平成26年度　九州大学2次試験後期日程(数学問題)150分
理学部(数学科)　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

1 a，b，c は $a^2-bc>0$ を満たす正の定数とし，

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+a}$$

とおく．曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

2 1より大きい実数 a に対して，数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1=1,\quad x_{n+1}=\frac{{x_n}^3+3ax_n}{3{x_n}^2+a}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たしている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して

$$0<\frac{\sqrt{a}-x_{n+1}}{\sqrt{a}}<\left(\frac{\sqrt{a}-x_n}{\sqrt{a}}\right)^3$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 数列 $\{x_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．

3 1から7までの自然数が書かれた玉が1つずつある．この7つの玉が袋の中に入っている．数直線上の点Pは，原点から出発し，次の操作にしたがって動くものとする．

操作：袋から2つの玉を順に取り出し，最初の玉に書かれた数を m，次の玉に書かれた数を n とする．このとき，$|3m-4n|=5$ を満たせばPの座標に $m-n$ だけ加えた座標にPが移動し，満たさなければ動かない．その後，取り出した玉は袋の中に戻す．

k 回目の操作の後のPの座標を X_k とおく．以下の問いに答えよ．

(1) X_1 の期待値を求めよ．

(2) $|X_2|\geqq 3$ となる確率を求めよ．

(3) $X_3=1$ となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 実数を成分とする 2 次正方行列 A について，等式

$$A^2 - kA + E = O$$

が成り立っている．ここで，k は 2 より大きい実数であり，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．A は E の定数倍でないと仮定し，2 次方程式 $x^2 - kx + 1 = 0$ の解を α，β とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 等式 $(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $A - \alpha E$ は逆行列を持たないことを証明せよ．

(3) 零ベクトルでない列ベクトル $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ で $AX = \alpha X$ を満たすものが存在することを証明せよ．

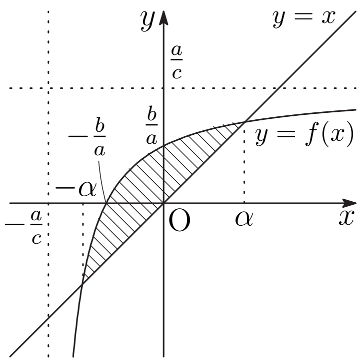
(4) どんな自然数 n に対しても $A^n = E$ とならないことを証明せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+a}=\frac{bc-a^2}{c(cx+a)}+\frac{a}{c}$$

a，b，c は $a^2-bc>0$ を満たす正の定数であるから，$y=f(x)$ は，$x=-\dfrac{a}{c}$，$y=\dfrac{a}{c}$ を漸近線とする右の図のような双曲線である．



$f(x)=x$ を解くと

$$\frac{ax+b}{cx+a}=x \quad ゆえに \quad x=\pm\sqrt{\frac{b}{c}}$$

$\alpha=\sqrt{\dfrac{b}{c}}$ とおき，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{ax+b}{cx+a}-x\right)dx\\
&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(-x+\frac{a}{c}+\frac{bc-a^2}{c^2}\cdot\frac{c}{cx+a}\right)dx\\
&=\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{a}{c}x+\frac{bc-a^2}{c^2}\log|cx+a|\right]_{\alpha}^{\alpha}\\
&=\frac{2a\alpha}{c}+\frac{bc-a^2}{c^2}\log\left|\frac{c\alpha+a}{-c\alpha+a}\right|\\
&=\boldsymbol{\frac{2a\sqrt{b}}{c\sqrt{c}}+\frac{bc-a^2}{c^2}\log\frac{a+\sqrt{bc}}{a-\sqrt{bc}}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a>1$，$x_1=1$，$x_{n+1}=\dfrac{{x_n}^3+3ax_n}{3{x_n}^2+a}$ $\quad\cdots(*)\quad(n=1,2,3,\cdots)$

上の漸化式により $\quad x_n>0\ \ (n=1,2,3,\cdots)$

また $\quad \sqrt{a}-x_{n+1}=\sqrt{a}-\dfrac{{x_n}^3+3ax_n}{3{x_n}^2+a}$

$$=\frac{3\sqrt{a}\,{x_n}^2+a\sqrt{a}-{x_n}^3-3ax_n}{3{x_n}^2+a}=\frac{(\sqrt{a}-x_n)^3}{3{x_n}^2+a}\quad\cdots(**)$$

$\sqrt{a}-x_1=\sqrt{a}-1>0$ であるから，上式より，すべての自然数 n について

$$\sqrt{a}-x_n>0 \quad すなわち \quad 0<x_n<\sqrt{a}\quad\cdots①$$

したがって $\qquad 0<\sqrt{a}-x_{n+1}<\dfrac{(\sqrt{a}-x_n)^3}{a}$

よって $\qquad 0<\dfrac{\sqrt{a}-x_{n+1}}{\sqrt{a}}<\left(\dfrac{\sqrt{a}-x_n}{\sqrt{a}}\right)^3$

(2) (1) の結果から　$0 < \dfrac{\sqrt{a}-x_n}{\sqrt{a}} < \left(\dfrac{\sqrt{a}-x_1}{\sqrt{a}}\right)^{3^{n-1}} = \left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}\right)^{3^{n-1}}$

$0 < \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} < 1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}\right)^{3^{n-1}} = 0$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_n}{\sqrt{a}} = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \boldsymbol{\sqrt{a}}$$

補足 $\dfrac{\sqrt{a}-x_{n+1}}{\sqrt{a}} < \left(\dfrac{\sqrt{a}-x_n}{\sqrt{a}}\right)^3$ について，両辺の自然対数をとると

$$\log\frac{\sqrt{a}-x_{n+1}}{\sqrt{a}} < 3\log\frac{\sqrt{a}-x_n}{\sqrt{a}}$$

$y_n = \log\dfrac{\sqrt{a}-x_n}{\sqrt{a}}$ とおくと　　$y_{n+1} < 3y_n$

$n > 1$ のとき　$y_n < 3^{n-1}y_1$　すなわち　$\log\dfrac{\sqrt{a}-x_n}{\sqrt{a}} < 3^{n-1}\log\dfrac{\sqrt{a}-x_1}{\sqrt{a}}$

よって　　$0 < \dfrac{\sqrt{a}-x_n}{\sqrt{a}} < \left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}\right)^{3^{n-1}}$

別解 $(*)$ と ① より　$x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n{}^3 + 3ax_n}{3x_n{}^2 + a} = \dfrac{2x_n(a - x_n{}^2)}{3x_n{}^2 + a} > 0$

$1 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \sqrt{a}$ であるから

$$\frac{(\sqrt{a}-x_n)^2}{3x_n^2 + a} \leqq \frac{(\sqrt{a}-x_1)^2}{3x_1{}^2 + a} = \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{3+a} < \frac{(\sqrt{a})^2}{3+a} = \frac{a}{3+a}$$

$r = \dfrac{a}{3+a}$ とおくと $(0 < r < 1)$，上式および $(**)$ より

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| < r|x_n - \sqrt{a}|$$

$n > 1$ のとき　　　$|x_n - \sqrt{a}| < r^{n-1}|x_1 - \sqrt{a}|$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^{n-1}|x_1 - \sqrt{a}| = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$$

解説 $\{x_n\}$ は上に有界な単調増加列であるから収束し，その極限値を β とすると，漸化式より

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n{}^3 + 3ax_n}{3x_n{}^2 + a} \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \frac{\beta^3 + 3a\beta}{3\beta^2 + a}$$

$\beta > 0$ に注意してこれを解くと　$\beta = \sqrt{a}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $|3m-4n|=5$ より

$$\begin{aligned} &3m-4n=5 \text{ のとき} && 3(m-3)=4(n-1) \\ &3m-4n=-5 \text{ のとき} && 3(m-1)=4(n-2) \end{aligned}$$

m，n は 7 以下の異なる自然数であるから

$$\begin{aligned} &\text{第 1 式から} && (m,\ n)=(3,\ 1),\ (7,\ 4) \\ &\text{第 2 式から} && (m,\ n)=(1,\ 2) \end{aligned}$$

ゆえに　$(m,\ n)=(3,\ 1)$ のとき　$m-n=2$
$(m,\ n)=(7,\ 4)$ のとき　$m-n=3$
$(m,\ n)=(1,\ 2)$ のとき　$m-n=-1$

$(m,\ n)$ の組の総数は　${}_7\mathrm{P}_2=7\times 6=42$ (通り)

したがって，X_1 の確率分布は次のようになる．

X_1	0	-1	2	3	計
p	$\frac{39}{42}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}$	1

X_1 の期待値を E とすると

$$E=(-1)\times\frac{1}{42}+2\times\frac{1}{42}+3\times\frac{1}{42}=\boldsymbol{\frac{2}{21}}$$

(2) k 回目の移動を x_k とすると　$X_2=x_1+x_2$
$|X_2|\geqq 3$ となる $(x_1,\ x_2)$ の組は

$$(x_1,\ x_2)=(0,\ 3),\ (3,\ 0),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3)$$

よって，求める確率は

$$\frac{39}{42}\cdot\frac{1}{42}\times 2+\frac{1}{42}\cdot\frac{1}{42}\times 4=\frac{82}{42\cdot 42}=\boldsymbol{\frac{41}{882}}$$

(3) $X_3=1$ となるのは，3 回の移動の組合せが $\{0,-1,\ 2\}$ と $\{-1,-1,\ 3\}$ であるから，求める確率は

$$\frac{39}{42}\cdot\frac{1}{42}\cdot\frac{1}{42}\times 3!+\left(\frac{1}{42}\right)^2\frac{1}{42}\times\frac{3!}{2!}=\frac{237}{42^3}=\boldsymbol{\frac{79}{24696}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2次方程式 $x^2 - kx + 1 = 0$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = k, \quad \alpha\beta = 1$$

したがって

$$\begin{aligned}(A - \alpha E)(A - \beta E) &= A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta E \\ &= A^2 - kA + E = O\end{aligned}$$

(2) $A - \alpha E$ が逆行列をもつとすると，$(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$ の両辺に左側から $(A - \alpha E)^{-1}$ を掛けると

$$A - \beta E = O \quad \text{ゆえに} \quad A = \beta E$$

このとき，A は E の定数倍となり，条件に反する．

よって，$A - \alpha E$ は逆行列をもたない．

(3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると $A - \alpha E = \begin{pmatrix} a - \alpha & b \\ c & d - \alpha \end{pmatrix}$

(2) の結果から，$A - \alpha E$ は逆行列をもたないので

$$(a - \alpha)(d - \alpha) - bc = 0 \quad \cdots (*)$$

ここで，2つの列ベクトルを

$$X_1 = \begin{pmatrix} \alpha - d \\ c \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} b \\ \alpha - a \end{pmatrix}$$

とおくと，X_1，X_2 の少なくとも1つは零ベクトルではない．実際，X_1，X_2 をともに零ベクトルとすると

$$a = d = \alpha, \quad b = c = 0 \quad \text{すなわち} \quad A = \alpha E$$

このとき，A は E の定数倍となり，条件に反する．

X_1，X_2 の零ベクトルでないものを X とすると，$(*)$ より

$$(A - \alpha E)X = \vec{0} \quad \text{よって} \quad AX = \alpha X$$

(4) (3) の結果より，$AX = \alpha X$ であるから　$A^n X = \alpha^n X$

$A^n = E$ とすると　　$X = \alpha^n X$

このとき，ベクトル X の成分の 1 つは 0 でないから　$\alpha^n = 1$　$\cdots$①

2 次方程式 $x^2 - kx + 1 = 0$ の解

$$x = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2},\ \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} = \frac{2}{k + \sqrt{k^2 - 4}}$$

は，$k > 2$ により，1 でない正の数である．α は，この方程式の解であるから，① を満たす自然数 n は存在しない．

よって，どんな自然数 n に対しても $A^n = E$ とならない．

研究 2 次方程式 $x^2 - kx + 1 = 0$ の判別式を D とすると，$k > 2$ より

$$D = k^2 - 4 = (k+2)(k-2) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha \neq \beta$$

$(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$ より

$$\begin{aligned}(A - \beta E)^2 &= (A - \beta E)\{(A - \alpha E) + (\alpha - \beta)E\} \\ &= (\alpha - \beta)(A - \beta E)\end{aligned}$$

ゆえに　$\left(\dfrac{A - \beta E}{\alpha - \beta}\right)^2 = \dfrac{A - \beta E}{\alpha - \beta}$　同様に　$\left(\dfrac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}\right)^2 = \dfrac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}$

$P = \dfrac{A - \beta E}{\alpha - \beta}$，$Q = \dfrac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}$ とおくと

$$P^2 = P,\quad Q^2 = Q,\quad PQ = QP = O,\quad A = \alpha P + \beta Q$$

したがって　　$A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$

$A^n = E$ とすると　　$E = \dfrac{\alpha^n(A - \beta E)}{\alpha - \beta} + \dfrac{\beta^n(A - \alpha E)}{\beta - \alpha}$

整理すると　　$(\alpha^n - \beta^n)A = (\alpha^n\beta - \alpha\beta^n + \alpha - \beta)E$

$\alpha + \beta = k > 2$，$\alpha\beta = 1$ より，α，β は異なる正の 2 数であるから，すべての自然数 n に対して

$$\alpha^n - \beta^n \neq 0$$

このとき，A は E の定数倍となり，条件に反する．

よって，どんな自然数 n に対しても $A^n = E$ とならない．