平成 19 年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)150 分
理学部 (数学科)　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B・C

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x+1}$ $(x \geqq 0)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して不等式

$$\log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

が成り立つことを示せ．

(2) k を 0 以上の整数とするとき

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+1+k\pi}dx$$

を示せ．

(3) k を 0 以上の整数とするとき

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\,dx > \frac{2}{(k+1)\pi+1}$$

を示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} |f(x)|\,dx$ が正の無限大に発散することを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．ただし，E を 2 次の単位行列，O を E と同じ型の零行列とし，行列及びベクトルの成分はすべて実数であるとする．

(1) A を 2 次の正方行列とする．どのような列ベクトル $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ についても $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つならば，$A = O$ であることを示せ．

(2) 2 次の正方行列 B が $B^2 + B + E = O$ を満たすとする．このとき列ベクトル $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対し $BY = bY$ となるような実数 b があるならば，$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることを示せ．

(3) (i) 与えられた 2 次の正方行列 C に対して，$C + \alpha E$ が逆行列をもつような実数 α があることを示せ．

(ii) 2 次の正方行列 D で，どのような実数 β についても $D + \beta E$ が逆行列をもつようなものの例をあげよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$ABC において，$\angle$A は直角，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 8$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 1$ とする．$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 2$ となるように辺 AB 上に点 D をとり，さらに辺 AB 上に点 P を，$\angle\mathrm{CPA} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{CDA} = 45^\circ$ となるようにとる．次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の内積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面に点 A$(a,\ 0)$ と点 B$(0,\ b)$ を結ぶ線分 AB をとる．a，b が

$$a + b = 1,\quad a \geqq 0,\quad b \geqq 0$$

を満たしながら動くとき，線分 AB が通る領域を D とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 $x = p\ (0 < p < 1)$ と領域 D との共通部分において，y 座標が最大値をとる点を P$(p,\ g(p))$ とする．このとき $g(p)$ を求めよ．

(2) 上で求めた点 P の軌跡を C とする．曲線 C 上の点 Q での接線が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ R，S とするとき，線分 OR と線分 OS の長さの和は点 Q のとり方によらず一定であることを示せ．ただし O は原点とする．

(3) 曲線 C と x 軸，および 2 直線 $x = \dfrac{1}{9}$，$x = \dfrac{1}{4}$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $k \leqq x \leqq k+1$ において $(k=1,2,3,\cdots)$

$$\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k} \qquad (\text{等号が成立するのは } x=k \text{ のとき})$$

ゆえに $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{k}$ すなわち $\displaystyle\log(k+1) - \log k < \frac{1}{k}$

したがって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{\log(k+1) - \log k\} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

よって $\displaystyle\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(2) $\displaystyle f(x) = \frac{\sin x}{x+1}$ $(x \geqq 0)$ より

$x = t + k\pi$ とおくと $\displaystyle\frac{dx}{dt} = 1$

x	$k\pi$	$\longrightarrow$	$(k+1)\pi$
t	0	$\longrightarrow$	π

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\,dx &= \int_0^{\pi} |f(t+k\pi)|\,dt = \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(t+k\pi)}{t+k\pi+1}\right| dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+k\pi+1}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+k\pi+1}\,dx\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+k\pi+1}\,dx &> \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\pi+k\pi+1}\,dx \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi+1} \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi+1}\end{aligned}$$

上式および (2) の結果から $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\,dx > \frac{2}{(k+1)\pi+1}$

(4) (3) の結果から $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\,dx > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi+1}$

ゆえに $\displaystyle\int_0^{n\pi} |f(x)|\,dx > \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi+1} > \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\pi(k+1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{2}{\pi}$

上式および (1) の結果から $\displaystyle\int_0^{n\pi} |f(x)|\,dx > \frac{2}{\pi}\{\log(n+2) - 1\}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\{\log(n+2) - 1\} = \infty$ よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} |f(x)|\,dx = \infty$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2次の正方行列 A を2つの列ベクトル P，Q に分割し

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix}$$

とおくと，$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について，$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき

$$AX = xP + yQ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式が任意の x，y について成り立つので

$$P = Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad A = O$$

(2) $BY = bY$ より $\qquad B^2Y = B(BY) = B(bY) = bBY = b(bY) = b^2Y$

ゆえに

$$\begin{aligned}(B^2 + B + E)Y &= B^2Y + BY + Y \\ &= b^2Y + bY + Y = (b^2 + b + 1)Y\end{aligned}$$

$B^2 + B + E = O$ であるから $\qquad (b^2 + b + 1)Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b^2 + b + 1 = \left(b + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \neq 0$ より $\qquad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) (i) $p = -\mathrm{tr}\, C$，$q = \dim C$ とおくと $\quad C^2 + pC + qE = O$

上式の左辺を変形すると

$$C^2 + pC + qE = (C + \alpha E)\{C + (p - \alpha)E\} - (p - q - \alpha^2)E$$

したがって $\qquad (C + \alpha E)\{C + (p - \alpha)E\} = (p - q - \alpha^2)E$

$p - q - \alpha^2 \neq 0$ を満たす α をとればよい．

このとき，$C + \alpha E$ の逆行列は $\qquad \dfrac{C + (p - \alpha)E}{p - q - \alpha^2}$

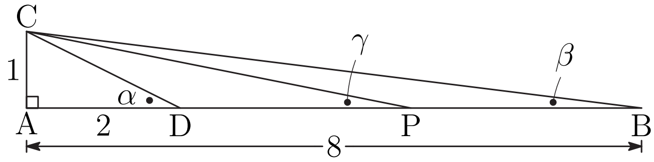
(ii) $r = -\mathrm{tr}\, D$，$s = \dim D$ とおくと，(i) の結果から，$r - s < 0$ のとき，どのような実数 β に対しても $D + \beta E$ は逆行列をもつ．このとき

$$-\mathrm{tr}\, D - \dim D < 0 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{tr}\, D + \dim D > 0$$

これを満たす D の1つは $\qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 下の図のように，$\alpha = \angle\mathrm{CDA}$，$\beta = \angle\mathrm{B}$，$\gamma = \angle\mathrm{CPA}$ とおくと

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}, \quad \tan\beta = \frac{1}{8}$$



加法定理により　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \dfrac{2}{3}$

条件より，$\alpha+\beta+\gamma = 45^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}\tan\gamma &= \tan\{45^\circ - (\alpha+\beta)\}\\ &= \frac{\tan 45^\circ - \tan(\alpha+\beta)}{1+\tan 45^\circ \tan(\alpha+\beta)} = \frac{1-\frac{2}{3}}{1+1\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

上の図から，$\tan\gamma = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{PA}} = \dfrac{1}{\mathrm{PA}}$ であるから　　$\mathrm{PA} = 5$

$\triangle\mathrm{ABC}$ を座標平面の点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(8,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1)$ とすると，$\mathrm{P}(5,\ 0)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = (-5,\ 1), \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-8, 1) \quad \cdots(*)$$

ゆえに　　$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = \sqrt{26}$,　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{65}$

よって　　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|} = \dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{65}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{10}}}{\mathbf{5}}$

(2) $(*)$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-5)\times(-8) + 1\times 1 = \mathbf{41}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 点 $\mathrm{P}(p,\ g(p))\ (0<p<1)$ は，$a,\ b \neq 0$ のときの点である．

このとき，2 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$ を通る直線は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

これと直線 $x=p$ の交点の y 座標は，$a+b=1$ に注意して

$$\frac{p}{a}+\frac{y}{1-a}=1 \quad \text{ゆえに} \quad y=1+p-\left(a+\frac{p}{a}\right)$$

$a,\ p>0$ であるから $\quad y=(1-\sqrt{p})^2-\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{p}{a}}\right)^2$

y は，$\sqrt{a}-\sqrt{\frac{p}{a}}=0$，すなわち，$a=\sqrt{p}$ のとき，最大値をとるので

$$\boldsymbol{g(p)=(1-\sqrt{p})^2}$$

(2) (1) の結果から，$g(x)=(1-\sqrt{x})^2$ であるから $\quad g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

$C: y=g(x)$ 上の点 Q を $(t,\ g(t))$ とする $(0<t<1)$.

C 上の点 Q における接線の方程式は

$$y-(1-\sqrt{t})^2=\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}(x-\sqrt{t})$$

これから，R と S の座標は $\quad \mathrm{R}(\sqrt{t},\ 0)$，$\mathrm{S}(0,\ 1-\sqrt{t})$

したがって，$\mathrm{OR}=\sqrt{t}$，$\mathrm{OS}=1-\sqrt{t}$ ゆえに $\mathrm{OR}+\mathrm{OS}=1$

よって，線分 OR と線分 OS の長さの和は点 Q のとり方によらず一定.

(3) 求める面積を S とすると $\quad S=\displaystyle\int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}}(1-\sqrt{x}\,)^2\,dx$

$u=1-\sqrt{x}$ とおくと，$x=(1-u)^2$，$\dfrac{dx}{du}=2(u-1)$

x	$\frac{1}{9} \longrightarrow \frac{1}{4}$
u	$\frac{2}{3} \longrightarrow \frac{1}{2}$

よって $\quad S=\displaystyle\int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}}(1-\sqrt{x}\,)^2\,dx=\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}}u^2\cdot 2(u-1)\,du$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}(2u^3-2u^2)\,du=\left[\frac{u^4}{2}-\frac{2}{3}u^3\right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}}=\mathbf{\frac{121}{2592}}$$