平成 25 年度　九州大学 2 次試験後期日程 (数学問題)150 分
理学部 (数学科)　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B・C

問題 [1] [2] [3] [4]

1 媒介変数 t を用いて，$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線を C とし，$t = 0$ のときの C 上の点を A とする．$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす θ に対して，C 上の点 $\mathrm{P}(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$ における C の接線と x 軸との交点を Q とする．曲線 C の A から P までの部分の長さを $l_1(\theta)$ とし，線分 AQ の長さを $l_2(\theta)$ とする．関数 $l_1(\theta) - l_2(\theta)$ の最大値を求めよ．

2 $\triangle$ABC の外心を O，重心を G とする．$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = a$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = b$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = c$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2$ を a，b，c を用いて表せ．

(2) $(b^2 - c^2)|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2 + (c^2 - a^2)|\overrightarrow{\mathrm{BG}}|^2 + (a^2 - b^2)|\overrightarrow{\mathrm{CG}}|^2$ の値を求めよ．

(3) $(b^2 - c^2)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + (c^2 - a^2)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + (a^2 - b^2)|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$ の値を求めよ．

(4) $\vec{p} = (b^2 - c^2)\overrightarrow{\mathrm{GA}} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{\mathrm{GB}} + (a^2 - b^2)\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ とおく．内積 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\vec{p}$ の値を求めよ．

3 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) xy 平面の原点を通る直線 l で，f によって l の点がすべて l 上に移るものを求めよ．

(2) 実数 a に対して，点 $\mathrm{P}(0,\ a)$，$\mathrm{Q}(-1,\ 0)$ を考える．1 次変換 f により点 P が移される点を R とする．P，Q，R が異なる 3 点で，かつ同一直線 m 上にあるとき，a の値と直線 m を求めよ．

(3) a，l，m は (1)，(2) で求めたものとする．点 $(0,\ a)$ を P_1 とし，$\mathrm{P}_{n+1} = f(\mathrm{P}_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．このとき，$n \geqq 3$ ならば線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ は直線 l，直線 m，y 軸のいずれとも共有点もたないことを示せ．

$\boxed{4}$ 自然数の 2 乗で表される数を平方数という．1 から 4 までの数字を 1 つずつ記入した 4 枚のカードが入った箱がある．箱の中から 1 枚のカードを無作為に取り出して，そこに書かれた数を記録し，そのカードを箱に戻す．この試行を n 回繰り返し，記録した n 個の数の積が平方数になる確率を p_n，平方数の 2 倍または 3 倍になる確率を q_n とする．以下の問いに答えよ．

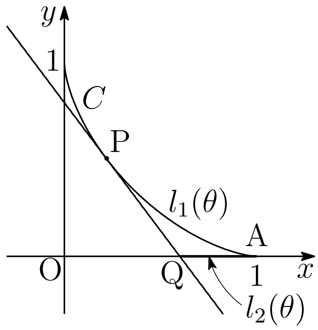
(1) p_2 と q_2 を求めよ．

(2) 2 以上の自然数 n に対して，q_n を求めよ．

(3) 2 以上の自然数 n に対して，p_n を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $C:\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より



$$\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$$

ゆえに $\displaystyle \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\tan t$

C 上の点 $\mathrm{P}(\cos^3 t,\ \sin^3 t)$ における接線の方程式は $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$y-\sin^3\theta=-\tan\theta(x-\cos^3\theta) \quad \text{すなわち} \quad y=-x\tan\theta+\sin\theta$$

これと x 軸との交点 Q の座標は $(\cos\theta,\ 0)$ ゆえに $l_2(\theta)=1-\cos\theta$

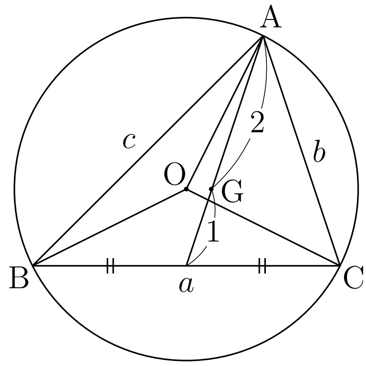
C 上の 2 点 A，P は，それぞれ $t=0$，$t=\theta$ に対応する点であるから

$$\begin{aligned} l_1(\theta)&=\int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\ &=\int_0^\theta \sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt \\ &=\int_0^\theta 3\sin t\cos t\,dt=\left[-\frac{3}{2}\cos^2 t\right]_0^\theta=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos^2\theta \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned} l_1(\theta)-l_2(\theta)&=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos^2\theta\right)-(1-\cos\theta) \\ &=-\frac{3}{2}\cos^2\theta+\cos\theta+\frac{1}{2} \\ &=-\frac{3}{2}\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\cos\theta<1$ であるから，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ ■

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ より



$$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2=\frac{1}{9}(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2)$$
$$=\frac{1}{9}(b^2+c^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})\quad\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$$

ゆえに　$2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=b^2+c^2-a^2\quad\cdots②$

② を ① に代入すると　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2=\dfrac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2)}$

(2) (1) の結果から

$$(b^2-c^2)|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2=(b^2-c^2)\cdot\frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2)$$
$$=\frac{1}{9}\{2(b^4-c^4)+(c^2a^2-a^2b^2)\}$$

a，b，c の対称性により

$$(c^2-a^2)|\overrightarrow{\mathrm{BG}}|^2=\frac{1}{9}\{2(c^4-a^4)+(a^2b^2-b^2c^2)\}$$
$$(a^2-b^2)|\overrightarrow{\mathrm{CG}}|^2=\frac{1}{9}\{2(a^4-b^4)+(b^2c^2-c^2a^2)\}$$

これらの 3 式の辺々を加えると

$$(b^2-c^2)|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2+(c^2-a^2)|\overrightarrow{\mathrm{BG}}|^2+(a^2-b^2)|\overrightarrow{\mathrm{CG}}|^2=\mathbf{0}$$

(3) △ABC の外接円の半径を R とすると，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=R$ より

$$(b^2-c^2)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(c^2-a^2)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+(a^2-b^2)|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$
$$=(b^2-c^2)R^2+(c^2-a^2)R^2+(a^2-b^2)R^2$$
$$=\mathbf{0}$$

(4) $$\begin{aligned}\vec{p} &= (b^2-c^2)\overrightarrow{\mathrm{GA}}+(c^2-a^2)\overrightarrow{\mathrm{GB}}+(a^2-b^2)\overrightarrow{\mathrm{GC}}\\ &= (b^2-c^2)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}})+(c^2-a^2)(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}})+(a^2-b^2)(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}})\\ &= (b^2-c^2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(c^2-a^2)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(a^2-b^2)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

$3\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\vec{p} &= (\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\{(b^2-c^2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(c^2-a^2)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(a^2-b^2)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}\\ &= (b^2-c^2)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(c^2-a^2)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+(a^2-b^2)|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\ &\quad +(b^2-a^2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(c^2-b^2)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(a^2-c^2)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\end{aligned}$$

(3) の結果から

$$3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\vec{p}=(b^2-a^2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(c^2-b^2)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(a^2-c^2)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 \quad ゆえに \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=R^2-\frac{c^2}{2}$$

同様に $\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=R^2-\dfrac{a^2}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=R^2-\dfrac{b^2}{2}$

したがって
$$\begin{aligned}3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\vec{p} &= (b^2-a^2)\left(R^2-\frac{c^2}{2}\right)\\ &\quad +(c^2-b^2)\left(R^2-\frac{a^2}{2}\right)\\ &\quad +(a^2-c^2)\left(R^2-\frac{b^2}{2}\right)=0\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\vec{p}=0}$ ■

3 (1) $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$ とおくと，A の特性方程式は $\quad \lambda^2-4\lambda+4=0$

A の固有値は 2 であるから $\quad A-2E=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

固有値 2 に対する固有ベクトルの 1 つは $\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

よって，求める l の方程式は $\quad \boldsymbol{y=x}$

(2) f による P の像 R は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix} \quad \cdots ①$

P と R は異なる点であるから，$a \neq 0$ に注意して，2 点 P$(0,\ a)$，Q$(-1,\ 0)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{a} = 1 \quad \cdots ②$$

この直線上に点 R があるから

$$\frac{a}{-1} + \frac{3a}{a} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = 2}$$

求める直線 m の方程式は，これを ② に代入して

$$\boldsymbol{y = 2x + 2}$$

(3) a の値を ① に代入することにより $\quad \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

f による $\mathrm{P_2}$ の像 $\mathrm{P_3}$ は $\quad \overrightarrow{\mathrm{OP_3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$

ここで，$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

また，(1) の結果から $\qquad A\vec{u} = 2\vec{u}$

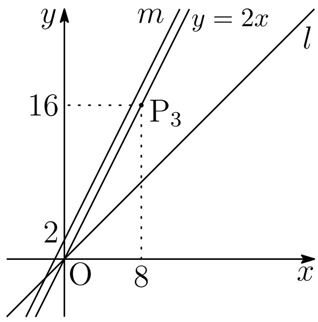
$T = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$ とおくと $\qquad AT = T\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

T は正則であるから $\qquad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(T^{-1}AT)^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$ より $\qquad T^{-1}A^nT = \begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

したがって $\qquad A^nT = T\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$A^n\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OP}_3} = 8\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} = A^{n-3}\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} &= 8A^{n-3}\vec{v}\\ &= 8\left\{(n-3)\cdot 2^{n-4}\vec{u} + 2^{n-3}\vec{v}\right\}\\ &= (n-3)\cdot 2^{n-1}\vec{u} + 2^n\vec{v}\end{aligned}$$

$n > 3$ のとき，P_n は領域

$$\begin{cases} y > x \\ y < 2x \end{cases}$$

にある．右の図から，$n \geqq 3$ ならば線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ は直線 l，直線 m，y 軸のいずれとも共有点をもたない． ■

4 (1) 2 回取り出す場合の総数は　$4 \times 4 = 16$ (通り)

1 回目，2 回目に取り出したカードの数字がそれぞれ 3, 4 であることを (3, 4) で表すことにする．2 つの数の積が平方数になるのは，次の 6 通り．

$$(1,\ 1),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 1),\ (4,\ 4)$$

よって　$p_2 = \dfrac{6}{16} = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

また，2 つの数の積が平方数の 2 倍または 3 倍になるのは，次の 8 通り．

$$(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 4),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)$$

よって　$q_2 = \dfrac{8}{16} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) 記録した n 個の数の積が平方数の 2 倍，3 倍，6 倍になる確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n とすると $(n = 1, 2, 3 \cdots)$

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n & \cdots ① \\ x_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}z_n & \cdots ② \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{4}z_n & \cdots ③ \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2}z_n & \cdots ④ \end{cases}$$

$p_n + x_n + y_n + z_n = 1$ であるから，②，③ の辺々を加えると

$$x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n + x_n + y_n + z_n) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x_n + y_n = \frac{1}{2}$$

$q_n = x_n + y_n$ であるから　　$\boldsymbol{q_n = \frac{1}{2}}$

(3) ① + ④ より　　$p_{n+1} + z_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n + x_n + y_n + z_n) = \frac{1}{2}$

したがって　　$p_n + z_n = \frac{1}{2} \quad \cdots ⑤$

① − ④ より　　$p_{n+1} - z_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - z_n)$

したがって　　$p_n - z_n = (p_1 - z_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$p_1 = \frac{1}{2}$，$z_1 = 0$ であるから　　$p_n - z_n = \frac{1}{2^n} \quad \cdots ⑥$

⑤，⑥ から z_n を消去して　　$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}}$　■