平成 29 年度　九州大学 2 次試験後期日程 (数学問題)150 分
理学部 (数学科)　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4

1 座標空間における xy 平面上に，原点 O を一つの頂点とし，AB を斜辺とする直角三角形 OAB がある．また xy 平面上にない点 C をとり，C から xy 平面におろした垂線と xy 平面の交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 点 G を △OAB の重心とし，点 H は O と G を通る直線上にあるとする．H が O と異なるとき，2 つの角 $\alpha = \angle\mathrm{AOC}$ と $\beta = \angle\mathrm{BOC}$ に対して，$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

2 複素数 α を $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ とおく．ただし，i は虚数単位を表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$ の値を求めよ．

(2) $t = \alpha + \overline{\alpha}$ とおくとき，$t^3 + t^2 - 2t$ の値を求めよ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す．

(3) $\dfrac{3}{5} < \cos\dfrac{2\pi}{7} < \dfrac{7}{10}$ を示せ．

3 放物線 $C : y = -x^2 - 1$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ に対して，P_1 と P_2 を通る直線と x 軸との交点の座標を $(a,\ 0)$ とする．ただし，$x_1 + x_2$ は 0 でないとする．また，$0 < t < \pi$ を満たす t に対して $f(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) a を x_1，x_2 を用いて表せ．

(2) $(f(t),\ f'(t))$ は C 上の点であることを示せ．

(3) $0 < t_1 < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < t_2 < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす異なる t_1 と t_2 に対して，C 上の 2 点 $\mathrm{P}_1(f(t_1),\ f'(t_1))$，$\mathrm{P}_2(f(t_2),\ f'(t_2))$ で定まる a は $f(t_1 + t_2)$ に等しいことを示せ．

(4) C 上の 2 点 $\mathrm{P}_1(\sqrt{3}, -4)$，$\mathrm{P}_2(f(t),\ f'(t))$ で定まる a が 1 に等しいとき，t の値を求めよ．ただし，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

4 数直線上の点 P を次の規則で移動させる．さいころを投げて，1 または 2 が出れば $+1$ だけ移動させ，3 または 4 が出れば -1 だけ移動させ，5 または 6 が出れば移動させない．はじめに P は原点にあるとし，さいころを n 回投げた後の P の座標を X_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) さいころを 3 回投げて $X_3 = 0$ となる確率を求めよ．

(2) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，$X_n = n - 2$ となる確率を n を用いて表せ．

(3) さいころを 6 回投げて $X_6 = 0$ となったとき，この 6 回のさいころ投げのうち，1 または 2 の目が出た回数が合わせて k 回であった確率を $Q(k)$ $(k = 0, 1, \cdots, 6)$ とおく．$Q(k)$ が最大となる k を求めよ．

解答例

1 (1) xy 平面上のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるから，直交する単位ベクトルを

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

とし，$\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{e}_3$ とする．
このとき，$\vec{c}$ は，$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ を用いて

$$\vec{c} = (\vec{c}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{c}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{c}\cdot\vec{e}_3)\vec{e}_3$$

点 H は xy 平面上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\vec{c}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{c}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 = \frac{\vec{\boldsymbol{c}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}|^2}\vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\vec{\boldsymbol{c}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{b}}|^2}\vec{\boldsymbol{b}}$$

(2) G は △OAB の重心であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であり，点 H は O と異なる直線 OG 上の点であるから，
上式および (1) の結果より

$$\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

これに $\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}|\cos\alpha$，$\vec{c}\cdot\vec{b} = |\vec{c}||\vec{b}|\cos\beta$ を代入すると

$$\frac{|\vec{c}||\vec{a}|\cos\alpha}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{c}||\vec{b}|\cos\beta}{|\vec{b}|^2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\cos\boldsymbol{\alpha}}{\cos\boldsymbol{\beta}} = \frac{|\vec{\boldsymbol{a}}|}{|\vec{\boldsymbol{b}}|}$$

■

2 (1) $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ より　$\alpha^7 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

$\alpha^7 - 1 = 0$ より　$(\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$

$\alpha \neq 1$ であるから　$\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

よって　$\boldsymbol{\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -1}$

(2) $\alpha^6\alpha = \alpha^5\alpha^2 = \alpha^4\alpha^3 = 1$ より

$$\alpha^6 = \overline{\alpha},\quad \alpha^5 = \overline{\alpha^2} = \overline{\alpha}^2,\quad \alpha^4 = \overline{\alpha^3} = \overline{\alpha}^3$$

これらを (1) の結果に代入して整理すると

$$\alpha^3 + \overline{\alpha}^3 + \alpha^2 + \overline{\alpha}^2 + \alpha + \overline{\alpha} + 1 = 0 \quad \cdots ①$$

$\alpha + \overline{\alpha} = t$ であるから

$$\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 = (\alpha + \overline{\alpha})^2 - 2 = t^2 - 2,$$
$$\alpha^3 + \overline{\alpha}^3 = (\alpha + \overline{\alpha})^3 - 3(\alpha + \overline{\alpha}) = t^3 - 3t$$

これらを ① に代入すると

$$(t^3 - 3t) + (t^2 - 2) + t + 1 = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t^3 + t^2 - 2t = 1}$$

(3) $t = \alpha + \overline{\alpha} = 2\cos\dfrac{2\pi}{7} > 0$

$f(t) = t^3 + t^2 - 2t - 1$ とおくと，　$f'(t) = 3t^2 + 2t - 2$

$f'(t) = 0$ とすると　$t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$

$t > 0$ における増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	(-1)	↘	極小	↗

(1) の結果から，t は $f(t) = 0$ $(t > 0)$ の解である．

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{29}{125} < 0,\quad f\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{113}{125} > 0$$

以上の結果から　$\dfrac{6}{5} < 2\cos\dfrac{2\pi}{7} < \dfrac{7}{5}$　よって　$\dfrac{3}{5} < \cos\dfrac{2\pi}{7} < \dfrac{7}{10}$　■

3 (1) $C : y = -x^2 - 1$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1, -{x_1}^2 - 1)$，$\mathrm{P}_2(x_2, -{x_2}^2 - 1)$ を通る直線の方程式は

$$y - (-{x_1}^2 - 1) = \frac{-{x_2}^2 - 1 - (-{x_1}^2 - 1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y = -(x_1 + x_2)(x - x_1) - {x_1}^2 - 1$$
$$y = -(x_1 + x_2)x + x_1x_2 - 1$$

この直線と x 軸との交点の x 座標 a は，$x_1 + x_2 \neq 0$ に注意して

$$0 = -(x_1 + x_2)a + x_1x_2 - 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \frac{x_1x_2 - 1}{x_1 + x_2}}$$

(2) $f(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t}$ を微分すると $\qquad f'(t) = -\dfrac{1}{\sin^2 t}$

したがって $\qquad f'(t) = -\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t} - 1 = -\{f(t)\}^2 - 1$

よって，$(f(t),\ f'(t))$ は C 上の点である．

(3) (1) の結果に $x_1 = f(t_1)$，$x_2 = f(t_2)$ を代入すると

$$a = \frac{f(t_1)f(t_2) - 1}{f(t_1) + f(t_2)} = \frac{\dfrac{\cos t_1}{\sin t_1}\cdot\dfrac{\cos t_2}{\sin t_2} - 1}{\dfrac{\cos t_1}{\sin t_1} + \dfrac{\cos t_2}{\sin t_2}} = \frac{\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2}{\sin t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \sin t_2}$$
$$= \frac{\cos(t_1 + t_2)}{\sin(t_1 + t_2)} = f(t_1 + t_2)$$

(4) P_1 の x 座標について，$f(\alpha) = \sqrt{3}\ \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

(3) の結果に $a = 1$，$t_1 = \dfrac{\pi}{6}$，$t_2 = t$ を代入すると

$$1 = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + t\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + t\right)} \quad \text{ゆえに} \quad \tan\left(\frac{\pi}{6} + t\right) = 1$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{6} + t < \dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{6} + t = \frac{\pi}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{t = \frac{\pi}{12}}$$

■

4 (1) $X_3 = 0$ となるのは，移動が $+1, -1,\ 0$ となる回数が，それぞれ

$$(1,\ 1,\ 1) \quad \text{または} \quad (0,\ 0,\ 3)$$

のときであるから，求める確率は

$$(3! + 1)\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{7}{27}}$$

(2) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，$X_n = n - 2$ となるのは，移動が $+1, -1,\ 0$ となる回数が，それぞれ

$$(n-1,\ 1,\ 0) \quad \text{または} \quad (n-2,\ 0,\ 2)$$

のときであるから，求める確率は

$$({}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2 \cdot 3^n}}$$

(3) 移動の記録を 1 または 2 が a 回（$+1$），3 または 4 が b 回（-1），5 または 6 が c 回（0）とし，6 回試行で $X_6 = 0$ となる場合を考える．条件より $a+b+c = 6,\ a-b = 0$ (即ち $a = b$) であり，$c = 6-2a$ より $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ となる．

$X_6 = 0$ となる確率は，多項分布の公式より，

$$P(X_6 = 0) = \sum_{a=0}^{3} \frac{6!}{a!\,a!\,(6-2a)!}\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1 + 30 + 90 + 20}{3^6} = \frac{141}{3^6}$$

となる．

1 または 2 の目が出る回数を k（$= a$）としたときの条件付き確率 $Q(k)$ は，

$$\begin{aligned} Q(k) &= \frac{P(X_6 = 0 \text{ かつ } a = k)}{P(X_6 = 0)} = \frac{6!}{k!k!(6-2k)!}\left(\frac{1}{3}\right)^6 \Big/ \frac{141}{3^6} \\ &= \frac{6!}{k!k!(6-2k)!} \cdot \frac{1}{141} \end{aligned}$$

である．各 k について計算すると，

$$Q(0) = \frac{1}{141}, \qquad Q(1) = \frac{30}{141} = \frac{10}{47},$$
$$Q(2) = \frac{90}{141} = \frac{30}{47}, \qquad Q(3) = \frac{20}{141}$$

よって，$Q(k)$ が最大となる k は　　$\boldsymbol{k = 2}$ ■