

X	0	1	2	3	4	計
$P(X)$	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$	1

よって，求める期待値は

$$100\times\frac{108}{256}+200\times\frac{54}{256}+300\times\frac{12}{256}+400\times\frac{1}{256}=\mathbf{100}\ (円)$$

別解 X_4 は二項分布 $B\left(4,\ \frac{1}{4}\right)$ に従うので，求める期待値は

$$E(100X_4)=100E(X_4)=100\times4\cdot\frac{1}{4}=100\ (円)$$

(3) $P(X_n=3)={}_n\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{3n}\right)^3\left(\frac{3n-3}{3n}\right)^{n-3}=\boldsymbol{\frac{(n-2)(n-1)^{n-2}}{6n^{n-1}}}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P(X_n=3)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\frac{n}{n-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\boldsymbol{\frac{1}{6e}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $ax=b$がただ1つの解をもつときの条件は　$\boldsymbol{a \neq 0}$

$ax=b$が無数の解をもつときの条件は　$\boldsymbol{a=b=0}$

(2)
$$\begin{aligned} -3x-2y+z&=3 &\cdots ① \\ (2a+3)x+3y-2z&=-2 &\cdots ② \\ 2x+ay-z&=1 &\cdots ③ \end{aligned}$$

①$\times 2+$②より　$(2a-3)x-y=4 \quad \cdots ④$

①$+$②より　$-x+(a-2)y=4 \quad \cdots ⑤$

④$\times(a-2)+$⑤より

$$\{(2a-3)(a-2)-1\}x=4(a-2)+4$$
$$(a-1)(2a-5)x=4(a-1) \quad \cdots ⑥$$

①，④からyを消去すると　$z=(4a-3)x-5$

上式および④，⑥から

$$(*)\begin{cases} (a-1)(2a-5)x=4(a-1) \\ y=(2a-3)x-4 \\ z=(4a-3)x-5 \end{cases}$$

$(*)$から，ただ1つの解をもつとき　$(a-1)(2a-5)\neq 0$　すなわち　$\boldsymbol{a \neq 1,\ \dfrac{5}{2}}$

このとき，$(*)$の第1式から　$\boldsymbol{x=\dfrac{4}{2a-5}}$

これを$(*)$の第2・3式に代入すると　$\boldsymbol{y=\dfrac{8}{2a-5},\ z=\dfrac{6a+13}{2a-5}}$

(3) 方程式が無数の解をもつとき，$(*)$の第1式から　$\boldsymbol{a=1}$

このときの解$x=u$，$y=v$，$z=w$は，$a=1$を$(*)$の第2・3式に代入することにより

$$\boldsymbol{v=-u-4,\ \ w=u-5}$$

(4) 連立方程式が解をもたないとき，$(*)$の第1式から　$\boldsymbol{a=\dfrac{5}{2}}$

解説 与えられた行列の行列式をΔとすると　$\Delta=(a-1)(2a-5)$

方程式がただ一つの解をもつとき，$\Delta\neq 0$，すなわち，$a\neq 1,\ \dfrac{5}{2}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\cdots(*)$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1 \quad \cdots ①$$

この直線は原点を通らないから，これが接線 $y=mx+n$ に一致するとき，$n\neq 0$ であるから

$$-\frac{mx}{n}+\frac{y}{n}=1 \quad \cdots ②$$

①，② から　$\dfrac{x_1}{a^2}=-\dfrac{m}{n},\ -\dfrac{y_1}{b^2}=\dfrac{1}{n}$　ゆえに　$\dfrac{x_1}{a}=-\dfrac{ma}{n},\ \dfrac{y_1}{b}=-\dfrac{b}{n}$

点 $(x_1,\ y_1)$ は双曲線 $(*)$ 上の点であるから

$$\left(-\frac{ma}{n}\right)^2-\left(-\frac{b}{n}\right)^2=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{n=\pm\sqrt{m^2a^2-b^2}}$$

別解 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$y=mx+n$ から y を消去して整理すると

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+b^2)=0$$

双曲線の漸近線が $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ であるから，$m<-\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{b}{a}<m$ より，$b^2-a^2m^2\neq 0$ であることに注意して，上式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D/4&=(-a^2mn)^2+a^2(b^2-a^2m^2)(n^2+b^2)\\&=a^2b^2(b^2-m^2a^2+n^2)\end{aligned}$$

このとき，$D=0$ であるから　$n=\pm\sqrt{m^2a^2-b^2}$

(2) 点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$ を通り，直線 $y=mx+n$ に垂直な直線は　$y=-\dfrac{1}{m}(x-c)$

この 2 直線の交点 H の座標は，連立方程式を解いて

$$\mathrm{H}\left(\frac{c-mn}{m^2+1},\ \frac{mc+n}{m^2+1}\right)$$

したがって　$\mathrm{OH}^2=\left(\dfrac{c-mn}{m^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{mc+n}{m^2+1}\right)^2=\dfrac{n^2+c^2}{m^2+1} \quad \cdots ③$

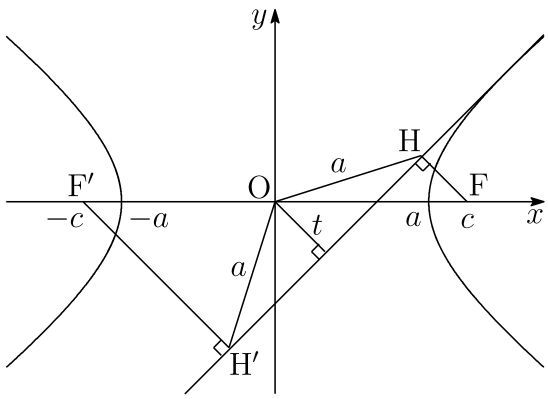
これに (1) の結果および $c=\sqrt{a^2+b^2}$ を代入すると

$$\mathrm{OH}^2=\frac{(a^2m^2-b^2)+(a^2+b^2)}{m^2+1}=a^2$$

OH' は ③ の c を $-c$ に置き換えたものであるから，$\mathrm{OH}'=\mathrm{OH}$

よって，H，H$'$ は，原点 O を中心とする半径 a の円周上にある．

(3) (2) の結果から，$\triangle\mathrm{HOH}'$ は，$\mathrm{OH}=\mathrm{OH}'=a$ の二等辺三角形であるから



$$\mathrm{HH}'=2\sqrt{a^2-t^2}$$

したがって

$$S=\frac{1}{2}t\cdot\mathrm{HH}'=\boldsymbol{t\sqrt{a^2-t^2}}$$

双曲線の接線は原点を通らない．また，直線 $y=mx+n$ は双曲線の頂点 $(\pm a,\ 0)$ を通らないから，2 点 H，H$'$ は円周上の異なる点である．したがって，t のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{0<t<a}$$

ゆえに　$S=\sqrt{t^2(a^2-t^2)}=\sqrt{-\left(t^2-\frac{a^2}{2}\right)^2+\frac{a^4}{4}}$

よって　$t^2=\frac{a^2}{2}$　すなわち　$t=\frac{a}{\sqrt{2}}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{\frac{a^2}{2}}$ をとる．

$\boxed{\textbf{11}}$ (1) $\sqrt[k]{c} < a_n$，$f(x) = x^k - c$，$f'(x) = kx^{k-1}$ より

$$f(a_n) > 0, \quad f'(a_n) > 0$$

定義式により，$a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)} \cdots (*)$ であるから

$$a_n - a_{n+1} = \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_n > a_{n+1} \quad \cdots ①$$

$f(x)$ は区間 $[\sqrt[k]{c},\ a_n]$ で連続で，区間 $(\sqrt[k]{c},\ a_n)$ で微分可能であるから

$$\frac{f(a_n) - f(\sqrt[k]{c})}{a_n - \sqrt[k]{c}} = f'(d) \quad (\sqrt[k]{c} < d < a_n)$$

を満たす d が存在する．このとき，$f(\sqrt[k]{c}) = 0$ であるから

$$f(a_n) = kd^{k-1}(a_n - \sqrt[k]{c})$$

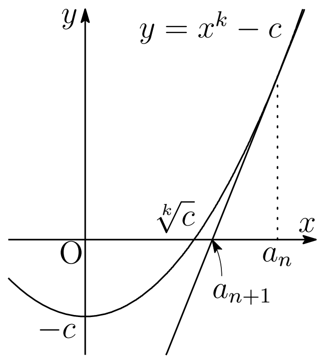
上式および $f'(a_n) = k{a_n}^{k-1}$ を $(*)$ に代入すると

$$a_{n+1} = a_n - \frac{kd^{k-1}(a_n - \sqrt[k]{c})}{k{a_n}^{k-1}} = a_n - (a_n - \sqrt[k]{c})\left(\frac{d}{a_n}\right)^{k-1}$$

ゆえに $$a_{n+1} - \sqrt[k]{c} = (a_n - \sqrt[k]{c})\left\{1 - \left(\frac{d}{a_n}\right)^{k-1}\right\} > 0 \quad \cdots ②$$

①，② より $\quad \sqrt[k]{c} < a_{n+1} < a_n$

解説 $y = f(x)$ 上の点 $(a_n,\ f(a_n))$ における接線の方程式は



$$y - f(a_n) = f'(a_n)(x - a_n)$$

この直線の x 軸との交点の x 座標を a_{n+1} とすると

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

$f(x) = x^k - c$ ($c > 0, k$ は 2 以上の整数) であるから，$\sqrt[k]{c} < a_n$ ならば

$$\sqrt[k]{c} < a_{n+1} < a_n$$

参照 ニュートン法 (http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{8}$)

(2) $k=3$ のとき，$(*)$ より

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n - \frac{{a_n}^3 - c}{3{a_n}^2} \\
a_{n+1} - \sqrt[3]{c} &= a_n - \sqrt[3]{c} - \frac{(a_n - \sqrt[3]{c})({a_n}^2 + a_n\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2})}{3{a_n}^2} \\
&= (a_n - \sqrt[3]{c})\left(1 - \frac{{a_n}^2 + a_n\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2}}{3{a_n}^2}\right) \\
&= \frac{(a_n - \sqrt[3]{c})(2{a_n}^2 - a_n\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{c^2})}{3{a_n}^2} \\
&= \frac{(a_n - \sqrt[3]{c})^2(2a_n + \sqrt[3]{c})}{3{a_n}^2} \quad \cdots ③
\end{aligned}
$$

ここで，$\sqrt[3]{c} < a_n$ より

$$
\frac{2a_n + \sqrt[3]{c}}{3{a_n}^2} < \frac{2a_n + \sqrt[3]{c}}{2{a_n}^2 + a_n\sqrt[3]{c}} = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}} \quad \cdots ④
$$

③，④ より　　$a_{n+1} - \sqrt[3]{c} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n - \sqrt[3]{c})^2$

(3) (2) の結果に $c=2$，$a_1 = 1.3$ を適用すると

$$
\begin{aligned}
a_5 - \sqrt[3]{2} &< \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(a_4 - \sqrt[3]{2})^2 \\
&< \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 (a_3 - \sqrt[3]{2})^4 \\
&< \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^4 (a_2 - \sqrt[3]{2})^8 \\
&< \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^4 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^8 (a_1 - \sqrt[3]{2})^{16} \\
&= \frac{1}{2^5}(1.3 - \sqrt[3]{2})^{16} \quad \cdots ⑤
\end{aligned}
$$

ここで，$1.2^3 = 1.728 < 2$ より，$1.2 < \sqrt[3]{2}$ であるから

$$
1.3 - \sqrt[3]{2} < 1.3 - 1.2 = \frac{1}{10} \quad \cdots ⑥
$$

⑤，⑥ より　　$a_5 - \sqrt[3]{2} < \dfrac{1}{2^5 \cdot 10^{16}}$