

平成22年度 九州大学2次試験後期日程(数学問題)150分
理学部(数学科) 3月12日 数学I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4

1 xy 平面において, 不等式 $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ で表される領域を D とする. xyz 空間において, D を y 軸のまわりに1回転してできる立体を K とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 領域 D を xy 平面に図示せよ.
- (2) $-1 \leq t \leq 1$ とする. 平面 $y = t$ による立体 K の切り口の面積を t を用いて表せ.
- (3) 立体 K の体積を求めよ.

2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

により, 点 $P_n(x_n, y_n)$ を定める. このとき, 点列 P_0, P_1, P_2, \dots は, ある直線 L 上に

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots \quad \text{かつ} \quad |\overrightarrow{P_n P_{n+1}}| = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たすように等間隔に並んだとする. さらに, 直線 L の傾きは正とし, x 軸の正の部分と直線 L とのなす角を α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) a, b, c, d を α を用いて表せ.
- (2) 任意の点 $Q_0(z_0, w_0)$ に対して, $\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) によって点 $Q_n(z_n, w_n)$ を定める. ただし, Q_1 は Q_0 と異なる点とする. このとき, 点列 Q_0, Q_1, Q_2, \dots はある直線上に等間隔に並ぶことを示せ.

3 次の問いに答えよ.

(1) 1 以上の実数 a と 0 以上の実数 x, c に対して, 不等式 $(x+c)^a \geq x^a + c^a$ が成り立つことを示せ.

(2) 1 以上の実数 a と 0 以上の実数 x_1, x_2, \dots, x_n に対して, 不等式

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^a \geq x_1^a + x_2^a + \dots + x_n^a$$

が成り立つことを示せ.

(3) 正の整数 p, q が $p \geq q$ を満たすとき, 0 以上の実数 x_1, x_2, \dots, x_n に対して, 不等式

$$(x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q)^p \geq (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^q$$

が成り立つことを示せ.

4 実数 x に対し, x 以下の最大の整数を $[x]$, x 以上の最小の整数を $\langle x \rangle$ で表すことにする. 例えば

$$\left[\frac{1}{2} \right] = 0, \quad \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle = 1, \quad \left[-\frac{1}{2} \right] = -1, \quad \left\langle -\frac{1}{2} \right\rangle = 0,$$

$$[3] = \langle 3 \rangle = 3, \quad [-3] = \langle -3 \rangle = -3$$

である. このとき, $f(x) = x - \frac{1}{2}([x] + \langle x \rangle)$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 整数 m と実数 x に対して, $f(x+m) = f(x)$ が成り立つことを示せ.

(2) 2 以上の整数 n と実数 x に対して,

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right]$$

が成り立つことを示せ.

(3) 2 以上の整数 n と実数 x に対して,

$$\langle nx \rangle + n - 1 = \langle x \rangle + \left\langle x + \frac{1}{n} \right\rangle + \dots + \left\langle x + \frac{n-1}{n} \right\rangle$$

が成り立つことを示せ.

(4) 2 以上の整数 n と実数 x に対して,

$$f(nx) = f(x) + f\left(x + \frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(x + \frac{n-1}{n}\right)$$

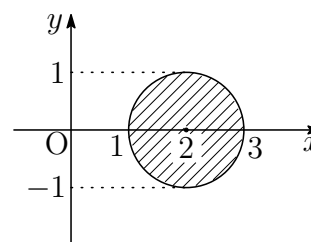
が成り立つことを示せ.

解答例

1 (1) 不等式

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 1$$

の表す領域 D は、中心 $(2, 0)$ 、半径 1 の円の周およびその内部である。すなわち、右の図の斜線部分である。



(2) 円 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) の交点の x 座標は

$$(x-2)^2 + t^2 = 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = 2 \pm \sqrt{1-t^2}$$

求める切り口の面積を $S(t)$ とすると

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi\{(2 + \sqrt{1-t^2})^2 - (2 - \sqrt{1-t^2})^2\} \\ &= 8\pi\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

(3) 立体 K の体積を V とすると、(2) の結果から

$$V = \int_{-1}^1 S(t) dt = 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

ここで、 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ は半径 1 の半円の面積に等しいので

$$V = 8\pi \times \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 4\pi^2$$

補足 領域 D の面積を S 、回転軸 (y 軸) から D の重心までの距離を h とすると、パップス・ギュルダンの定理により¹

$$V = 2\pi hS = 2\pi \cdot 2 \cdot \pi = 4\pi^2$$

この定理は高校数学の範囲外であるため、入試では使用できないが、便利な検算法である。 ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf 1

- 2** (1) $\vec{u} = \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおき, $|\overrightarrow{P_n P_{n+1}}| = 1$ に注意して L の方向ベクトルを $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ とおくと $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, 条件により

$$\overrightarrow{OP_n} = \vec{u} + n\vec{v}$$

$A\overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{OP_{n+1}}$ であるから

$$A(\vec{u} + n\vec{v}) = \vec{u} + (n+1)\vec{v} \quad \text{ゆえに} \quad A\vec{u} + nA\vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) + n\vec{v}$$

上式は任意の整数 $n \geq 0$ について成り立つから

$$A\vec{u} = \vec{u} + \vec{v}, \quad A\vec{v} = \vec{v}$$

上の2式から $A \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ここで, $T = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$ とおくと, $\det T = \sin \alpha \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} A &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} \quad \dots (*) \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \begin{pmatrix} 1 + \cos \alpha & \cos \alpha \\ \sin \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \cos \alpha & -\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \\ \sin \alpha & 1 - \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって $a = 1 + \cos \alpha$, $b = -\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$,
 $c = \sin \alpha$, $d = 1 - \cos \alpha$

(2) (*) の両辺を n 乗すると

$$A^n = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} T^{-1} \quad \text{ゆえに} \quad A^n \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

したがって $A^n \vec{u} = \vec{u} + n\vec{v}$, $A^n \vec{v} = \vec{v}$ \dots (**)

$\overrightarrow{OQ_0} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ_1} &= A(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha A\vec{u} + \beta A\vec{v} \\ &= \alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta\vec{v} = \alpha\vec{u} + (\alpha + \beta)\vec{v} \end{aligned}$$

条件により, $\overrightarrow{OQ_0} \neq \overrightarrow{OQ_1}$ であるから

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \neq \alpha\vec{u} + (\alpha + \beta)\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \alpha \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{(**) により} \quad \overrightarrow{OQ_n} &= A^n(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha A^n \vec{u} + \beta A^n \vec{v} \\ &= \alpha(\vec{u} + n\vec{v}) + \beta\vec{v} = (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) + n\alpha\vec{v} \\ &= \overrightarrow{OQ_0} + n\alpha\vec{v} \end{aligned}$$

$\alpha \neq 0$ であるから, 点列 Q_0, Q_1, Q_2, \dots は Q_0 を通り, L に平行な直線上に等間隔に並ぶ. ■

3 (1) $f(x) = (x+c)^a - (x^a + c^a)$ ($x \geq 0$) とおくと

$$f'(x) = a\{(x+c)^{a-1} - x^{a-1}\}$$

$a \geq 1, c \geq 0$ より $f'(x) \geq 0$ となり, $f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x) \geq f(0) = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+c)^a \geq x^a + c^a$$

(2) (1) の結果を順次適用することにより

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^a &\geq (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1})^a + x_n^a \\ &\geq (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2})^a + x_{n-1}^a + x_n^a \\ &\vdots \\ &\geq x_1^a + x_2^a + \dots + x_n^a \end{aligned}$$

(3) $p \geq q > 0$ より, $\frac{p}{q} > 1$ であるから, (2) の結果の a を $\frac{p}{q}$, x_k を x_k^q に置き換えると ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} (x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q)^{\frac{p}{q}} &\geq (x_1^q)^{\frac{p}{q}} + (x_2^q)^{\frac{p}{q}} + \dots + (x_n^q)^{\frac{p}{q}} \\ &= x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p \end{aligned}$$

上式の両辺を q 乗すると

$$(x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q)^p \geq (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^q$$
■

$$\boxed{4} \quad (1) \quad f(x) = x - \frac{1}{2}([x] + \langle x \rangle)$$

x が整数のとき, $[x] = x$, $\langle x \rangle = 0$ であるから

$$f(x) = x - \frac{1}{2}(x + 0) = 0$$

このとき, $x + m$ も整数であるから $f(x + m) = 0$

したがって $f(x + m) = f(x)$

x が整数でないとき, $x = l + \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) とおくと ($[x] = l$, $\langle x \rangle = \alpha$)

$$[x + m] = [l + m + \alpha] = l + m = [x] + m,$$

$$\langle x + m \rangle = \langle l + m + \alpha \rangle = \alpha = \langle x \rangle$$

したがって $f(x + m) = x + m - \frac{1}{2}([x + m] + \langle x + m \rangle)$

$$= x + m - \frac{1}{2}([x] + m + \langle x \rangle + m)$$

$$= x - \frac{1}{2}([x] + \langle x \rangle) = f(x)$$

よって, 整数 m と実数 x に対して, $f(x + m) = f(x)$ が成り立つ.

(2) $g(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$ とおくと

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + [x+1] \\ &= [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + 1 \\ &= g(x) + 1 \end{aligned}$$

したがって、整数 $k \geq 0$ に対して

$$g\left(x + \frac{k}{n}\right) = g\left(x + \frac{k-1}{n}\right) + 1 = \cdots = g(x) + k$$

$l = [x]$ とし、 $x = l + \frac{k}{n} + \beta$ ($0 \leq \beta < \frac{1}{n}$) とおくと

$$\begin{aligned} [nx] &= [nl + k + n\beta] = nl + k, \\ g(x) &= g\left(l + \frac{k}{n} + \beta\right) = g(l + \beta) + k \\ &= [l + \beta] + \left[l + \beta + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[l + \beta + \frac{n-1}{n}\right] + k \\ &= \overbrace{l + l + \cdots + l}^{n \text{ 個}} + k \\ &= nl + k \\ &= [nx] \end{aligned}$$

よって、2以上の整数 n と実数 x に対して、

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

が成り立つ。

(3) $h(x) = \langle x \rangle + \left\langle x + \frac{1}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle x + \frac{n-1}{n} \right\rangle$ とおくと, (2) と同様に

$$\begin{aligned} h\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \left\langle x + \frac{1}{n} \right\rangle + \left\langle x + \frac{2}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle x + \frac{n-1}{n} \right\rangle + \langle x+1 \rangle \\ &= \langle x \rangle + \left\langle x + \frac{1}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle x + \frac{n-1}{n} \right\rangle + 1 \\ &= h(x) + 1 \end{aligned}$$

したがって, 整数 $k \geq 0$ に対して

$$h\left(x + \frac{k}{n}\right) = h\left(x + \frac{k-1}{n}\right) + 1 = \cdots = h(x) + k$$

$l = [x]$ とし, $x = l + \frac{k}{n} + \beta$ ($0 \leq \beta < \frac{1}{n}$) とおくと

$$\begin{aligned} \langle nx \rangle &= \langle nl + k + n\beta \rangle = nl + k + 1, \\ h(x) &= h\left(l + \frac{k}{n} + \beta\right) = h(l + \beta) + k \\ &= \langle l + \beta \rangle + \left\langle l + \beta + \frac{1}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle l + \beta + \frac{n-1}{n} \right\rangle + k \\ &= \overbrace{(l+1) + (l+1) + \cdots + (l+1)}^{n \text{ 個}} + k \\ &= n(l+1) + k \\ &= (nl + k + 1) + n - 1 \\ &= \langle nx \rangle + n - 1 \end{aligned}$$

よって, 2以上の整数 n と実数 x に対して,

$$\langle nx \rangle + n - 1 = \langle x \rangle + \left\langle x + \frac{1}{n} \right\rangle + \cdots + \left\langle x + \frac{n-1}{n} \right\rangle$$

が成り立つ.

(4) $f(x) = x - \frac{1}{2}([x] + \langle x \rangle)$ および (2), (3) の結果により

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2} \left(\left[x + \frac{k}{n} \right] + \left\langle x + \frac{k}{n} \right\rangle \right) \right\} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{n} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle x + \frac{k}{n} \right\rangle \\
 &= nx + \frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2}h(x) \\
 &= nx + \frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{2}[nx] - \frac{1}{2}(\langle nx \rangle + n - 1) \\
 &= nx - \frac{1}{2}([nx] + \langle nx \rangle) \\
 &= f(nx)
 \end{aligned}$$

よって、2以上の整数 n と実数 x に対して、

$$f(nx) = f(x) + f\left(x + \frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(x + \frac{n-1}{n}\right)$$

が成り立つ. ■