平成20年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)150分
理学部 (数学科)　3月12日　数学 I・II・III・A・B・C

1 $x > -1$ で定められた微分可能な関数 $f(x)$ と，$a > 0$ をみたす実数 a に対して，関数 $g(x)$ を

$$g(x) = ax - \int_0^x f(t)\,dt \quad (x > -1)$$

と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $x > -1$ において $f'(x) > 0$ をみたし，さらに $f(0) = 0$，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ をみたすとする．このとき，$g(x)$ は $x \geqq 0$ で最大値をもつことを示せ．

(2) $f(x) = \log(1 + x)$ のとき，$g(x)$ が $x \geqq 0$ で最大値をもつことを示し，その値を a を用いて表せ．

2 a，b，k を実数とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = a\sin x + b\cos x, \quad g(x) = k\int_0^x tf(x - t)\,dt$$

と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^\pi t\sin t\,dt$ と $\displaystyle\int_0^\pi t\cos t\,dt$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x)$ は，実数 c，d を用いて $g(x) = c\sin x + d\cos x$ と表されることを示せ．また，そのときの c，d を a，b，k を用いて表せ．

(3) すべての実数 x について $g(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ が成り立つとする．a，b が $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ をみたすとき，k の値を求めよ．

3 $\triangle\mathrm{ABC}$ について，$s = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$t = \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$u = \overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $s + t = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$，$t + u = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$，$u + s = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2$ が成り立つことを示せ．

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を s，t，u を用いて表せ．

(3) 与えられた $s_0 > 0$，$t_0 > 0$，$u_0 > 0$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{A_0B_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0C_0}} = s_0, \quad \overrightarrow{\mathrm{B_0C_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B_0A_0}} = t_0, \quad \overrightarrow{\mathrm{C_0A_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C_0B_0}} = u_0$$

をみたす $\triangle\mathrm{A_0B_0C_0}$ が存在することを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n 枚のカードが入った袋があり，これらのカードには 1 から n までの自然数が 1 枚につき 1 つずつ重複なく書かれている．袋の中をよくかき混ぜてカードを 1 枚取り出し，そのカードに書かれた数を記録した後，カードを袋に戻す．この試行をくり返し行うとき，次の問いに答えよ．ただし $n \geqq 3$ とする．

(1) 1 回目から 3 回目までに出る数がすべて異なる確率を p_n とする．このとき，p_n を求め，さらに $p_n \geqq \dfrac{2}{3}$ となる最小の n の値を求めよ．

(2) 1 回目，2 回目，3 回目に出る数をそれぞれ a_1，a_2，a_3 とし，$a_1 < a_2 < a_3$ となる確率を q_n とする．このとき，q_n を求め，さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ．

(3) 3 以上の自然数 k について $n = 2k$ のときを考える．3 以上の自然数 j について，1 回目から $j-1$ 回目までに出る数がすべて異なり，j 回目で出る数が $j-1$ 回目までに出た数のいずれかと一致する確率を r_j とする．このとき，r_k，r_{k+1}，r_{k+2} の大小を比較せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$g(x) = ax - \int_0^x f(t)\,dt \quad (x > -1) \quad \cdots (*)$$

$h(x) = g'(x)$ とおくと，$h(x) = g'(x) = a - f(x)$ であるから，条件より

$$h'(x) = -f'(x) < 0, \quad h(0) = a > 0, \quad \lim_{x \to \infty} h(x) = -\infty$$

ゆえに，$h(x)$ は単調減少で，$h(c) = 0$ をみたす $c > 0$ がただ1つ存在する．
したがって，$g(x)$ の増減表は，$g'(x) = h(x)$ より次のようになる．

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$g(x)$ は $x \geqq 0$ で最大値をもつ．

(2) $f(x) = \log(1+x)$ のとき，$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ であるから

$$f'(x) > 0, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

これらは，(1) の条件をみたすので，$f(x)$ は $x \geqq 0$ で最大値をもつ．このとき，$g'(c) = 0$ より，$a - f(c) = 0$ であるから

$$a - \log(1+c) = 0 \quad \text{すなわち} \quad c = e^a - 1$$

よって，求める最大値は，上式および $(*)$ より

$$\begin{aligned}
g(c) &= ac - \int_0^c f(t)\,dt = ac - \int_0^c \log(1+t)\,dt \\
&= ac - \int_0^c (1+t)' \log(1+t)\,dt \\
&= ac - \Big[(1+t)\log(1+t) \Big]_0^c + \int_0^c dt \\
&= ac - (1+c)\log(1+c) + c \\
&= c(a+1) - (1+c)\log(1+c) \\
&= (e^a - 1)(a+1) - e^a a \\
&= \boldsymbol{e^a - a - 1}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = \Big[-t\cos t + \sin t\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\pi}$

$$\int_0^{\pi} t\cos t\,dt = \Big[t\sin t + \cos t\Big]_0^{\pi} = \mathbf{-2}$$

(2)
$$\begin{aligned} f(x-t) &= a\sin(x-t) + b\cos(x-t) \\ &= a(\sin x\cos t - \cos x\sin t) + b(\cos x\cos t + \sin x\sin t) \\ &= (-a\cos x + b\sin x)\sin t + (a\sin x + b\cos x)\cos t \end{aligned}$$

したがって，(1) の結果より

$$\begin{aligned} g(x) &= k\int_0^{\pi} tf(x-t)\,dt \\ &= k(-a\cos x + b\sin x)\int_0^{\pi} t\sin t\,dt \\ &\qquad + k(a\sin x + b\cos x)\int_0^{\pi} t\cos t\,dt \\ &= \pi k(-a\cos x + b\sin x) - 2k(a\sin x + b\cos x) \\ &= k(-2a + \pi b)\sin x - k(\pi a + 2b)\cos x \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{c = k(-2a + \pi b)}$，$\boldsymbol{d = -k(\pi a + 2b)}$ とおくと

$$g(x) = c\sin x + d\cos x$$

と表される．

(3) $g(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ より

$$c\sin x + d\cos x = a\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

したがって　$c\sin x + d\cos x = b\sin x + a\cos x$

整理すると　$(c-b)\sin x + (d-a)\cos x = 0$

これがすべての実数 x について成り立つから　$c - b = 0,\quad d - a = 0$

上式に (2) の結果を代入すると

$$k(-2a + \pi b) - b = 0, \quad -k(\pi a + 2b) - a = 0$$

したがって　$\begin{pmatrix} -2k & \pi k - 1 \\ \pi k + 1 & 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ であるから　$-2k\cdot 2k - (\pi k - 1)(\pi k + 1) = 0$

整理すると　$(4 + \pi^2)k^2 = 1$　よって　$\boldsymbol{k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{4 + \pi^2}}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $s=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$t=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$u=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より

$$\begin{aligned}
s+t&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2,\\
t+u&=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2,\\
u+s&=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}})=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2
\end{aligned}$$

(2) $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{s}{\sqrt{s+t}\sqrt{u+s}}$ であるから

$$\begin{aligned}
\sin A&=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\frac{s^2}{(s+t)(u+s)}}\\
&=\sqrt{\frac{(s+t)(u+s)-s^2}{(s+t)(u+s)}}=\sqrt{\frac{st+tu+us}{(s+t)(u+s)}}
\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から，正弦定理により

$$\begin{aligned}
R&=\frac{1}{2}\cdot\frac{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}{\sin A}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{t+u}\cdot\sqrt{\frac{(s+t)(u+s)}{st+tu+us}}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(s+t)(t+u)(u+s)}{st+tu+us}}}
\end{aligned}$$

(3) (1) の結果を用いると

$$s_0+t_0=|\overrightarrow{\mathrm{A_0B_0}}|^2,\quad t_0+u_0=|\overrightarrow{\mathrm{B_0C_0}}|^2,\quad u_0+s_0=|\overrightarrow{\mathrm{C_0A_0}}|^2$$

$a=|\overrightarrow{\mathrm{B_0C_0}}|$，$b=|\overrightarrow{\mathrm{C_0A_0}}|$，$c=|\overrightarrow{\mathrm{A_0B_0}}|$ とおくと

$$2s_0=b^2+c^2-a^2,\quad 2t_0=c^2+a^2-b^2,\quad 2u_0=a^2+b^2-c^2$$

条件より，$s_0>0$，$t_0>0$，$u_0>0$ であるから

$$a^2<b^2+c^2,\quad b^2<c^2+a^2,\quad c^2<a^2+b^2$$

$b^2+c^2<(b+c)^2$，$c^2+a^2<(c+a)^2$，$a^2+b^2<(a+b)^2$ であるから

$$a^2<(b+c)^2,\quad b^2<(c+a)^2,\quad c^2<(a+b)^2$$

したがって　$a<b+c,\ \ b<c+a,\ \ c<a+b$

よって，与えられた条件を満たす $\triangle\mathrm{A_0B_0C_0}$ は存在する．

$\boxed{4}$ (1) 1 から n の n 個から異なる 3 個を並べる順列は ${}_n\mathrm{P}_3$ 通りある．
したがって，求める確率 p_n は

$$p_n = \frac{{}_n\mathrm{P}_3}{n^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = \boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}}$$

また，$p_n \geqq \dfrac{2}{3}$ となるとき

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \geqq \frac{2}{3} \quad \text{整理して} \quad n^2 - 9n + 6 \geqq 0$$

これを解いて $\quad n \leqq \dfrac{9-\sqrt{57}}{2}, \quad \dfrac{9+\sqrt{57}}{2} \leqq n \quad \cdots ①$

ここで，$7 < \sqrt{57} < 8$ であるから

$$\frac{1}{2} < \frac{9-\sqrt{57}}{2} < 1, \quad 8 < \frac{9+\sqrt{57}}{2} < \frac{17}{2}$$

よって，① をみたす最小の n は $(n \geqq 3)$ $\quad \boldsymbol{n = 9}$

(2) 1 から n の n 個から異なる 3 個を取り出す組合せは ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りあり，その 3 個を小さい順に a_1，a_2，a_3 とすればよい．よって，求める確率 q_n は

$$q_n = \frac{{}_n\mathrm{C}_3}{n^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} = \boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)}{6n^2}}$$

このとき $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(3) 1 から $2k$ の $2k$ 個から異なる $j-1$ を並べる順列は ${}_{2k}\mathrm{P}_{j-1}$ 通りあるから

$$r_j = \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_{j-1}}{(2k)^{j-1}} \times \frac{j-1}{2k} = \frac{(2k)!}{(2k-j+1)!} \times \frac{j-1}{(2k)^j}$$

したがって

$$r_k = \frac{(2k)!}{(k+1)!} \times \frac{k-1}{(2k)^k},$$

$$r_{k+1} = \frac{(2k)!}{k!} \times \frac{k}{(2k)^{k+1}},$$

$$r_{k+2} = \frac{(2k)!}{(k-1)!} \times \frac{k+1}{(2k)^{k+2}}$$

上の 3 式から $\quad \dfrac{r_k}{r_{k+1}} = \dfrac{2(k-1)}{k+1}, \quad \dfrac{r_{k+1}}{r_{k+2}} = \dfrac{2k}{k+1}$

ゆえに $\quad \dfrac{r_k}{r_{k+1}} - 1 = \dfrac{k-3}{k+1}, \quad \dfrac{r_{k+1}}{r_{k+2}} - 1 = \dfrac{k-1}{k+1}$

$k \geqq 3$ であるから，上の 2 式から

$$\boldsymbol{r_k \geqq r_{k+1} > r_{k+2}} \quad \textbf{(等号は } \boldsymbol{k=3} \textbf{ のとき)}$$