

平成 25 年度 九州大学 2 次試験後期日程 (数学問題)150 分
 理学部 (数学科) 3 月 12 日 数学 I・II・III・A・B・C

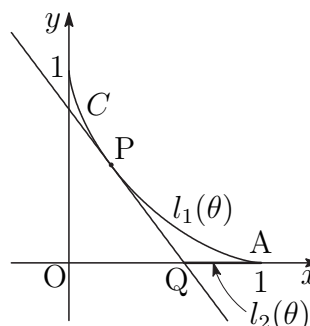
- 1 媒介変数 t を用いて, $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) で表される曲線を C とし, $t = 0$ のときの C 上の点を A とする. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたす θ に対して, C 上の点 $P(\cos^3 \theta, \sin^3 \theta)$ における C の接線と x 軸との交点を Q とする. 曲線 C の A から P までの部分の長さを $l_1(\theta)$ とし, 線分 AQ の長さを $l_2(\theta)$ とする. 関数 $l_1(\theta) - l_2(\theta)$ の最大値を求めよ.
- 2 $\triangle ABC$ の外心を O , 重心を G とする. $|\overrightarrow{BC}| = a$, $|\overrightarrow{CA}| = b$, $|\overrightarrow{AB}| = c$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.
- (1) $|\overrightarrow{AG}|^2$ を a, b, c を用いて表せ.
 - (2) $(b^2 - c^2)|\overrightarrow{AG}|^2 + (c^2 - a^2)|\overrightarrow{BG}|^2 + (a^2 - b^2)|\overrightarrow{CG}|^2$ の値を求めよ.
 - (3) $(b^2 - c^2)|\overrightarrow{OA}|^2 + (c^2 - a^2)|\overrightarrow{OB}|^2 + (a^2 - b^2)|\overrightarrow{OC}|^2$ の値を求めよ.
 - (4) $\vec{p} = (b^2 - c^2)\overrightarrow{GA} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{GB} + (a^2 - b^2)\overrightarrow{GC}$ とおく. 内積 $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{p}$ の値を求めよ.
- 3 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とするとき, 以下の問いに答えよ.
- (1) xy 平面の原点を通る直線 l で, f によって l の点がすべて l 上に移るものを求めよ.
 - (2) 実数 a に対して, 点 $P(0, a)$, $Q(-1, 0)$ を考える. 1 次変換 f により点 P が移される点を R とする. P, Q, R が異なる 3 点で, かつ同一直線 m 上にあるとき, a の値と直線 m を求めよ.
 - (3) a, l, m は (1), (2) で求めたものとする. 点 $(0, a)$ を P_1 とし, $P_{n+1} = f(P_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする. このとき, $n \geq 3$ ならば線分 $P_n P_{n+1}$ は直線 l , 直線 m , y 軸のいずれとも共有点もたないことを示せ.
- 4 自然数の 2 乗で表される数を平方数という. 1 から 4 までの数字を 1 つずつ記入した 4 枚のカードが入った箱がある. 箱の中から 1 枚のカードを無作為に取り出して, そこに書かれた数を記録し, そのカードを箱に戻す. この試行を n 回繰り返して, 記録した n 個の数の積が平方数になる確率を p_n , 平方数の 2 倍または 3 倍になる確率を q_n とする. 以下の問いに答えよ.
- (1) p_2 と q_2 を求めよ.
 - (2) 2 以上の自然数 n に対して, q_n を求めよ.
 - (3) 2 以上の自然数 n に対して, p_n を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad C: \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}) \text{ より}$$

$$\frac{dx}{dt} = -3 \cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3 \sin^2 t \cos t$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{-3 \cos^2 t \sin t} = -\tan t$$



C 上の点 $P(\cos^3 t, \sin^3 t)$ における接線の方程式は $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

$$y - \sin^3 \theta = -\tan \theta (x - \cos^3 \theta) \quad \text{すなわち} \quad y = -x \tan \theta + \sin \theta$$

これと x 軸との交点 Q の座標は $(\cos \theta, 0)$ 　ゆえに $l_2(\theta) = 1 - \cos \theta$

C 上の 2 点 A, P は, それぞれ $t = 0, t = \theta$ に対応する点であるから

$$\begin{aligned} l_1(\theta) &= \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\theta \sqrt{(-3 \cos^2 t \sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^\theta 3 \sin t \cos t dt = \left[-\frac{3}{2} \cos^2 t \right]_0^\theta = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad l_1(\theta) - l_2(\theta) &= \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right) - (1 - \cos \theta) \\ &= -\frac{3}{2} \cos^2 \theta + \cos \theta + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{2} \left(\cos \theta - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < \cos \theta < 1$ であるから, $\cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき, 最大値 $\frac{2}{3}$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad \vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AG}|^2 &= \frac{1}{9}(|\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + |\vec{AC}|^2) \\ &= \frac{1}{9}(b^2 + c^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{また, } \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} \text{ より}$$

$$|\vec{BC}|^2 = |\vec{AC}|^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + |\vec{AB}|^2$$

$$\text{ゆえに } 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = b^2 + c^2 - a^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると } |\vec{AG}|^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} (b^2 - c^2)|\vec{AG}|^2 &= (b^2 - c^2) \cdot \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \\ &= \frac{1}{9}\{2(b^4 - c^4) + (c^2a^2 - a^2b^2)\} \end{aligned}$$

a, b, c の対称性により

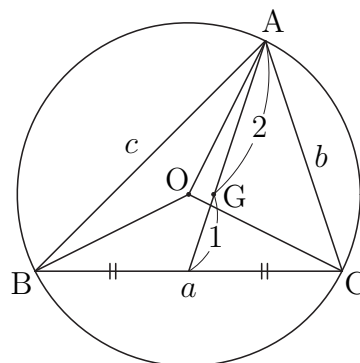
$$\begin{aligned} (c^2 - a^2)|\vec{BG}|^2 &= \frac{1}{9}\{2(c^4 - a^4) + (a^2b^2 - b^2c^2)\} \\ (a^2 - b^2)|\vec{CG}|^2 &= \frac{1}{9}\{2(a^4 - b^4) + (b^2c^2 - c^2a^2)\} \end{aligned}$$

これらの3式の辺々を加えると

$$(b^2 - c^2)|\vec{AG}|^2 + (c^2 - a^2)|\vec{BG}|^2 + (a^2 - b^2)|\vec{CG}|^2 = 0$$

(3) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると, $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = R$ より

$$\begin{aligned} &(b^2 - c^2)|\vec{OA}|^2 + (c^2 - a^2)|\vec{OB}|^2 + (a^2 - b^2)|\vec{OC}|^2 \\ &= (b^2 - c^2)R^2 + (c^2 - a^2)R^2 + (a^2 - b^2)R^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (4) \quad \vec{p} &= (b^2 - c^2)\vec{GA} + (c^2 - a^2)\vec{GB} + (a^2 - b^2)\vec{GC} \\
 &= (b^2 - c^2)(\vec{OA} - \vec{OG}) + (c^2 - a^2)(\vec{OB} - \vec{OG}) + (a^2 - b^2)(\vec{OC} - \vec{OG}) \\
 &= (b^2 - c^2)\vec{OA} + (c^2 - a^2)\vec{OB} + (a^2 - b^2)\vec{OC}
 \end{aligned}$$

$3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ であるから

$$\begin{aligned}
 3\vec{OG} \cdot \vec{p} &= (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \{(b^2 - c^2)\vec{OA} + (c^2 - a^2)\vec{OB} + (a^2 - b^2)\vec{OC}\} \\
 &= (b^2 - c^2)|\vec{OA}|^2 + (c^2 - a^2)|\vec{OB}|^2 + (a^2 - b^2)|\vec{OC}|^2 \\
 &\quad + (b^2 - a^2)\vec{OA} \cdot \vec{OB} + (c^2 - b^2)\vec{OB} \cdot \vec{OC} + (a^2 - c^2)\vec{OC} \cdot \vec{OA}
 \end{aligned}$$

(3) の結果から

$$3\vec{OG} \cdot \vec{p} = (b^2 - a^2)\vec{OA} \cdot \vec{OB} + (c^2 - b^2)\vec{OB} \cdot \vec{OC} + (a^2 - c^2)\vec{OC} \cdot \vec{OA}$$

ここで, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ より

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{OB}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OA}|^2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = R^2 - \frac{c^2}{2}$$

$$\text{同様に} \quad \vec{OB} \cdot \vec{OC} = R^2 - \frac{a^2}{2}, \quad \vec{OC} \cdot \vec{OA} = R^2 - \frac{b^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{したがって} \quad 3\vec{OG} \cdot \vec{p} &= (b^2 - a^2) \left(R^2 - \frac{c^2}{2} \right) \\
 &\quad + (c^2 - b^2) \left(R^2 - \frac{a^2}{2} \right) \\
 &\quad + (a^2 - c^2) \left(R^2 - \frac{b^2}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \vec{OG} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ とおくと, } A \text{ の特性方程式は } \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$A \text{ の固有値は } 2 \text{ であるから } A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有値 } 2 \text{ に対する固有ベクトルの } 1 \text{ つは } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, 求める } l \text{ の方程式は } \quad y = x$$

$$(2) f \text{ による } P \text{ の像 } R \text{ は } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

P と R は異なる点であるから, $a \neq 0$ に注意して, 2点 $P(0, a)$, $Q(-1, 0)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{a} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

この直線上に点 R があるから

$$\frac{a}{-1} + \frac{3a}{a} = 1 \quad \text{ゆえに } a = 2$$

求める直線 m の方程式は, これを ② に代入して

$$y = 2x + 2$$

$$(3) a \text{ の値を } \textcircled{1} \text{ に代入することにより } \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$f \text{ による } P_2 \text{ の像 } P_3 \text{ は } \overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

ここで, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

また, (1) の結果から $A\vec{u} = 2\vec{u}$

$$T = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} \text{ とおくと } AT = T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T \text{ は正則であるから } T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(T^{-1}AT)^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \text{ より } T^{-1}A^nT = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって } A^nT = T \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

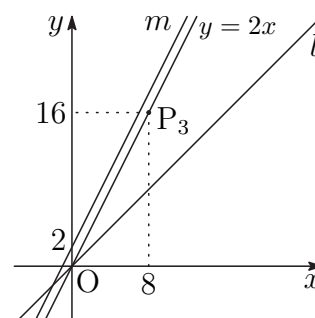
$$A^n \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OP_3} = 8\vec{v}$, $\overrightarrow{OP_n} = A^{n-3}\overrightarrow{OP_3}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_n} &= 8A^{n-3}\vec{v} \\ &= 8 \left\{ (n-3) \cdot 2^{n-4}\vec{u} + 2^{n-3}\vec{v} \right\} \\ &= (n-3) \cdot 2^{n-1}\vec{u} + 2^n\vec{v}\end{aligned}$$

$n > 3$ のとき, P_n は領域

$$\begin{cases} y > x \\ y < 2x \end{cases}$$



にある. 右の図から, $n \geq 3$ ならば線分 P_nP_{n+1} は直線 l , 直線 m , y 軸のいずれとも共有点をもたない.

4 (1) 2 回取り出す場合の総数は $4 \times 4 = 16$ (通り)

1 回目, 2 回目に取り出したカードの数字がそれぞれ 3, 4 であることを (3, 4) で表すことにする. 2 つの数の積が平方数になるのは, 次の 6 通り.

$$(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)$$

よって
$$p_2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

また, 2 つの数の積が平方数の 2 倍または 3 倍になるのは, 次の 8 通り.

$$(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 3)$$

よって
$$q_2 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

- (2) 記録した n 個の数の積が平方数の 2 倍, 3 倍, 6 倍になる確率をそれぞれ x_n, y_n, z_n とすると ($n = 1, 2, 3 \dots$)

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n & \dots \textcircled{1} \\ x_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}z_n & \dots \textcircled{2} \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{4}z_n & \dots \textcircled{3} \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2}z_n & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$p_n + x_n + y_n + z_n = 1$ であるから, ②, ③ の辺々を加えると

$$x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n + x_n + y_n + z_n) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x_n + y_n = \frac{1}{2}$$

$q_n = x_n + y_n$ であるから $q_n = \frac{1}{2}$

$$(3) \textcircled{1} + \textcircled{4} \text{ より} \quad p_{n+1} + z_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n + x_n + y_n + z_n) = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって} \quad p_n + z_n = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{4} \text{ より} \quad p_{n+1} - z_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - z_n)$$

$$\text{したがって} \quad p_n - z_n = (p_1 - z_1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$p_1 = \frac{1}{2}, z_1 = 0 \text{ であるから} \quad p_n - z_n = \frac{1}{2^n} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ から } z_n \text{ を消去して} \quad p_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}$$