平成21年度　九州大学２次試験後期日程(数学問題)150分
理学部(数学科)　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

$\boxed{1}$ (1) 2次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で表される移動 f によって点 $\mathrm{P}(1,\ k)$ は同じ点 $\mathrm{P}(1,\ k)$ に移るとする．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(i) 点Pの y 座標 k を θ を用いて表せ.

(ii) 移動 f は，直線 $y = kx$ 上の任意の点 $(x,\ kx)$ を同じ点 $(x,\ kx)$ に移すことを示せ.

(iii) 移動 f は，直線 $y = kx$ に垂直な直線 $y = mx$ 上の点をすべて原点 $(0,\ 0)$ に移すことを示せ.

(2) 2次の正方行列 B で表される移動を g とする．この g によって，x 軸上の任意の点は直線 $y = 2x$ 上の点に移り，y 軸上の任意の点は直線 $y = 3x$ 上の点に移り，さらに直線 $y = x$ 上の任意の点は直線 $y = 5x$ 上の点に移るとする．このような行列 B をすべて求めよ．その中で特に点 $\mathrm{C}(1,\ 1)$ を点 $\mathrm{D}(-1, -5)$ に移す行列 B を決定せよ.

$\boxed{2}$ 半径1の円 C の円周を n 等分した点 $\mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_n$ を順に結んでできる正 n 角形を A_n とする．また，各 P_i における円 C の接線を考え，これらの接線の交点を順に結んでできる正 n 角形で，円 C に外接するものを B_n とする．A_n，B_n の面積をそれぞれ a_n，b_n とする．ただし，$n \geqq 3$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) a_n，b_n を求めよ.

(2) $a_n = \dfrac{n^2 b_n}{n^2 + {b_n}^2}$，$a_{2n} = \sqrt{a_n b_n}$，$\dfrac{a_{2n} b_n}{a_{2n} + b_n} = \dfrac{b_{2n}}{2}$ を示せ.

(3) a_6，b_6，a_{12}，b_{12} を計算し，$b_{12} < 3.22$ であることを示せ.
ただし，$\sqrt{3} = 1.73205\cdots$ であることは使ってよい.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $y=f(x)$ は，すべての x に対して $f(x)>0$ および

$$(x^2+1)f(x)=\int_0^x \left\{ t^2 f'(t)+\frac{4t}{t^2+1}f(t) \right\} dt+1$$

をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ を計算し，それを利用して $f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 二者 A と B が対戦し，引き分けはないものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 先に 4 勝した方が優勝するときめる．A が B に勝つ確率は $\dfrac{3}{4}$ であるとき，5 試合目までに A が優勝する確率を求めよ．

(2) 先に 4 勝した方が優勝するときめる．A が B に勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ であるとき，A が 4 勝 3 敗で優勝する確率と A が 4 勝 2 敗で優勝する確率の大小を比べよ．

(3) 自然数 n と m が $1 \leqq m < n$ をみたしているとする．先に n 勝した方が優勝するときめる．A が B に勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ であるとき，A が n 勝 m 敗で優勝する確率と A が n 勝 $m-1$ 敗で優勝する確率が同じであるようなすべての組 $(n,\ m)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$ の特性方程式は

$$\lambda^2-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\lambda+(\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta-\cos\theta\sin\theta\cdot\cos\theta\sin\theta)=0$$

すなわち　$\lambda^2-\lambda=0$　これを解いて　$\lambda=0,\ 1$

$$\begin{aligned} A-E &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta-1 & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ は，A の固有値 1 に対するベクトルで，その 1 つのは

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}=\cos\theta\begin{pmatrix} 1 \\ \tan\theta \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

(i) ① より　　$\boldsymbol{k=\tan\theta}$

(ii) 条件より，$A\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ であるから

$$xA\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad A\begin{pmatrix} x \\ kx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ kx \end{pmatrix}$$

よって，f により直線 $y=kx$ 上の任意の点 $(x,\ kx)$ は同じ点 $(x,\ kx)$ に移る．

(iii) $A\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，ベクトル $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ は，A の固有値 0 に対する固有ベクトルで，① に垂直である．したがって，f によって，直線 $y=mx$ 上の点をすべて原点に移す．

補足 A は対称行列であるから，固有値 0，1 に対する 2 つの固有ベクトルは垂直である[1]．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf $\boxed{7}$ を参照．

(2) 題意より，実数 α，β を用いて

$$B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

上の 2 式から　$B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\2\alpha+3\beta\end{pmatrix}\quad\cdots②$

このとき，点 $(\alpha+\beta, 2\alpha+3\beta)$ は，直線 $y=5x$ 上の点であるから

$$2\alpha+3\beta=5(\alpha+\beta)\quad \text{ゆえに}\quad 3\alpha+2\beta=0$$

ここで，$\alpha=2a$，$\beta=-3a$ とおくと (a は実数)，① より

$$B\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\2\alpha&3\beta\end{pmatrix}\quad\cdots③$$

したがって　$\boldsymbol{B=\begin{pmatrix}2a&-3a\\4a&-9a\end{pmatrix}}$ **(a は実数)**

また，B によって点 C$(1,\ 1)$ が点 $(-1,-5)$ に移るから，② より

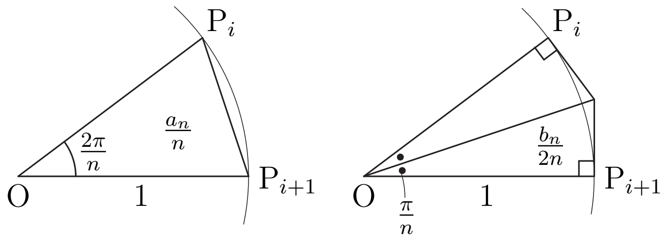
$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\2\alpha+3\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}\quad \text{これを解いて}\quad \alpha=2,\ \ \beta=-3$$

これを ③ に代入して　$\boldsymbol{B=\begin{pmatrix}2&-3\\4&-9\end{pmatrix}}$

別解 $\begin{pmatrix}2a&-3a\\4a&-9a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$ であるから　$a=1$

よって　$B=\begin{pmatrix}2&-3\\4&-9\end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2つの面積 $\dfrac{a_n}{n}$ および $\dfrac{b_n}{2n}$ は，下の図の部分の面積である．



したがって　$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\sin\dfrac{2\pi}{n},\qquad \dfrac{b_n}{2n}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\tan\dfrac{\pi}{n}$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{n}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n},\qquad b_n=n\tan\dfrac{\pi}{n}}$

(2) (1) の結果から

$$\frac{n^2b_n}{n^2+{b_n}^2}=\frac{n^2\cdot n\tan\frac{\pi}{n}}{n^2+n^2\tan^2\frac{\pi}{n}}=\frac{n\tan\frac{\pi}{n}}{1+\tan^2\frac{\pi}{n}}=\frac{n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{n}+\cos^2\frac{\pi}{n}}$$
$$=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}=a_n,$$

$$a_nb_n=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\cdot n\tan\frac{\pi}{n}=n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{n}{\pi}\times\frac{n\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}$$
$$=n^2\sin^2\frac{\pi}{n}=\left(\frac{2n}{2}\sin\frac{2\pi}{2n}\right)^2={a_{2n}}^2,$$

$$\frac{a_{2n}b_n}{a_{2n}+b_n}=\frac{n\sin\frac{\pi}{n}\times n\tan\frac{\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}+n\tan\frac{\pi}{n}}=\frac{n\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}+1}=\frac{2n\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}{\left(2\cos^2\frac{\pi}{2n}-1\right)+1}$$
$$=\frac{n\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}}=\frac{1}{2}\cdot 2n\tan\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{2}b_{2n}$$

$n\geqq 3$ より，(1) の結果から　　$a_n>0$，$b_n>0$

よって　　$a_n=\dfrac{n^2b_n}{n^2+{b_n}^2}$，$a_{2n}=\sqrt{a_nb_n}$，$\dfrac{a_{2n}b_n}{a_{2n}+b_n}=\dfrac{b_{2n}}{2}$

(3) (1) の結果から

$$a_6 = \frac{6}{2}\sin\frac{2\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}, \qquad b_6 = 6\tan\frac{\pi}{6} = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

さらに，(2) の結果より

$$a_{12} = \sqrt{a_6 b_6} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}} = \mathbf{3},$$
$$b_{12} = \frac{2a_{12}b_6}{a_{12}+b_6} = \frac{2\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = \frac{12}{2+\sqrt{3}} = 12(2-\sqrt{3})$$

$\sqrt{3} = 1.73205\cdots$ であるから

$$b_{12} = 12(2-\sqrt{3}) < 12(2-1.732) = 3.216 < 3.22$$

(4) (1) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi\cdot 1 = \boldsymbol{\pi}$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} = \pi\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = \boldsymbol{\pi}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$(x^2+1)f(x)=\int_0^x\left\{t^2f'(t)+\frac{4t}{t^2+1}f(t)\right\}dt+1 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ の両辺を x について微分すると

$$2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=x^2f'(x)+\frac{4x}{x^2+1}f(x)$$

整理すると $\boldsymbol{f'(x)=\left(\frac{4x}{x^2+1}-2x\right)f(x)}$

(2) $f(x)>0$ より，(1) の結果から $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{4x}{x^2+1}-2x$

したがって $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int\left(\frac{4x}{x^2+1}-2x\right)dx$

$$\log f(x)=2\log(x^2+1)-x^2+\log C$$

ゆえに $f(x)=C(x^2+1)^2e^{-x^2}$ (C は積分定数)

$(*)$ に $x=0$ を代入すると $f(0)=1$ さらに上式より $C=1$

よって $\boldsymbol{f(x)=(x^2+1)^2e^{-x^2}}$

(3) (1) の結果から $f'(x)=-\dfrac{2x(x+1)(x-1)}{x^2+1}f(x)$

$f(x)>0$ により，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって **極大値** $\boldsymbol{f(-1)=f(1)=\frac{4}{e}}$**，極小値** $\boldsymbol{f(0)=1}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) A が B に勝つ確率が p のとき，A が B に対して x 勝 y 敗になる確率を $P(x,\ y)$ とすると

$$P(x,y)={}_{x+y}\mathrm{C}_xp^x(1-p)^y \quad \cdots(*)$$

求める確率は，A が B に 4 連勝または 3 勝 1 敗の後に勝つ確率である．$p=\dfrac{3}{4}$ であるから，$(*)$ により

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4+P(3,\ 1)\times\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$$
$$=\left(\frac{3}{4}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^4=\boldsymbol{\frac{81}{128}}$$

(2) Aが4勝3敗で優勝する確率は，AがBに3勝3敗の後に勝つ確率である．$p = \dfrac{1}{2}$ であるから，$(*)$ により

$$P(3,\ 3) \times \frac{1}{2} = {}_6\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$$

Aが4勝2敗で優勝する確率は，AがBに3勝2敗の後に勝つ確率である．$p = \dfrac{1}{2}$ であるから，$(*)$ により

$$P(3,\ 2) \times \frac{1}{2} = {}_5\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$$

よって，Aが4勝3敗で優勝する確率とAが4勝2敗で優勝する確率はともに $\dfrac{5}{32}$ で等しい．

(3) Aが n 勝 m 敗で優勝する確率は，AがBに $n-1$ 勝 m 敗の後に勝つ確率である．$p = \dfrac{1}{2}$ であるから，$(*)$ により

$$\begin{aligned} P(n-1,\ m) \times \frac{1}{2} &= {}_{m+n-1}\mathrm{C}_{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-1} \times \frac{1}{2} \\ &= {}_{m+n-1}\mathrm{C}_{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n} \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

Aが n 勝 $m-1$ 敗で優勝する確率は，AがBに $n-1$ 勝 $m-1$ 敗の後に勝つ確率である．$p = \dfrac{1}{2}$ であるから，$(*)$ により

$$\begin{aligned} P(n-1,\ m-1) \times \frac{1}{2} &= {}_{m+n-2}\mathrm{C}_{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-2} \times \frac{1}{2} \\ &= {}_{m+n-2}\mathrm{C}_{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-1} \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

① と ② の確率は等しいので

$$\begin{aligned} {}_{m+n-1}\mathrm{C}_{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n} &= {}_{m+n-2}\mathrm{C}_{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-1} \\ \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} \cdot \frac{1}{2^{m+n}} &= \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} \cdot \frac{1}{2^{m+n-1}} \\ \frac{m+n-1}{m} &= 2 \quad \text{すなわち} \quad n = m+1 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{(n,\ m) = (k+1,\ k) \quad (k = 1, 2, \cdots)}$