平成22年度　九州大学2次試験後期日程(数学問題)150分
理学部(数学科)　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

$\boxed{1}$ xy 平面において，不等式 $(x-2)^2+y^2 \leqq 1$ で表される領域を D とする．xyz 空間において，D を y 軸のまわりに1回転してできる立体を K とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面に図示せよ．

(2) $-1 \leqq t \leqq 1$ とする．平面 $y=t$ による立体 K の切り口の面積を t を用いて表せ．

(3) 立体 K の体積を求めよ．

$\boxed{2}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

により，点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を定める．このとき，点列 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots$ は，ある直線 L 上に

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots \quad \text{かつ} \quad |\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}| = 1 \ \ (n=0,1,2,\cdots)$$

を満たすように等間隔に並んだとする．さらに，直線 L の傾きは正とし，x 軸の正の部分と直線 L とのなす角を α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ を α を用いて表せ．

(2) 任意の点 $\mathrm{Q}_0(z_0,\ w_0)$ に対して，$\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ によって点 $\mathrm{Q}_n(z_n,\ w_n)$ を定める．ただし，Q_1 は Q_0 と異なる点とする．このとき，点列 $\mathrm{Q}_0,\ \mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2,\ \cdots$ はある直線上に等間隔に並ぶことを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問いに答えよ.

(1) 1 以上の実数 a と 0 以上の実数 x, c に対して, 不等式 $(x+c)^a \geqq x^a + c^a$ が成り立つことを示せ.

(2) 1 以上の実数 a と 0 以上の実数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n に対して, 不等式

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^a \geqq {x_1}^a + {x_2}^a + \cdots + {x_n}^a$$

が成り立つことを示せ.

(3) 正の整数 p, q が $p \geqq q$ を満たすとき, 0 以上の実数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n に対して, 不等式

$$({x_1}^q + {x_2}^q + \cdots + {x_n}^q)^p \geqq ({x_1}^p + {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p)^q$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 実数 x に対し, x 以下の最大の整数を $[x]$, x 以上の最小の整数を $\langle x \rangle$ で表すことにする. 例えば

$$\left[\frac{1}{2}\right] = 0, \quad \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle = 1, \quad \left[-\frac{1}{2}\right] = -1, \quad \left\langle -\frac{1}{2} \right\rangle = 0,$$
$$[\,3\,] = \langle 3 \rangle = 3, \quad [\,-3\,] = \langle -3 \rangle = -3$$

である. このとき, $f(x) = x - \dfrac{1}{2}([x] + \langle x \rangle)$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 整数 m と実数 x に対して, $f(x+m) = f(x)$ が成り立つことを示せ.

(2) 2 以上の整数 n と実数 x に対して,

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

が成り立つことを示せ.

(3) 2 以上の整数 n と実数 x に対して,

$$\langle nx \rangle + n - 1 = \langle x \rangle + \left\langle x + \frac{1}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle x + \frac{n-1}{n} \right\rangle$$

が成り立つことを示せ.

(4) 2 以上の整数 n と実数 x に対して,

$$f(nx) = f(x) + f\left(x + \frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(x + \frac{n-1}{n}\right)$$

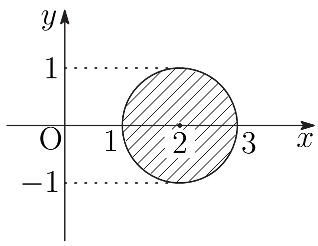
が成り立つことを示せ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 不等式

$$(x-2)^2+y^2 \leqq 1$$

の表す領域 D は，中心 $(2,\ 0)$，半径 1 の円の周およびその内部である．すなわち，右の図の斜線部分である．



(2) 円 $(x-2)^2+y^2=1$ と直線 $y=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ の交点の x 座標は

$$(x-2)^2+t^2=1 \quad これを解いて \quad x=2\pm\sqrt{1-t^2}$$

求める切り口の面積を $S(t)$ とすると

$$\begin{aligned}S(t) &= \pi\{(2+\sqrt{1-t^2})^2-(2-\sqrt{1-t^2})^2\}\\ &= \boldsymbol{8\pi\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

(3) 立体 K の体積を V とすると，(2) の結果から

$$V=\int_{-1}^{1} S(t)\,dt = 8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

ここで，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ は半径 1 の半円の面積に等しいので

$$V=8\pi\times\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\boldsymbol{4\pi^2}$$

補足 領域 D の面積を S，回転軸 (y 軸) から D の重心までの距離を h とすると，パップス・ギュルダンの定理により[1]

$$V=2\pi hS=2\pi\cdot 2\cdot\pi=4\pi^2$$

この定理は高校数学の範囲外であるため，入試では使用できないが，便利な検算法である．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf $\boxed{1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ とおき，$|\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}|=1$ に注意して L の方向ベクトルを $\vec{v}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$ とおくと $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，条件により

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=\vec{u}+n\vec{v}$$

$A\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}$ であるから

$$A(\vec{u}+n\vec{v})=\vec{u}+(n+1)\vec{v} \quad \text{ゆえに} \quad A\vec{u}+nA\vec{v}=(\vec{u}+\vec{v})+n\vec{v}$$

上式は任意の整数 $n\geqq 0$ について成り立つから

$$A\vec{u}=\vec{u}+\vec{v},\quad A\vec{v}=\vec{v}$$

上の 2 式から　$A\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$

ここで，$T=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}$ とおくと，$\det T=\sin\alpha\neq 0$ であるから

$$\begin{aligned}A&=T\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}T^{-1} \qquad \cdots(*)\\&=\frac{1}{\sin\alpha}\begin{pmatrix}1 & \cos\alpha\\0 & \sin\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\0 & 1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\sin\alpha}\begin{pmatrix}1+\cos\alpha & \cos\alpha\\\sin\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\0 & 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1+\cos\alpha & -\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\\\sin\alpha & 1-\cos\alpha\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a=1+\cos\alpha,\ \ b=-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha},}$

$\boldsymbol{c=\sin\alpha,\ \ d=1-\cos\alpha}$

(2) $(*)$ の両辺を n 乗すると

$$A^n = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}T^{-1} \quad \text{ゆえに} \quad A^n\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

したがって $\qquad A^n\vec{u} = \vec{u} + n\vec{v}, \quad A^n\vec{v} = \vec{v} \qquad \cdots(**)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}} &= A(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha A\vec{u} + \beta A\vec{v} \\ &= \alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta\vec{v} = \alpha\vec{u} + (\alpha + \beta)\vec{v}\end{aligned}$$

条件により，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}} \neq \overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$ であるから

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \neq \alpha\vec{u} + (\alpha + \beta)\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \alpha \neq 0$$

$(**)$ により $\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = A^n(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha A^n\vec{u} + \beta A^n\vec{v}$

$$\begin{aligned}&= \alpha(\vec{u} + n\vec{v}) + \beta\vec{v} = (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) + n\alpha\vec{v} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OQ_0}} + n\alpha\vec{v}\end{aligned}$$

$\alpha \neq 0$ であるから，点列 $\mathrm{Q_0}$，$\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$，$\cdots$ は $\mathrm{Q_0}$ を通り，L に平行な直線上に等間隔に並ぶ.

3 (1) $f(x) = (x + c)^a - (x^a + c^a)$ $(x \geqq 0)$ とおくと

$$f'(x) = a\{(x + c)^{a-1} - x^{a-1}\}$$

$a \geqq 1$，$c \geqq 0$ より $f'(x) \geqq 0$ となり，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x) \geqq f(0) = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x + c)^a \geqq x^a + c^a$$

(2) (1) の結果を順次適用することにより

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^a &\geqq (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1})^a + {x_n}^a \\ &\geqq (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2})^a + {x_{n-1}}^a + {x_n}^a \\ &\ \ \vdots \\ &\geqq {x_1}^a + {x_2}^a + \cdots + {x_n}^a\end{aligned}$$

(3) $p \geqq q > 0$ より，$\dfrac{p}{q} > 1$ であるから，(2) の結果の a を $\dfrac{p}{q}$，x_k を ${x_k}^q$ に置き換えると $(k = 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{aligned}({x_1}^q + {x_2}^q + \cdots + {x_n}^q)^{\frac{p}{q}} &\geqq ({x_1}^q)^{\frac{p}{q}} + ({x_2}^q)^{\frac{p}{q}} + \cdots + ({x_n}^q)^{\frac{p}{q}} \\ &= {x_1}^p + {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p\end{aligned}$$

上式の両辺を q 乗すると

$$({x_1}^q + {x_2}^q + \cdots + {x_n}^q)^p \geqq ({x_1}^p + {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p)^q$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $$f(x) = x - \frac{1}{2}([x] + \langle x \rangle)$$

x が整数のとき，$[x] = x$，$\langle x \rangle = x$ であるから

$$f(x) = x - \frac{1}{2}(x + x) = 0$$

このとき，$x + m$ も整数であるから　$f(x+m) = 0$

したがって　$f(x+m) = f(x)$

x が整数でないとき，$x = l + \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ とおくと $([x] = l,\ \langle x \rangle = l+1)$

$$[x+m] = [l+m+\alpha] = l+m = [x]+m,$$
$$\langle x+m \rangle = \langle l+m+\alpha \rangle = l+m+1 = \langle x \rangle + m$$

したがって
$$\begin{aligned} f(x+m) &= x+m-\frac{1}{2}([x+m] + \langle x+m \rangle) \\ &= x+m-\frac{1}{2}([x]+m+\langle x \rangle + m) \\ &= x - \frac{1}{2}([x] + \langle x \rangle) = f(x) \end{aligned}$$

よって，整数 m と実数 x に対して，$f(x+m) = f(x)$ が成り立つ．

(2) $g(x)=[x]+\left[x+\dfrac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\dfrac{n-1}{n}\right]$ とおくと

$$\begin{aligned} g\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x+1] \\ &= [x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+1 \\ &= g(x)+1 \end{aligned}$$

したがって，整数 $k \geqq 0$ に対して

$$g\left(x+\frac{k}{n}\right)=g\left(x+\frac{k-1}{n}\right)+1=\cdots=g(x)+k$$

$l=[x]$ とし，$x=l+\dfrac{k}{n}+\beta \ \left(0 \leqq \beta < \dfrac{1}{n}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} [nx] &= [nl+k+n\beta]=nl+k, \\ g(x) &= g\left(l+\frac{k}{n}+\beta\right)=g(l+\beta)+k \\ &= [l+\beta]+\left[l+\beta+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[l+\beta+\frac{n-1}{n}\right]+k \\ &= \overbrace{l+l+\cdots+l}^{n\text{ 個}}+k \\ &= nl+k \\ &= [nx] \end{aligned}$$

よって，2 以上の整数 n と実数 x に対して，

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

が成り立つ．

(3) $h(x) = \langle x \rangle + \left\langle x + \dfrac{1}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle x + \dfrac{n-1}{n} \right\rangle$ とおくと，(2) と同様に

$$\begin{aligned} h\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \left\langle x + \frac{1}{n} \right\rangle + \left\langle x + \frac{2}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle x + \frac{n-1}{n} \right\rangle + \langle x+1 \rangle \\ &= \langle x \rangle + \left\langle x + \frac{1}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle x + \frac{n-1}{n} \right\rangle + 1 \\ &= h(x) + 1 \end{aligned}$$

したがって，整数 $k \geqq 0$ に対して

$$h\left(x + \frac{k}{n}\right) = h\left(x + \frac{k-1}{n}\right) + 1 = \cdots = h(x) + k$$

$l = [x]$ とし，$x = l + \dfrac{k}{n} + \beta \quad \left(0 \leqq \beta < \dfrac{1}{n}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} \langle nx \rangle &= \langle nl + k + n\beta \rangle = nl + k + 1, \\ h(x) &= h\left(l + \frac{k}{n} + \beta\right) = h(l + \beta) + k \\ &= \langle l + \beta \rangle + \left\langle l + \beta + \frac{1}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle l + \beta + \frac{n-1}{n} \right\rangle + k \\ &= \overbrace{(l+1) + (l+1) + \cdots + (l+1)}^{n\text{ 個}} + k \\ &= n(l+1) + k \\ &= (nl + k + 1) + n - 1 \\ &= \langle nx \rangle + n - 1 \end{aligned}$$

よって，2 以上の整数 n と実数 x に対して，

$$\langle nx \rangle + n - 1 = \langle x \rangle + \left\langle x + \frac{1}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle x + \frac{n-1}{n} \right\rangle$$

が成り立つ．

(4) $f(x) = x - \dfrac{1}{2}([x] + \langle x \rangle)$ および (2)，(3) の結果により

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\left(\left[x + \frac{k}{n}\right] + \left\langle x + \frac{k}{n}\right\rangle\right)\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[x + \frac{k}{n}\right] - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left\langle x + \frac{k}{n}\right\rangle \\
&= nx + \frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}h(x) \\
&= nx + \frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{2}[nx] - \frac{1}{2}(\langle nx \rangle + n - 1) \\
&= nx - \frac{1}{2}([nx] + \langle nx \rangle) \\
&= f(nx)
\end{aligned}
$$

よって，2 以上の整数 n と実数 x に対して，

$$
f(nx) = f(x) + f\left(x + \frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(x + \frac{n-1}{n}\right)
$$

が成り立つ．