平成 27 年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)150 分
理学部 (数学科)　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B

1 $f(x)$ は 3 次の多項式で，x^3 の係数と定数項は 1 である．α を正の実数とする．関数 $f(x)$ が，$x=-\alpha$ と $x=\alpha$ で極値をとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 等式 $f(-\alpha)-f(\alpha)=4\alpha^3$ が成り立つことを示せ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と放物線 $y=x^2-\dfrac{1}{3}x+1$ がある点 P で接するとき，α の値と点 P の座標を求めよ．ただし，2 つの曲線が点 P で接するとは，それらの曲線が点 P を共有し，点 P で共通の接線をもつことである．

2 n を 0 以上の整数とする．$a_0,\ a_1,\cdots,a_n$ をそれぞれ 0 または 1 とするとき，

$$a_n\times 2^n+\cdots+a_1\times 2+a_0$$

を $[a_n,\cdots,a_1,\ a_0]$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) N を $0\leqq N\leqq 2^{n+1}-1$ を満たす整数とする．このとき，$N=[a_n,\cdots,a_1,\ a_0]$ となる $a_n,\ \cdots,\ a_1,\ a_0$ が存在することを示せ．また，そのような $a_n,\cdots,a_1,\ a_0$ はただ一通りであることを示せ．

以下，$0\leqq N\leqq 2^{n+1}-1$ を満たす整数 N を (1) のように $[a_n,\cdots,a_1,\ a_0]$ と表すとき，

$$S(N)=\sum_{k=0}^{n}a_k$$

とおく．

(2) 等式 $\displaystyle\sum_{N=0}^{2^{n+1}-1}(-1)^{S(N)}=0$ が成り立つことを示せ．

(3) $n\geqq 1$ のとき，等式 $\displaystyle\sum_{N=0}^{2^{n+1}-1}(-1)^{S(N)}N=0$ が成り立つことを示せ．

3 座標平面上で，$y=3-\log_2(3-x)\ (x<3)$，$y=3-x$ および $y=9-3x$ で囲まれた領域を S とする．以下の問いに答えよ．

(1) S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(2) 座標平面において，S を原点のまわりに 1 回転したときに S が通過する領域を T とし，T を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を V とする．T を座標平面上に図示し，V の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数直線上で，座標が整数 k である点を整数点 k と呼ぶことにする．ある人が硬貨を投げながら次の規則に従って数直線上を移動している．

(規則) 整数点 k にいるとき，硬貨を1回投げて表が出たら整数点 $k+1$ へ，裏が出たら整数点 $k-1$ へ移動する．

原点Oから出発し，n 回硬貨を投げて移動し終わったとき，原点Oにいる確率を P_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) $P_n = 0$ となるための n に関する必要十分条件を求めよ．

(2) m を自然数とする．等式

$$P_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{(2m)(2m-2)\cdots 2}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} P_{2m}$ は発散することを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y = f(x)$ が，$x = -\alpha$ と $x = \alpha$ で極値をとるので，最高次数の項の係数に注意して

$$f'(x) = 3(x+\alpha)(x-\alpha) \quad \cdots (*)$$

よって
$$\begin{aligned} f(-\alpha) - f(\alpha) &= \int_{\alpha}^{-\alpha} f'(x)\,dx = 3\int_{\alpha}^{-\alpha} (x+\alpha)(x-\alpha)\,dx \\ &= 3\left(-\frac{1}{6}\right)(-\alpha-\alpha)^3 = 4\alpha^3 \end{aligned}$$

(2) $f(x)$ の定数項が 1 であるから，$(*)$ より

$$f(x) = x^3 - 3\alpha^2 x + 1$$

$g(x) = f(x) - \left(x^2 - \dfrac{1}{3}x + 1\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - x^2 + \left(\frac{1}{3} - 3\alpha^2\right)x \\ &= x\left(x^2 - x + \frac{1}{3} - 3\alpha^2\right) \end{aligned}$$

$g(x) = 0$ が重解 (接点 P の x 座標) をもてばよいので，$\alpha > 0$ に注意して

(i) $x = 0$ を重解にもつとき

$$\frac{1}{3} - 3\alpha^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

(ii) $x = \dfrac{1}{2}$ を重解にもつとき

$$\frac{1}{3} - 3\alpha^2 = \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{1}{6}$$

接点 P は放物線 $y = x^2 - \dfrac{1}{3}x + 1$ 上の点であるから

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{3}} \ \textbf{のとき} \quad \mathbf{P\,(0,\ 1)}$$
$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{6}} \ \textbf{のとき} \quad \mathbf{P}\left(\mathbf{\frac{1}{2},\ \frac{13}{12}}\right)$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_0,\ a_1, \cdots, a_n$ をそれぞれ 0 または 1 とする $[a_n, \cdots, a_1, a_0]$ の組み合わせの総数は 2^{n+1} 個ある．最小値が $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ のとき 0 であり，最大値が $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 1$ のとき

$$2^n + \cdots + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

したがって　　$0 \leqq a_n \times 2^n + \cdots + a_1 \times 2 + a_0 \leqq 2^{n+1} - 1$

$a'_0,\ a'_1, \cdots, a'_n$ をそれぞれ 0 または 1 とし，

$$a_n \times 2^n + \cdots + a_1 \times 2 + a_0 = a'_n \times 2^n + \cdots + a'_1 \times 2 + a'_0 \quad \cdots (*)$$

とおく．$(*)$ において $a_k \neq a'_k$ となる最大の k を m とすると

$$(a_m - a'_m) \times 2^m = (a'_{m-1} - a_{m-1}) \times 2^{m-1} + \cdots + (a'_1 - a_1) \times 2 + (a'_0 - a_0) \quad \cdots (**)$$

このとき　　$|(a_m - a'_m) \times 2^m| = 2^m \quad \cdots ①$

$$\begin{aligned} &|(a'_{m-1} - a_{m-1}) \times 2^{m-1} + \cdots + (a'_1 - a_1) \times 2 + (a'_0 - a_0)| \\ \leqq &|(a'_{m-1} - a_{m-1}) \times 2^{m-1}| + \cdots + |(a'_1 - a_1) \times 2| + |a'_0 - a_0| \\ \leqq &2^{m-1} + \cdots + 2 + 1 = 2^m - 1 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② より，$(**)$ は成立しない．

よって，$(*)$ が成立するとき　　$a_k = a'_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$

したがって，$[a_n, \cdots, a_1, a_0] \neq [a'_n, \cdots, a'_1, a'_0]$ のとき

$$a_n \times 2^n + \cdots + a_1 \times 2 + a_0 \neq a'_n \times 2^n + \cdots + a'_1 \times 2 + a'_0$$

以上のことから，$0 \leqq N \leqq 2^{n+1} - 1$ を満たす整数 N に対して，

$$N = a_n \times 2^n + \cdots + a_1 \times 2 + a_0$$

となる $a_0,\ a_1, \cdots, a_n$ は一意的に存在する．

(2) k を 0 以上の整数とすると　$S(2^k) = 1$

l，m を 0 以上の異なる整数とすると　$S(2^l + 2^m) = S(2^l) + S(2^m)$

これらの性質により

$$\begin{aligned} S(a_n \times 2^n + \cdots + a_1 \times 2 + a_0) &= a_n S(2^m) + \cdots + a_1 S(2) + a_0 S(1) \\ &= a_n + \cdots + a_1 + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \end{aligned}$$

$0 \leqq M \leqq 2^{n+1} - 4$ を満たす整数 M について，

$$\begin{aligned} S(M+1) &= S(M) + S(1) = S(M) + 1 \\ S(M+2) &= S(M) + S(2) = S(M) + 1 \\ S(M+2+1) &= S(M) + S(2) + S(1) = S(M) + 2 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} &(-1)^{S(M)} + (-1)^{S(M+1)} + (-1)^{S(M+2)} + (-1)^{S(M+3)} \\ =&(-1)^{S(M)} + (-1)^{S(M)+1} + (-1)^{S(M)+1} + (-1)^{S(M)+2} \\ =&(-1)^{S(M)} - (-1)^{S(M)} - (-1)^{S(M)} + (-1)^{S(M)} = 0 \end{aligned}$$

上式の M を $4m$ とおくことにより

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{2^{n+1}-1} (-1)^{S(N)} &= \sum_{m=0}^{2^{n-1}} \{(-1)^{S(4m)} + (-1)^{S(4m+1)} \\ &\qquad + (-1)^{S(4m+2)} + (-1)^{S(4m+3)}\} \\ &= \sum_{m=0}^{2^{n-1}} 0 = 0 \end{aligned}$$

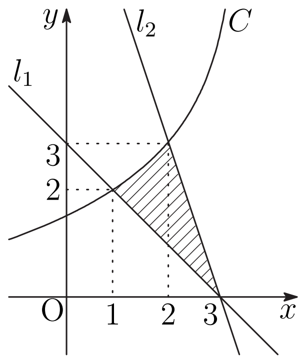
(3) (2) と同様にして

$$\begin{aligned}&(-1)^{S(M)}M+(-1)^{S(M+1)}(M+1)\\&\qquad+(-1)^{S(M+2)}(M+2)+(-1)^{S(M+3)}(M+3)\\=&(-1)^{S(M)}M+(-1)^{S(M)+1}(M+1)\\&\qquad+(-1)^{S(M)+1}(M+2)+(-1)^{S(M)+2}(M+3)\\=&(-1)^{S(M)}\{M-(M+1)-(M+2)+(M+3)\}=0\end{aligned}$$

上式の M を $4m$ とおくことにより

$$\begin{aligned}\sum_{N=0}^{2^{n+1}-1}(-1)^{S(N)}N&=\sum_{m=0}^{2^{n-1}}\{(-1)^{S(4m)}4m+(-1)^{S(4m+1)}(4m+1)\\&\qquad+(-1)^{S(4m+2)}(4m+2)+(-1)^{S(4m+3)}(4m+3)\}\\&=\sum_{m=0}^{2^{n-1}}0=0\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 領域 S は，右の図の斜線部分で，これを x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると



$$\begin{aligned}V_1=\pi\int_1^2\{3-\log_2(3-x)\}^2\,dx\\+\frac{1}{3}\cdot\pi3^2\cdot1-\frac{1}{3}\cdot\pi2^2\cdot3\end{aligned}$$

ここで，$t=3-\log_2(3-x)$ $(1\leqq x\leqq 2)$ とおくと

$$x=3-2^{3-t},\quad \frac{dx}{dt}=2^{3-t}\log 2$$

x	$1\longrightarrow 2$
t	$2\longrightarrow 3$

$$\begin{aligned}\int_1^2\{3-\log_2(3-x)\}^2\,dx&=(\log 2)\int_2^3 t^2 2^{3-t}\,dt\\&=\left[-2^{3-t}\left\{t^2+\frac{2t}{\log 2}+\frac{2}{(\log 2)^2}\right\}\right]_2^3\\&=-1+\frac{2}{\log 2}+\frac{2}{(\log 2)^2}\end{aligned}$$

したがって　$V_1=\pi\left\{-1+\dfrac{2}{\log 2}+\dfrac{2}{(\log 2)^2}\right\}+\dfrac{1}{3}\cdot\pi3^2\cdot1-\dfrac{1}{3}\cdot\pi2^2\cdot3$

よって　$V_1=\mathbf{2\pi\left\{-1+\dfrac{1}{\log 2}+\dfrac{1}{(\log 2)^2}\right\}}$

解説 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx=\frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$

$$\int a^{px+q}f(x)\,dx=\frac{a^{px+q}}{p\log a}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p\log a}+\frac{f''(x)}{(p\log a)^2}-\frac{f'''(x)}{(p\log a)^3}+\cdots\right\}+C$$

$$\int e^{-x+q}f(x)\,dx=-e^{-x+q}\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\}+C$$

$$\int a^{-x+q}f(x)\,dx=-\frac{a^{-x+q}}{\log a}\left\{f(x)+\frac{f'(x)}{\log a}+\frac{f''(x)}{(\log a)^2}+\frac{f'''(x)}{(\log a)^3}+\cdots\right\}+C$$

上の公式により

$$\begin{aligned}\int t^2 2^{3-t}\,dt&=-\frac{2^{3-t}}{\log 2}\left\{t^2+\frac{(t^2)'}{\log 2}+\frac{(t^2)''}{(\log 2)^2}\right\}+C\\&=-\frac{2^{3-t}}{\log 2}\left\{t^2+\frac{2t}{\log 2}+\frac{2}{(\log 2)^2}\right\}+C\end{aligned}$$

(2) $l_1: y=3-x\ (x+y-3=0)$ と原点との距離 d_1 は

$$d_1=\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$l_2: y=9-3x$ と曲線 $C: y=3-\log_2(3-x)$ の交点は $(2,\ 3)$
この交点と原点との距離 d_2 は

$$d_2=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

原点を中心とする 2 つの同心円で，半径が d_1，d_2 の円をそれぞれ C_1，C_2 とする．T は，C_1 の外部かつ C_2 の内部にある領域である．
よって，T を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=\frac{4}{3}\pi({d_2}^3-{d_1}^3)=\frac{4}{3}\pi\left(13\sqrt{13}-\frac{27\sqrt{2}}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{52\sqrt{13}-27\sqrt{2}}{3}\pi}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) (i) nが偶数のとき，

$$P_n = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \neq 0$$

よって　$P_n = 0 \implies n \neq$ 偶数　すなわち　$P_n = 0 \implies n =$ 奇数

(ii) nが奇数のとき，(表が出た回数) + (裏が出た回数) $= n$ より，
(表が出た回数) $\neq$ (裏が出た回数) であるから

$$n = \text{奇数} \implies P_n = 0$$

(i)，(ii) より，$P_n = 0$ となる必要十分条件は　**nが奇数**

(2) (1)(i) と同様にして

$$\begin{aligned} P_{2m} &= {}_{2m}\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \frac{(2m)!}{m!m!} \times \frac{1}{2^{2m}} \\ &= \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)\cdots 2\cdot 1}{\{2m(2m-2)\cdots 2\}^2} \\ &= \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2m(2m-2)\cdots 2} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$P_{2m} = \frac{1}{2m} \times \frac{2m-1}{2m-2}\cdot\frac{2m-3}{2m-4}\cdots\frac{3}{2} > \frac{1}{2m}$$

mが自然数のとき　$\displaystyle \frac{1}{2m} > \frac{1}{2}\int_m^{m+1}\frac{dx}{x}$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N} P_{2m} &= \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{2m} \\ &> \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\int_m^{m+1}\frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{N+1}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\Big[\ \log x\ \Big]_1^{N+1} = \frac{1}{2}\log(N+1) \end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_{2m} = \lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{N} P_{2m} > \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\log(N+1)$$

$\displaystyle \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\log(N+1) = \infty$ であるから　$\displaystyle \sum_{m=1}^{\infty} P_{2m} = \infty$