# 平成 28 年度　九州大学 2 次試験後期日程 (数学問題)150 分
# 理学部 (数学科)　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B

**1** $n$ を自然数，$k$ を $0 \leqq k \leqq n$ を満たす整数として，関数 $f_{n,k}(x)$ を $f_{n,k}(x) = {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k}$ で定める．ただし，${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数とする．$S_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 f_{n,k}(x)\,dx$ で定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $S_{n,0}$ の値を求めよ．

(2) $S_{n,k}$ の値を求めよ．

(3) 不等式 $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq f_{n,k}(x)$ の表す領域を，$x$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V_{n,k}$ とする．$k$ が $0 \leqq k \leqq n-1$ を満たすとき，$\dfrac{V_{n,k+1}}{V_{n,k}}$ を $n$ と $k$ の式で表せ．

(4) $n$ が偶数のとき，$V_{n,k}$ が最小値をとる $k$ の値を $n$ の式で表せ．

**2** $N$ を 2 以上の自然数，$i$ を虚数単位，複素数 $\alpha$ を $\alpha = \cos\dfrac{\pi}{N} + i\sin\dfrac{\pi}{N}$ とする．また，整数 $m$ に対して，$S_m = i\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha^{(2m+1)k}}{\sin\dfrac{k\pi}{N}}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $1 \leqq m \leqq N-1$ を満たす整数 $m$ に対して，$T_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \alpha^{2mk}$ とおく．$T_m$ を求めよ．

(2) $1 \leqq m \leqq N-1$ を満たす整数 $m$ に対して，$S_m - S_{m-1}$ を求めよ．

(3) $1 \leqq m \leqq N-1$ を満たす整数 $m$ に対して，$\dfrac{\alpha^k + \alpha^{N-k}}{\sin\dfrac{k\pi}{N}}$ を求めよ．

(4) $S_0$ を求めよ．

(5) $0 \leqq m \leqq N-1$ を満たす整数 $k$ に対して，$S_m$ を求めよ．

**3** サイコロを投げてその目を記録する，という操作を繰り返し行う．$n$ を 2 以上の自然数として，1 回目から $n$ 回目までに出た目の最大公約数を $X_n$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $X_2 = 1$ となる確率を求めよ．

(2) $X_n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ となる確率をそれぞれ求めよ．

(3) $X_2, \cdots,\ X_n$ はいずれも 1 でなく，$X_{n+1} = 1$ となる確率を求めよ．

**4** 以下の問いに答えよ．

(1) 2016 と $2^{2016} + 1$ は互いに素であることを証明せよ．

(2) $2^{2016} + 1$ を 2016 で割った余りを求めよ．

(3) $2^{2016}(2^{2016} + 1)(2^{2016} + 2) \cdots (2^{2016} + m)$ が 2016 の倍数となる最小の自然数 $m$ を求めよ．

**解答例**

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $S_{n,0}=\displaystyle\int_0^1 f_{n,0}(x)\,dx=\int_0^1 {}_n\mathrm{C}_0x^0(1-x)^n\,dx$

$$=\int_0^1(1-x)^n\,dx=\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}}$$

**補足** $\displaystyle\int_0^1(1-x)^n\,dx$ について，$t=1-x$ とおくと，$dx=-dt$，

| $x$ | $0\longrightarrow 1$ |
|---|---|
| $t$ | $1\longrightarrow 0$ |

$$\int_0^1(1-x)^n\,dx=\int_1^0 t^n(-dt)=\int_0^1 t^n\,dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

(2) $S_{n,k}=\displaystyle\int_0^1 f_{n,k}(x)\,dx={}_n\mathrm{C}_k\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$

ここで，$I_{n,k}=\displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$ とおくと

$$\begin{aligned}I_{n,k}&=\int_0^1\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)'(1-x)^{n-k}\,dx\\&=\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}(1-x)^{n-k}\right]_0^1+\frac{n-k}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}x^{n-k-1}\,dx\\&=\frac{n-k}{k+1}I_{n,k+1}\end{aligned}$$

したがって $\quad I_{n,k}=\dfrac{n-k}{k+1}\cdot\dfrac{n-k-1}{k+2}\cdots\dfrac{1}{n}I_{n,n}$

$$=\frac{k!(n-k)!}{n!}\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}\cdot\frac{1}{n+1}\qquad\cdots①$$

よって $\quad S_{n,k}={}_n\mathrm{C}_k\times\dfrac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}\cdot\dfrac{1}{n+1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{n+1}}$

(3) $V_{n,k}=\pi\displaystyle\int_0^1\{f_{n,k}(x)\}^2\,dx=\pi({}_n\mathrm{C}_k)^2\int_0^1 x^{2k}(1-x)^{2n-2k}\,dx=\pi({}_n\mathrm{C}_k)^2I_{2n,2k}$

上式および ① から

$$\begin{aligned}\frac{V_{n,k+1}}{V_{n,k}}&=\frac{\pi({}_n\mathrm{C}_{k+1})^2I_{2n,2k+2}}{\pi({}_n\mathrm{C}_k)^2I_{2n,2k}}=\left(\frac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k}\right)^2\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+2}}\\&=\left\{\frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!}\right\}^2\cdot\frac{(2n-2k-2)!(2k+2)!}{(2n-2k)!(2k)!}\\&=\boldsymbol{\frac{(2k+1)(n-k)}{(k+1)(2n-2k-1)}}\qquad\boldsymbol{(0\leqq k\leqq n-1)}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{V_{n,k+1}}{V_{n,k}}-1&=\frac{(2k+1)(n-k)}{(k+1)(2n-2k-1)}-1\\&=\frac{2\left(k-\frac{n-1}{2}\right)}{(k+1)(2n-2k-1)}\qquad(0\leqq k\leqq n-1)\end{aligned}$$

$n$ は偶数であるから

$$V_{n,0}>V_{n,1}>\cdots>V_{n,\frac{n}{2}-1}>V_{n,\frac{n}{2}}<V_{n,\frac{n}{2}+1}<\cdots<V_{n,n}$$

よって，求める $k$ の値は　$\boldsymbol{k=\dfrac{n}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $1\leqq m\leqq N-1$，$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{N}+i\sin\dfrac{\pi}{N}$ に対して

$$\alpha^{2mN}=1,\quad \alpha^{2m}\neq 1,\quad \alpha^{2mN}-1=(\alpha^{2m}-1)\sum_{k=0}^{N-1}\alpha^{2mk}$$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\alpha^{2mk}=0$　よって　$\displaystyle T_m=\sum_{k=1}^{N-1}\alpha^{2mk}=\boldsymbol{-1}$

(2) $\alpha^k=\cos\dfrac{k\pi}{N}+i\sin\dfrac{k\pi}{N}$，$\alpha^{-k}=\cos\dfrac{k\pi}{N}-i\sin\dfrac{k\pi}{N}$ であるから

$$\alpha^k-\alpha^{-k}=2i\sin\frac{k\pi}{N}\qquad\cdots(*)$$

よって　$$\begin{aligned}S_m-S_{m-1}&=i\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\alpha^{(2m+1)k}-\alpha^{(2m-1)k}}{\sin\frac{k\pi}{N}}=i\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\alpha^{2mk}(\alpha^k-\alpha^{-k})}{\sin\frac{k\pi}{N}}\\&=-2\sum_{k=1}^{N-1}\alpha^{2mk}=-2T_m=-2(-1)=\mathbf{2}\end{aligned}$$

(3) $\alpha^N=\cos\pi+i\sin\pi=-1$ であるから，$(*)$ より

$$i\frac{\alpha^k+\alpha^{N-k}}{\sin\frac{k\pi}{N}}=i\frac{\alpha^k+\alpha^N\alpha^{-k}}{\sin\frac{k\pi}{N}}=i\frac{\alpha^k-\alpha^k}{\sin\frac{k\pi}{N}}=i\cdot 2i=\boldsymbol{-2}$$

(4) 定義より　$S_0 = i\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha^k}{\sin\dfrac{k\pi}{N}}$　$\cdots$①

上式より　$S_0 = i\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha^{N-k}}{\sin\dfrac{(N-k)\pi}{N}} = i\sum_{k=1}^{N-1} \frac{-\alpha^{-k}}{\sin\dfrac{k\pi}{N}}$　$\cdots$②

$(*)$ に注意して，①，② の辺々を加えると

$$2S_0 = i\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha^k - \alpha^{-k}}{\sin\dfrac{k\pi}{N}} = i\sum_{k=1}^{N-1} 2i = -2\sum_{k=1}^{N-1} = -2(N-1)$$

よって　$\boldsymbol{S_0 = -N+1}$

(5) (2),(4) の結果から

$$S_m = S_0 + \sum_{k=1}^{m}(S_k - S_{k-1}) = -N+1+\sum_{k=1}^{m} 2 = \boldsymbol{-N+1+2m}$$

**解説** $-N+1 \leqq m \leqq -1$ についても $T_m = -1$ が成り立つ．とくに，$T_0 = N-1$.

$$S_m = i\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha^{(2m+1)k}}{\sin\dfrac{k\pi}{N}},$$

$$S_m = i\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha^{(2m+1)(N-k)}}{\sin\dfrac{(N-k)\pi}{N}} = i\sum_{k=1}^{N-1} \frac{-\alpha^{-(2m+1)k}}{\sin\dfrac{k\pi}{N}}$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}
S_m &= i\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha^{(2m+1)k} - \alpha^{-(2m+1)k}}{2\sin\dfrac{k\pi}{N}} \\
&= i\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{2m+1} \frac{(\alpha^k - \alpha^{-k})\alpha^{(2m+1-j)k}\alpha^{-(j-1)k}}{2\sin\dfrac{k\pi}{N}} \\
&= -\sum_{j=1}^{2m+1}\sum_{k=1}^{N-1} \alpha^{2(m+1-j)k} = -\sum_{j=1}^{2m+1} T_{m+1-j} \\
&= -\sum_{j=1}^{m}(T_j + T_{-j}) - T_0 \\
&= -\sum_{j=1}^{m}(-1-1) - (N-1) = 2m - N + 1
\end{aligned}$$

**3** (1) 1回目に出た目を $i$，2回目に出た目を $j$ とすると，$X_2$ は，右の表のようになる．
よって，$X_2=1$ となる確率は

$$P(X_2=1)=\boldsymbol{\frac{23}{36}}$$

| $j \backslash i$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| **3** | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| **4** | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| **5** | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 |
| **6** | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 6 |

(2) $X_n=k$ $(k=4,5,6)$ となる確率は，$n$ 回とも $k$ の目が出る確率であるから

$$P(X_n=k)=\left(\frac{1}{6}\right)^n=\boldsymbol{\frac{1}{6^n}} \qquad (k=4,5,6)$$

$X_n=2$ となる確率は，$n$ 回とも2または4または6である確率から $X_n=4$ と $X_n=6$ である確率を引けばよいから

$$\begin{aligned}P(X_n=2)&=\left(\frac{3}{6}\right)^n-P(X_n=4)-P(X_n=6)\\&=\frac{3^n}{6^n}-\frac{1}{6^n}-\frac{1}{6^n}=\boldsymbol{\frac{3^n-2}{6^n}}\end{aligned}$$

$X_n=3$ となる確率は，$n$ 解とも3または6である確率から $X_n=6$ である確率を引けばよいから

$$\begin{aligned}P(X_3)&=\left(\frac{2}{6}\right)^2-P(X_n=6)\\&=\frac{2^n}{6^n}-\frac{1}{6^n}=\boldsymbol{\frac{2^n-1}{6^n}}\end{aligned}$$

(3) $n+1$ 回目に出たサイコロの目を $x_{n+1}$ とする．求める確率は

$$\begin{aligned}&P(X_n=2 \text{ かつ } x_{n+1}=1,3,5)\\&+P(X_n=3 \text{ かつ } x_{n+1}=1,2,4,5)\\&+P(X_n=4 \text{ かつ } x_{n+1}=1,3,5)\\&+P(X_n=5 \text{ かつ } x_{n+1}=1,2,3,4,6)\\&+P(X_n=6 \text{ かつ } x_{n+1}=1,5)\\=&\frac{3^n-2}{6^n}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2^n-1}{6^n}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6^n}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6^n}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6^n}\cdot\frac{2}{6}\\=&\boldsymbol{\frac{3^{n+1}+2^{n+2}}{6^{n+1}}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

$$2^{2016} + 1 \equiv 1 \pmod 2$$
$$2^{2016} + 1 = (2^2)^{1008} + 1 \equiv 1^{1008} + 1 \equiv 2 \pmod 3$$
$$2^{2016} + 1 = (2^3)^{672} + 1 \equiv 1^{672} + 1 \equiv 2 \pmod 7$$

$2^{2016} + 1$ は 2，3，7 を因数に持たないので，2016 と $2^{2016} + 1$ は互いに素.

(2) $2^{11} = 2048 \equiv 32 = 2^5 \pmod{2016}$

$n \geqq 11$ の整数に対して

$$2^n = 2^{n-11} \cdot 2^{11} \equiv 2^{n-11} \cdot 2^5 = 2^{n-6} \pmod{2016}$$

したがって　$2^{2016} = 2^{6 \cdot 335 + 6} \equiv 2^6 = 64 \pmod{2016}$

ゆえに　　$2^{2016} + 1 = 65 \pmod{2016}$

よって，求める余りは　　**65**

(3) 法 2016 に関して

$$2^{2016} \equiv 64 = 2^6, \qquad 2^{2016} + 1 \equiv 65 = 5 \cdot 13,$$
$$2^{2016} + 2 \equiv 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11, \qquad 2^{2016} + 3 \equiv 67,$$
$$2^{2016} + 4 \equiv 68 = 2^2 \cdot 17, \qquad 2^{2016} + 5 \equiv 69 = 3 \cdot 23,$$
$$2^{2016} + 6 \equiv 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

よって，$2^{2016}(2^{2016} + 1)(2^{2016} + 2) \cdots (2^{2016} + m)$ が $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ を因数にもつ最小の自然数 $m$ は　**6**