平成 29 年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)150 分
理学部 (数学科)　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標空間における xy 平面上に，原点 O を一つの頂点とし，AB を斜辺とする直角三角形 OAB がある．また xy 平面上にない点 C をとり，C から xy 平面におろした垂線と xy 平面の交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 点 G を $\triangle$OAB の重心とし，点 H は O と G を通る直線上にあるとする．H が O と異なるとき，2 つの角 $\alpha = \angle\mathrm{AOC}$ と $\beta = \angle\mathrm{BOC}$ に対して，$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 複素数 α を $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ とおく．ただし，i は虚数単位を表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$ の値を求めよ．

(2) $t = \alpha + \overline{\alpha}$ とおくとき，$t^3 + t^2 - 2t$ の値を求めよ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す．

(3) $\dfrac{3}{5} < \cos\dfrac{2\pi}{7} < \dfrac{7}{10}$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 放物線 $C : y = -x^2 - 1$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ に対して，P_1 と P_2 を通る直線と x 軸との交点の座標を $(a,\ 0)$ とする．ただし，$x_1 + x_2$ は 0 でないとする．また，$0 < t < \pi$ を満たす t に対して $f(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) a を x_1，x_2 を用いて表せ．

(2) $(f(t),\ f'(t))$ は C 上の点であることを示せ．

(3) $0 < t_1 < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < t_2 < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす異なる t_1 と t_2 に対して，C 上の 2 点 $\mathrm{P}_1(f(t_1),\ f'(t_1))$，$\mathrm{P}_2(f(t_2),\ f'(t_2))$ で定まる a は $f(t_1 + t_2)$ に等しいことを示せ．

(4) C 上の 2 点 $\mathrm{P}_1(\sqrt{3}, -4)$，$\mathrm{P}_2(f(t),\ f'(t))$ で定まる a が 1 に等しいとき，t の値を求めよ．ただし，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数直線上の点Pを次の規則で移動させる．さいころを投げて，1または2が出れば$+1$だけ移動させ，3または4が出れば-1だけ移動させ，5または6が出れば移動させない．はじめにPは原点にあるとし，さいころをn回投げた後のPの座標をX_n $(n = 1, 2, \cdots)$とする．以下の問いに答えよ．

(1) さいころを3回投げて$X_3 = 0$となる確率を求めよ．

(2) 自然数$n \geqq 3$に対し，$X_n = n - 2$となる確率をnを用いて表せ．

(3) さいころを6回投げて$X_6 = 0$となったとき，この6回のさいころ投げのうち，1または2の目が出た回数が合わせてk回であった確率を$Q(k)$ $(k = 0, 1, \cdots, 6)$とおく．$Q(k)$が最大となるkを求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) xy 平面上のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるから，直交する単位ベクトルを

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

とし，$\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{e}_3$ とする．
このとき，$\vec{c}$ は，$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ を用いて

$$\vec{c} = (\vec{c}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{c}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{c}\cdot\vec{e}_3)\vec{e}_3$$

点 H は xy 平面上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\vec{c}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{c}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 = \boldsymbol{\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} + \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}}$$

(2) G は $\triangle$OAB の重心であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であり，点 H は O と異なる直線 OG 上の点であるから，上式および (1) の結果より

$$\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

これに $\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}|\cos\alpha$，$\vec{c}\cdot\vec{b} = |\vec{c}||\vec{b}|\cos\beta$ を代入すると

$$\frac{|\vec{c}||\vec{a}|\cos\alpha}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{c}||\vec{b}|\cos\beta}{|\vec{b}|^2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ より　$\alpha^7 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

$\alpha^7 - 1 = 0$ より　　$(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1) = 0$

$\alpha \neq 1$ であるから　　$\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 = 0$

よって　　$\boldsymbol{\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha = -1}$

(2) $\alpha^6\alpha = \alpha^5\alpha^2 = \alpha^4\alpha^3 = 1$ より

$$\alpha^6 = \overline{\alpha},\quad \alpha^5 = \overline{\alpha^2} = \overline{\alpha}^2,\quad \alpha^4 = \overline{\alpha^3} = \overline{\alpha}^3$$

これらを (1) の結果に代入して整理すると

$$\alpha^3+\overline{\alpha}^3+\alpha^2+\overline{\alpha}^2+\alpha+\overline{\alpha}+1 = 0 \quad \cdots ①$$

$\alpha + \overline{\alpha} = t$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha^2+\overline{\alpha}^2 &= (\alpha+\overline{\alpha})^2 - 2 = t^2 - 2,\\ \alpha^3+\overline{\alpha}^3 &= (\alpha+\overline{\alpha})^3 - 3(\alpha+\overline{\alpha}) = t^3 - 3t\end{aligned}$$

これらを ① に代入すると

$$(t^3-3t)+(t^2-2)+t+1 = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t^3+t^2-2t = 1}$$

(3) $t = \alpha+\overline{\alpha} = 2\cos\dfrac{2\pi}{7} > 0$

$f(t) = t^3+t^2-2t-1$ とおくと，　$f'(t) = 3t^2+2t-2$

$f'(t) = 0$ とすると　　$t = \dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$

$t > 0$ における増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	(-1)	$\searrow$	極小	$\nearrow$

(1) の結果から，t は $f(t) = 0$ $(t > 0)$ の解である．

$$\frac{-1+\sqrt{7}}{3} < \frac{6}{5},\quad f\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{29}{125} < 0,\quad f\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{113}{125} > 0$$

以上の結果から　$\dfrac{6}{5} < 2\cos\dfrac{2\pi}{7} < \dfrac{7}{5}$　よって　$\dfrac{3}{5} < \cos\dfrac{2\pi}{7} < \dfrac{7}{10}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $C : y = -x^2 - 1$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1, -{x_1}^2 - 1)$，$\mathrm{P}_2(x_2, -{x_2}^2 - 1)$ を通る直線の方程式は

$$y - (-{x_1}^2 - 1) = \frac{-{x_2}^2 - 1 - (-{x_1}^2 - 1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y = -(x_1 + x_2)(x - x_1) - {x_1}^2 - 1$$
$$y = -(x_1 + x_2)x + x_1x_2 - 1$$

この直線と x 軸との交点の x 座標 a は，$x_1 + x_2 \neq 0$ に注意して

$$0 = -(x_1 + x_2)a + x_1x_2 - 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \frac{x_1x_2 - 1}{x_1 + x_2}}$$

(2) $f(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t}$ を微分すると　$f'(t) = -\dfrac{1}{\sin^2 t}$

したがって　$f'(t) = -\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t} - 1 = -\{f(t)\}^2 - 1$

よって，$(f(t),\ f'(t))$ は C 上の点である．

(3) (1) の結果に $x_1 = f(t_1)$，$x_2 = f(t_2)$ を代入すると

$$a = \frac{f(t_1)f(t_2) - 1}{f(t_1) + f(t_2)} = \frac{\dfrac{\cos t_1}{\sin t_1}\cdot\dfrac{\cos t_2}{\sin t_2} - 1}{\dfrac{\cos t_1}{\sin t_1} + \dfrac{\cos t_2}{\sin t_2}} = \frac{\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2}{\sin t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \sin t_2}$$
$$= \frac{\cos(t_1 + t_2)}{\sin(t_1 + t_2)} = f(t_1 + t_2)$$

(4) P_1 の x 座標について，$f(\alpha) = \sqrt{3}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

(3) の結果に $a = 1$，$t_1 = \dfrac{\pi}{6}$，$t_2 = t$ を代入すると

$$1 = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + t\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + t\right)} \quad \text{ゆえに} \quad \tan\left(\frac{\pi}{6} + t\right) = 1$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{6} + t < \dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{6} + t = \frac{\pi}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{t = \frac{\pi}{12}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $X_3=0$ となるのは，移動が $+1, -1,\ 0$ となる回数が，それぞれ

$$(1,\ 1,\ 1) \quad \text{または} \quad (0,\ 0,\ 3)$$

のときであるから，求める確率は

$$(3!+1)\left(\frac{1}{3}\right)^3=\boldsymbol{\frac{7}{27}}$$

(2) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，$X_n=n-2$ となるのは，移動が $+1, -1,\ 0$ となる回数が，それぞれ

$$(n-1,\ 1,\ 0) \quad \text{または} \quad (n-2,\ 0,\ 2)$$

のときであるから，求める確率は

$$({}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2)\left(\frac{1}{3}\right)^n=\boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2\cdot 3^n}}$$

(3) (i) $k=0$ のとき，移動が $+1, -1,\ 0$ となる回数は，それぞれ $(0,\ 0,\ 6)$ であるから，その確率は

$$Q(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{1}{3^6}$$

(ii) $k=1$ のとき，移動が $+1, -1,\ 0$ となる回数は，それぞれ $(1,\ 1,\ 4)$ であるから，その確率は

$$Q(1)=\frac{6!}{1!1!4!}\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{30}{3^6}$$

(iii) $k=2$ のとき，移動が $+1, -1,\ 0$ となる回数は，それぞれ $(2,\ 2,\ 2)$ であるから，その確率は

$$Q(2)=\frac{6!}{2!2!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{90}{3^6}$$

(iv) $k=3$ のとき，移動が $+1, -1,\ 0$ となる回数は，それぞれ $(3,\ 3,\ 0)$ であるから，その確率は

$$Q(3)=\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{20}{3^6}$$

(v) $4 \leqq k \leqq 6$ のとき　$Q(k)=0$

(i)〜(iv) より，求める最大の k は　　$\boldsymbol{k=2}$