平成23年度　九州大学2次試験後期日程(数学問題)150分
理学部(数学科)　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

$\boxed{1}$ aは1より大きい定数とし，点A$(-a,\ 0)$をとる．原点を中心とする半径1の円周上の動点P$(\cos t,\ \sin t)$を考える．直線APの傾きを$\tan\theta$と表す．ただし，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\tan\theta$をtを用いて表せ.

(2) $\dfrac{d\theta}{dt}$を$\cos t$を用いて表せ.

(3) $\dfrac{d\theta}{dt}$の最大値および最小値を求めよ.

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ.

(1) $n \geqq 6$かつ$3 \leqq k \leqq n-3$のとき，${}_n\mathrm{C}_k \geqq {}_n\mathrm{C}_3$であることを示せ.

(2) $n \geqq 6$のとき，次の不等式を示せ.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k} \leqq \frac{2}{n} + \frac{10n-38}{n(n-1)(n-2)}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{{}_n\mathrm{C}_k}$ を求めよ.

$\boxed{3}$ aとbは定数とし，$0<a<1$かつ$b>0$とする.

xy平面において，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$で表される図形を$S$とする．次に$xyz$空間において，$S$を$y$軸のまわりに1回転してできる立体を考える．$x \geqq 0$で表される領域とその立体との共通部分を$D$とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $-b<t<b$とする．平面$y=t$によるDの断面を図示せよ.

(2) 点$(1,\ 0,\ 0)$を通りy軸に平行な直線をlとする．Dをlのまわりに1回転してできる立体をVとする．平面$y=t$ $(-b \leqq t \leqq b)$によるVの断面の面積をtを用いて表せ.

(3) Vの体積を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $h(x)$ が任意の実数 a，b に対して不等式

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{h(a)+h(b)}{2}$$

をみたすとき，$h(x)$ は**中点凸**であるという．このとき，$\log x$ は x の自然対数として以下の問いに答えよ．

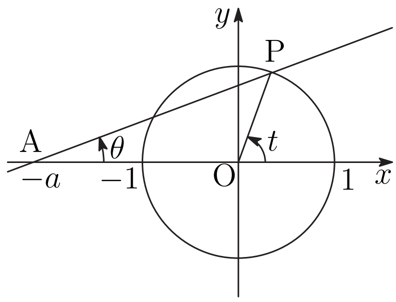
(1) 関数 $f(x)$ がつねに正の値をとり，$\log f(x)$ が中点凸ならば，$f(x)$ も中点凸になることを示せ．

(2) 関数 $|x|+1$ は中点凸であることを示せ．一方，$\log(|x|+1)$ は中点凸ではないことを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ がつねに正の値をとり，$\log f(x)$ と $\log g(x)$ がそれぞれ中点凸ならば，$\log\{f(x)+g(x)\}$ も中点凸になることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A$(-a,\ 0)$，P$(\cos t,\ \sin t)$ であるから，
AP の傾き $\tan\theta$ は



$$\tan\theta = \frac{\sin t - 0}{\cos t - (-a)} = \boldsymbol{\frac{\sin t}{\cos t + a}}$$

(2) (1) の結果を t について微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos t(\cos t + a) - \sin t(-\sin t)}{(\cos t + a)^2} = \frac{a\cos t + 1}{(\cos t + a)^2} \quad \cdots ①$$

(1) の結果から
$$1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\frac{\sin t}{\cos t + a}\right)^2 = \frac{(\cos t + a)^2 + \sin^2 t}{(\cos t + a)^2} = \frac{2a\cos t + a^2 + 1}{(\cos t + a)^2} \quad \cdots ②$$

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから，①，② より

$$\frac{2a\cos t + a^2 + 1}{(\cos t + a)^2}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{a\cos t + 1}{(\cos t + a)^2}$$

したがって
$$\boldsymbol{\frac{d\theta}{dt} = \frac{a\cos t + 1}{2a\cos t + a^2 + 1}}$$

(3) (2) の結果から
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{a^2 - 1}{2(2a\cos t + a^2 + 1)}$$

$-1 \leqq \cos t \leqq 1$ であるから

$$(a-1)^2 \leqq 2a\cos t + a^2 + 1 \leqq (a+1)^2$$

$a > 1$ より，$a^2 - 1 > 0$ であるから，$\dfrac{d\theta}{dt}$ の取り得る値の範囲は

$$\frac{1}{2} - \frac{a^2-1}{2(a-1)^2} \leqq \frac{d\theta}{dt} \leqq \frac{1}{2} - \frac{a^2-1}{2(a+1)^2}$$

$$-\frac{1}{a-1} \leqq \frac{d\theta}{dt} \leqq \frac{1}{a+1}$$

したがって　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{a+1}}$，**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{a-1}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $n \geqq 3$, $3 \leqq k \leqq n-3$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{{}_n\mathrm{C}_3} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{3!(n-3)!}{n!} = \frac{(n-3)!}{(n-k)!}\times\frac{3!}{k!}\\ &= (n-3)(n-4)\cdots(n-k+1)\times\frac{1}{k(k-1)\cdots 4}\\ &= \frac{n-3}{k}\cdot\frac{n-4}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{4}\end{aligned}$$

$3 \leqq k \leqq n-3$ より

$$n-3 \geqq k,\ n-4 \geqq k-1,\ \cdots,\ n-k+1 \geqq 4$$

ゆえに $$\frac{n-3}{k} \geqq 1,\quad \frac{n-4}{k-1} \geqq 1,\quad \frac{n-k+1}{4} \geqq 1$$

したがって $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k}{{}_n\mathrm{C}_3} \geqq 1\cdot 1\cdots 1 = 1$ よって ${}_n\mathrm{C}_k \geqq {}_n\mathrm{C}_3$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k} &= \frac{1}{{}_n\mathrm{C}_1} + \frac{1}{{}_n\mathrm{C}_2} + \frac{1}{{}_n\mathrm{C}_{n-2}} + \frac{1}{{}_n\mathrm{C}_{n-1}} + \sum_{k=3}^{n-3}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}\\ &\leqq \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} + \sum_{k=3}^{n-3}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_3}\\ &= \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} + (n-5)\times\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\\ &= \frac{2}{n} + \frac{10n-38}{n(n-1)(n-2)}\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{k+1}{{}_n\mathrm{C}_k}=(k+1)\cdot\dfrac{k!(n-k)!}{n!}=(n+1)\cdot\dfrac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}=\dfrac{n+1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}$

上式より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{{}_n\mathrm{C}_k}=(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}$ $\cdots$①

(2) の結果の n を $n+1$ に置き換えることにより

$$\begin{aligned}\frac{2}{n+1}+\frac{10n-28}{n(n+1)(n-1)}\geqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_k}&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}+\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}\leqq\frac{1}{n+1}+\frac{10n-28}{n(n+1)(n-1)}$ $\cdots$②

①，② より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{{}_n\mathrm{C}_k}\leqq 1+\frac{10n-28}{n(n-1)}$ $\cdots(*)$

また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{{}_n\mathrm{C}_k}=\frac{(n-1)+1}{{}_n\mathrm{C}_{n-1}}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k+1}{{}_n\mathrm{C}_k}\geqq 1$ $\cdots(**)$

$(*)$，$(**)$ より $\displaystyle 1\leqq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{{}_n\mathrm{C}_k}\leqq 1+\frac{10n-28}{n(n-1)}$

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{10n-28}{n(n-1)}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{{}_n\mathrm{C}_k}=\mathbf{1}$$

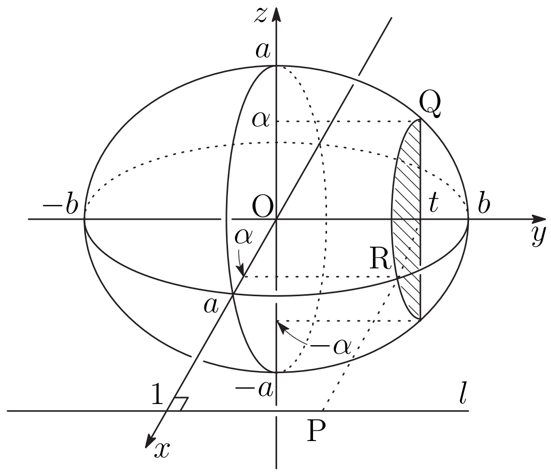
3 (1) xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の $y=t$ のときの x 座標は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1$$

これを解いて

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-t^2}$$

$\alpha=\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-t^2}$ とおくと，求める断面は，半径 α の半円で右の図の斜線部分である．



(2) 3点 P$(1,\ t,\ 0)$，Q$(0, t,\ \alpha)$，R$(\alpha,\ t,\ 0)$ をおくと，求める断面の面積は

$$\begin{aligned}\pi\cdot\mathrm{PQ}^2-\pi\cdot\mathrm{PR}^2&=\pi(\mathrm{PQ}^2-\mathrm{PR}^2)\\&=\pi\{(1+\alpha^2)-(1-\alpha)^2\}=2\pi\alpha\\&=2\pi\cdot\frac{a}{b}\sqrt{b^2-t^2}=\boldsymbol{\frac{2\pi a}{b}\sqrt{b^2-t^2}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，求める V の体積は

$$\int_{-b}^{b}\frac{2\pi a}{b}\sqrt{b^2-t^2}\,dt=\frac{2\pi a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2-t^2}\,dt$$

ここで，$\displaystyle\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2-t^2}\,dt$ は半径 b の半円の面積に等しい．

よって，V の体積は　$\dfrac{2\pi a}{b}\cdot\dfrac{\pi b^2}{2}=\boldsymbol{\pi^2 ab}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 関数 $f(x)$ はつねに正の値をとり，$\log f(x)$ が中点凸であるから

$$\log f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{\log f(a)+\log f(b)}{2} = \log\sqrt{f(a)f(b)}$$

したがって　$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \sqrt{f(a)f(b)} \quad \cdots (*)$$

相加平均・相乗平均の大小関係から

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \sqrt{f(a)f(b)} \leqq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

よって，$f(x)$ は中点凸である．

(2) $|a+b| \leqq |a|+|b|$ により

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|+1 = \frac{|a+b|+2}{2} \leqq \frac{(|a|+1)+(|b|+1)}{2}$$

よって，関数 $|x|+1$ は中点凸である．

次に，$h(x)=\log(|x|+1)$ とおくと

$$h\left(\frac{0+2}{2}\right) = h(1) = \log 2,$$
$$\frac{h(0)+h(2)}{2} = \frac{0+\log 3}{2} = \log\sqrt{3}$$

$\log 2 > \log\sqrt{3}$ であるから　$h\left(\dfrac{0+2}{2}\right) > \dfrac{h(0)+h(2)}{2}$

よって，関数 $\log(|x|+1)$ は，中点凸ではない．

(3) $\log\{f(x)+g(x)\}$ が中点凸であるとき

$$\log\left\{f\left(\frac{a+b}{2}\right)+g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} \leqq \frac{\log\{f(a)+g(a)\}+\log\{f(b)+g(b)\}}{2}$$
$$= \log\sqrt{\{f(a)+g(a)\}\{f(b)+g(b)\}}$$

このとき，次式が成立することを示せばよい．

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)+g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \sqrt{\{f(a)+g(a)\}\{f(b)+g(b)\}} \quad \cdots(**)$$

$\log f(x)$ と $\log g(x)$ がそれぞれ中点凸であるから，$(*)$ により

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)+g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \sqrt{f(a)g(a)}+\sqrt{f(b)g(b)} \quad \cdots ①$$

上式の右辺を平方すると

$$\begin{aligned}
&\left\{\sqrt{f(a)g(a)}+\sqrt{f(b)g(b)}\right\}^2 \\
=&f(a)g(a)+2\sqrt{f(a)g(a)f(b)g(b)}+f(b)g(b) \\
=&\{f(a)+g(a)\}\{f(b)+g(b)\}-\left\{\sqrt{f(a)g(b)}-\sqrt{f(b)g(a)}\right\}^2 \\
\leqq&\{f(a)+g(a)\}\{f(b)+g(b)\}
\end{aligned}$$

ゆえに $\sqrt{f(a)g(a)}+\sqrt{f(b)g(b)} \leqq \sqrt{\{f(a)+g(a)\}\{f(b)+g(b)\}} \quad \cdots ②$

①，② より，$(**)$ が成立するので，$\log\{f(x)+g(x)\}$ は中点凸である．