# 平成24年度　九州大学2次試験後期日程(数学問題)150分
# 理学部(数学科)　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

**1** 本題では行列の成分はすべて実数とし，2次の単位行列を $E$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) 2次の正方行列 $A$ が $A^2 = A$ をみたすとき，すべての自然数 $n$ に対して，$A^n + (E-A)^n = E$ となることを示せ．

(2) 2次の正方行列 $A$ で，$A^4 + (E-A)^4 = E$ かつ $A^2 \neq A$ をみたすものを1つ与えよ．

(3) 2次の正方行列 $A$ が，$A^4 + (E-A)^4 = E$ かつ $A^5 + (E-A)^5 = E$ をみたすとき，$A^2 = A$ が成り立つことを示せ．

**2** $n$ は4以上の自然数であるとする．箱の中に $5n$ 個の玉があり，その $5n$ 個の玉に1から $5n$ までの番号が1つずつ記入してある．以下の問いに答えよ．

(1) 箱から無作為に玉を2個取り出すとき，それらの番号の和が5で割り切れる確率を求めよ．

(2) 箱から無作為に玉を2個取り出すとき，それらの番号の平方の和が5で割り切れる確率を求めよ．

(3) 箱から無作為に2個の玉を取り出し，その2個の玉を戻すことなく，さらに箱から2個の玉を無作為に取り出す．最初の2個の玉の番号の和が5で割り切れ，2回目の2個の玉の番号の平方の和が5で割り切れる確率を求めよ．

**3** 以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = e^{-x}(\sin x + \cos x)$ を微分せよ．

(2) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^x \geqq 1 + \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ．次にこれを利用して，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$ を求めよ．

(3) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$a_n = \displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} xe^{-x}\sin x\,dx$ とおく．このとき，$a_n$ を $n$ を用いて表せ．

(4) 無限級数 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$ の和を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ O を原点とする座標平面に 2 点 A$(0,\ 1)$ と B$(2, -1)$ がある．また点 P$(p,\ 0)$ は $x$ 軸上を動く点で，$0 < p < 2$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ の増減と，$x \to \infty$ や $x \to -\infty$ のときの極限，および変曲点を調べて，$y = g(x)$ のグラフをかけ．

(2) $t > 0$ に対して，$t\,\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ を最小にする点 P はただ 1 つ定まることを示せ．ここで，$\overline{\mathrm{AP}}$ は線分 AP の長さを表す．

(3) (2) においてただ 1 つ定まる点 P の $x$ 座標を $p(t)$ とする．関数 $p(t)$ の $t = 1$ における微分係数 $p'(1)$ を求めよ．ただし，$p(t)$ が微分可能であることは仮定してよい．

**解答例**

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $B = E - A$ とおくと，$A^2 = A$ より

$$AB = A(E - A) = A - A^2 = O,$$
$$BA = (E - A)A = A - A^2 = O$$

$A + B = E$，$AB = BA = O$ より，自然数 $n$ に対して

$$(A + B)^n = E \quad ゆえに \quad A^n + B^n = E$$

よって $$A^n + (E - A)^n = E$$

(2) $A + B = E$ とおくと，$AB = BA$ であるから

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (A + B)^2 - 2AB = E - 2AB, \\ A^4 + B^4 &= (A^2 + B^2)^2 - 2A^2B^2 \\ &= (E - 2AB)^2 - 2A^2B^2 \\ &= E - 4AB + 2A^2B^2 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$A^4 + B^4 = E$ であるから

$$E - 4AB + 2A^2B^2 = E \quad ゆえに \quad AB(AB - 2E) = O$$

ここで，$AB - 2E = O$ とすると，$B = E - A$ より

$$A(E - A) - 2E = O \quad ゆえに \quad A^2 - A + 2E = O$$

これを満たす行列 $A$ の 1 つは，ハミルトン・ケーリーの定理により

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

(3) $A + B = E$ とおくと，$AB = BA$ であるから，(2) の結果を利用して

$$\begin{aligned} A^3 + B^3 &= (A + B)^3 - 3AB(A + B) = E - 3AB, \\ A^5 + B^5 &= (A^2 + B^2)(A^3 + B^3) - A^2B^2(A + B) \\ &= (E - 2AB)(E - 3AB) - A^2B^2 \\ &= E - 5AB + 5A^2B^2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$A^4 + B^4 = E$ のとき，① より　　$A^2B^2 = 2AB$

$A^5 + B^5 = E$ のとき，② より　　$A^2B^2 = AB$

上の 2 式より，$AB = O$ であるから

$$A(E - A) = O \quad よって \quad A^2 = A$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $r=0,1,2,3,4$ とし，5 つ集合を

$$A_r = \{x \,|\, x \text{ は } 5n \text{ 以下の自然数},\ x \equiv r \pmod 5\}$$

とすると，$A_r$ の要素の個数は $n$ 個．取り出した 2 個の玉の番号の和が 5 で割り切れるのは，次の 3 つの事象である．

「$A_0$ から 2 個取り出す」

「$A_1$，$A_4$ からそれぞれ 1 個ずつ取り出す」

「$A_2$，$A_3$ からそれぞれ 1 個ずつ取り出す」

これらの事象は，互いに排反であるから，求める確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{5n}\mathrm{C}_2} + \frac{{}_n\mathrm{C}_1 \times {}_n\mathrm{C}_1}{{}_{5n}\mathrm{C}_2} + \frac{{}_n\mathrm{C}_1 \times {}_n\mathrm{C}_1}{{}_{5n}\mathrm{C}_2} \\
=&\frac{2}{5n(5n-1)}\left\{\frac{n(n-1)}{2} + n^2 + n^2\right\} \\
=&\frac{2}{5n(5n-1)} \times \frac{n(5n-1)}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{5}}
\end{aligned}$$

(2)
$$0^2 \equiv 0,\ 1^2 \equiv 4^2 \equiv 1,\ 2^2 \equiv 3^2 \equiv 4 \pmod 5$$

したがって，取り出した 2 個の玉の番号の平方の和が 5 で割り切れるのは，次の 2 つの事象である．

「$A_0$ から 2 個取り出す」

「$A_1 \cup A_4$，$A_2 \cup A_3$ からそれぞれ 1 個ずつ取り出す」

これらの事象は，互いに排反であるから，求める確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{5n}\mathrm{C}_2} + \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_1 \times {}_{2n}\mathrm{C}_1}{{}_{5n}\mathrm{C}_2} \\
=&\frac{2}{5n(5n-1)}\left\{\frac{n(n-1)}{2} + 2n\cdot 2n\right\} \\
=&\frac{2}{5n(5n-1)} \times \frac{n(9n-1)}{2} = \boldsymbol{\frac{9n-1}{5(5n-1)}}
\end{aligned}$$

(3) 最初に取り出した 2 個の玉の番号の和が 5 で割り切れるのは，(1) で示した 3 つの事象があり，さらに，(2) で示した 2 つの事象がある．

(i) 最初に「$A_0$ から 2 個取り出す」場合の確率は

$$
\begin{aligned}
&\frac{{}_{n}\mathrm{C}_2}{{}_{5n}\mathrm{C}_2}\left\{\frac{{}_{n-2}\mathrm{C}_2}{{}_{5n-2}\mathrm{C}_2}+\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_1\times{}_{2n}\mathrm{C}_1}{{}_{5n-2}\mathrm{C}_2}\right\}\\
=&\frac{n-1}{5(5n-1)}\left\{\frac{(n-2)(n-3)}{(5n-2)(5n-3)}+\frac{8n^2}{(5n-2)(5n-3)}\right\}\\
=&\frac{(n-1)(9n^2-5n+6)}{5(5n-1)(5n-2)(5n-3)}
\end{aligned}
$$

(ii) 最初に「$A_1$，$A_4$ からそれぞれ 1 個ずつ取り出す」場合の確率は

$$
\begin{aligned}
&\frac{{}_{n}\mathrm{C}_1\times{}_{n}\mathrm{C}_1}{{}_{5n}\mathrm{C}_2}\left\{\frac{{}_{n}\mathrm{C}_2}{{}_{5n-2}\mathrm{C}_2}+\frac{{}_{2n-2}\mathrm{C}_1\times{}_{2n}\mathrm{C}_1}{{}_{5n-2}\mathrm{C}_2}\right\}\\
=&\frac{2n}{5(5n-1)}\left\{\frac{n(n-1)}{(5n-2)(5n-3)}+\frac{8n(n-1)}{(5n-2)(5n-3)}\right\}\\
=&\frac{18n^2(n-1)}{5(5n-1)(5n-2)(5n-3)}
\end{aligned}
$$

(iii) 最初に「$A_2$，$A_3$ からそれぞれ 1 個ずつ取り出す」場合の確率は

$$
\begin{aligned}
&\frac{{}_{n}\mathrm{C}_1\times{}_{n}\mathrm{C}_1}{{}_{5n}\mathrm{C}_2}\left\{\frac{{}_{n}\mathrm{C}_2}{{}_{5n-2}\mathrm{C}_2}+\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_1\times{}_{2n-2}\mathrm{C}_1}{{}_{5n-2}\mathrm{C}_2}\right\}\\
=&\frac{18n^2(n-1)}{5(5n-1)(5n-2)(5n-3)}
\end{aligned}
$$

(i)〜(iii) は互いに排反であり，(ii) と (iii) は等しいから，求める確率は

$$
\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(9n^2-5n+6)}{5(5n-1)(5n-2)(5n-3)}+\frac{18n^2(n-1)}{5(5n-1)(5n-2)(5n-3)}\times 2\\
=&\boldsymbol{\frac{(n-1)(45n^2-5n+6)}{5(5n-1)(5n-2)(5n-3)}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y = e^{-x}(\sin x + \cos x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x}(\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - \sin x) \\ &= \boldsymbol{-2e^{-x}\sin x} \end{aligned}$$

(2) $0 \leqq t \leqq x$ のとき，$e^t - 1 \geqq 0$ であるから

$$\int_0^x (e^t - 1)\,dt \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad e^x - 1 - x \geqq 0$$

これから，$0 \leqq t \leqq x$ のとき，$e^t - 1 - t \geqq 0$ であるから

$$\int_0^x (e^t - 1 - t)\,dt \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad e^x \geqq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

よって　　$x \geqq 0$ のとき　$e^x \geqq 1 + \dfrac{x^2}{2}$

したがって　$x \geqq 0$ のとき　$e^x \geqq \dfrac{x^2}{2}$　　ゆえに　$0 \leqq xe^{-x} \leqq \dfrac{2}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \mathbf{0}$$

(3) (1) の結果より，$\left\{-\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right\}' = e^{-x}\sin x$ であるから

$$\begin{aligned} \int xe^{-x}\sin x\,dx &= \int x\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right\}' dx \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-x}(\sin x + \cos x) + \int \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-x}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}e^{-x}\cos x + C \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} xe^{-x}\sin x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[-xe^{-x}(\sin x + \cos x) - e^{-x}\cos x\Big]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{(2n+1)\pi e^{-(2n+1)\pi} + 2n\pi e^{-2n\pi} + e^{-(2n+1)\pi} + e^{-2n\pi}\right\}} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果から，求める無限級数の和は

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\{\pi m e^{-m\pi} + e^{-m\pi}\} \\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m e^{-m\pi} + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\pi} \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-\pi}}{(1-e^{-\pi})^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}} = \boldsymbol{\frac{(\pi-1)e^{-\pi}+1}{2(1-e^{-\pi})^2}}\end{aligned}$$

**補足** $-1 < x < 1$ のとき

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

これを微分すると

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

さらに，上式の両辺に $x$ を掛けると

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

上の第 1 式と第 3 式に $x = e^{-\pi}$ を代入すると

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\pi} = \frac{1}{1-e^{-\pi}}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-m\pi} = \frac{e^{-\pi}}{(1-e^{-\pi})^2}$$

**4** (1) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ を微分すると

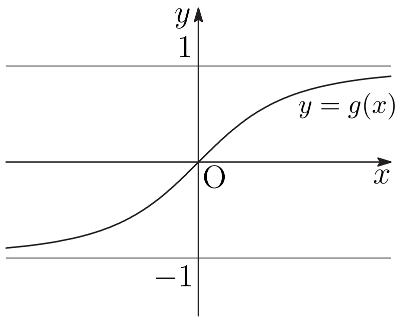
| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $g''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ |

$$g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$
$$g''(x) = -\frac{3x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

関数 $g(x)$ の増減は，右の増減表から単調増加であり，変曲点は

$$\mathbf{(0,\ 0)}$$

グラフの概形は，右の図のようになる．また，求める極限は




$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \mathbf{1},$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \mathbf{-1}$$

(2) A$(0,\ 1)$，B$(2, -1)$，P$(p,\ 0)$ より

$$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{p^2+1},\quad \overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(p-2)^2+1}$$

$f(p) = t\,\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ とおくと

$$f(p) = t\sqrt{p^2+1} + \sqrt{(p-2)^2+1},$$
$$f'(p) = \frac{tp}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{p-2}{\sqrt{(p-2)^2+1}}$$
$$= tg(p) + g(p-2) \quad \cdots(*)$$

$t > 0$ より，(1) の結果から $f'(p)$ は単調増加である．また

$$f'(0) = -\frac{2}{\sqrt{5}} < 0,\quad f'(2) = \frac{2t}{\sqrt{5}} > 0$$

であるから，$f'(c) = 0\ (0 < c < 2)$ を満たす $c$ がただ 1 つ存在する．したがって，$f(p)$ を最小にする点 P はただ 1 つ存在する．

(3) (2) においてただ 1 つ定まる点 P の $x$ 座標 $p=p(t)$ について，$f'(p)=0$ であるから，$(*)$ より，① および ① を $t$ について微分した ② を得る．

$$\begin{cases} tg(p)+g(p-2)=0 & \cdots ① \\ g(p)+tg'(p)p'(t)+g'(p-2)p'(t)=0 & \cdots ② \end{cases}$$

$t=1$ を ① に代入すると　　$g(p)+g(p-2)=0$

$y=g(x)$ は原点に関して対称であるから，$g(p)=-g(-p)$ より

$$-g(-p)+g(p-2)=0 \quad \text{ゆえに} \quad g(p-2)=g(-p)$$

また，$g(x)$ は単調増加であるから

$$p-2=-p \quad \text{これを解いて} \quad p=1$$

$p(1)=1$ に注意して，$t=1$ を ② に代入すると

$$g(1)+g'(1)p'(1)+g'(-1)p'(1)=0$$

(1) の結果から，$g(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$g'(1)=g'(-1)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ を上式に代入すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}p'(1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}p'(1)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p'(1)=-1}$$