

平成19年度 九州大学2次試験後期日程(数学問題)150分
理学部(数学科) 3月12日 数学I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4

1 $f(x) = \frac{\sin x}{x+1}$ ($x \geq 0$) とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して不等式

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

が成り立つことを示せ.

(2) k を 0 以上の整数とするとき

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)| dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+1+k\pi} dx$$

を示せ.

(3) k を 0 以上の整数とするとき

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)| dx > \frac{2}{(k+1)\pi+1}$$

を示せ.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} |f(x)| dx$ が正の無限大に発散することを示せ.

2 次の問いに答えよ。ただし、 E を 2 次の単位行列、 O を E と同じ型の零行列とし、行列及びベクトルの成分はすべて実数であるとする。

(1) A を 2 次の正方行列とする。どのような列ベクトル $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について

も $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つならば、 $A = O$ であることを示せ。

(2) 2 次の正方行列 B が $B^2 + B + E = O$ を満たすとする。このとき列ベクトル $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対し $BY = bY$ となるような実数 b があるならば、

$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることを示せ。

(3) (i) 与えられた 2 次の正方行列 C に対して、 $C + \alpha E$ が逆行列をもつような実数 α があることを示せ。

(ii) 2 次の正方行列 D で、どのような実数 β についても $D + \beta E$ が逆行列をもつようなものの例をあげよ。

3 $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ は直角、 $|\overrightarrow{AB}| = 8$ 、 $|\overrightarrow{AC}| = 1$ とする。 $|\overrightarrow{AD}| = 2$ となるように辺 AB 上に点 D をとり、さらに辺 AB 上に点 P を、 $\angle CPA + \angle B + \angle CDA = 45^\circ$ となるようにとる。次の問いに答えよ。

(1) $\frac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$ を求めよ。

(2) ベクトル \overrightarrow{PC} と \overrightarrow{BC} の内積を求めよ。

4 座標平面に点 $A(a, 0)$ と点 $B(0, b)$ を結ぶ線分 AB をとる。 a, b が

$$a + b = 1, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

を満たしながら動くとき、線分 AB が通る領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 $x = p$ ($0 < p < 1$) と領域 D との共通部分において、 y 座標が最大値をとる点を $P(p, g(p))$ とする。このとき $g(p)$ を求めよ。

(2) 上で求めた点 P の軌跡を C とする。曲線 C 上の点 Q での接線が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ R, S とするとき、線分 OR と線分 OS の長さの和は点 Q のとり方によらず一定であることを示せ。ただし O は原点とする。

(3) 曲線 C と x 軸、および 2 直線 $x = \frac{1}{9}$ 、 $x = \frac{1}{4}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答例

1 (1) $k \leq x \leq k+1$ において ($k = 1, 2, 3, \dots$)

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \quad (\text{等号が成立するのは } x = k \text{ のとき})$$

$$\text{ゆえに } \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} \quad \text{すなわち } \log(k+1) - \log k < \frac{1}{k}$$

$$\text{したがって } \sum_{k=1}^n \{\log(k+1) - \log k\} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\text{よって } \log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

(2) $f(x) = \frac{\sin x}{x+1}$ ($x \geq 0$) より

$$x = t + k\pi \text{ とおくと } \frac{dx}{dt} = 1 \quad \begin{array}{c|c} x & k\pi \rightarrow (k+1)\pi \\ \hline t & 0 \rightarrow \pi \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)| dx &= \int_0^\pi |f(t+k\pi)| dt = \int_0^\pi \left| \frac{\sin(t+k\pi)}{t+k\pi+1} \right| dt \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+k\pi+1} dt = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+k\pi+1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+k\pi+1} dx &> \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi+k\pi+1} dx \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi+1} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{(k+1)\pi+1} \end{aligned}$$

$$\text{上式および (2) の結果から } \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)| dx > \frac{2}{(k+1)\pi+1}$$

$$(4) (3) \text{ の結果から } \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)| dx > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi+1}$$

$$\text{ゆえに } \int_0^{n\pi} |f(x)| dx > \sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi+1} > \sum_{k=1}^n \frac{2}{\pi(k+1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{2}{\pi}$$

$$\text{上式および (1) の結果から } \int_0^{n\pi} |f(x)| dx > \frac{2}{\pi} \{\log(n+2) - 1\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \{\log(n+2) - 1\} = \infty \quad \text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} |f(x)| dx = \infty \quad \blacksquare$$

- 2 (1) 2次の正方行列 A を2つの列ベクトル P, Q に分割し

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix}$$

とおくと, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について, $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき

$$AX = xP + yQ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式が任意の x, y について成り立つので

$$P = Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad A = O$$

- (2) $BY = bY$ より $B^2Y = B(BY) = B(bY) = bBY = b(bY) = b^2Y$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad (B^2 + B + E)Y &= B^2Y + BY + Y \\ &= b^2Y + bY + Y = (b^2 + b + 1)Y \end{aligned}$$

$$B^2 + B + E = O \text{ であるから} \quad (b^2 + b + 1)Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b^2 + b + 1 = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0 \text{ より} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (3) (i) $p = -\text{tr } C, q = \dim C$ とおくと $C^2 + pC + qE = O$

上式の左辺を変形すると

$$C^2 + pC + qE = (C + \alpha E)\{C + (p - \alpha)E\} - (p - q - \alpha^2)E$$

$$\text{したがって} \quad (C + \alpha E)\{C + (p - \alpha)E\} = (p - q - \alpha^2)E$$

$p - q - \alpha^2 \neq 0$ を満たす α をとればよい.

$$\text{このとき, } C + \alpha E \text{ の逆行列は} \quad \frac{C + (p - \alpha)E}{p - q - \alpha^2}$$

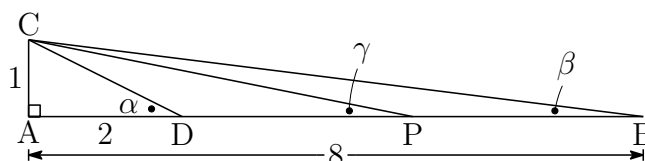
- (ii) $r = -\text{tr } D, s = \dim D$ とおくと, (i) の結果から, $r - s < 0$ のとき, どのような実数 β に対しても $D + \beta E$ は逆行列をもつ. このとき

$$-\text{tr } D - \dim D < 0 \quad \text{すなわち} \quad \text{tr } D + \dim D > 0$$

$$\text{これを満たす } D \text{ の1つは} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

- 3 (1) 下の図のように, $\alpha = \angle CDA$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle CPA$ とおくと

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \quad \tan \beta = \frac{1}{8}$$



$$\text{加法定理により } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{2}{3}$$

条件より, $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \tan\{45^\circ - (\alpha + \beta)\} \\ &= \frac{\tan 45^\circ - \tan(\alpha + \beta)}{1 + \tan 45^\circ \tan(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

上の図から, $\tan \gamma = \frac{AC}{PA} = \frac{1}{PA}$ であるから $PA = 5$

$\triangle ABC$ を座標平面の点 $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(0, 1)$ とすると, $P(5, 0)$ より

$$\overrightarrow{PC} = (-5, 1), \quad \overrightarrow{BC} = (-8, 1) \quad \dots (*)$$

$$\text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{26}, \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{65}$$

$$\text{よって} \quad \frac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{65}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$(2) (*) \text{ より } \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{BC} = (-5) \times (-8) + 1 \times 1 = 41 \quad \blacksquare$$

- 4 (1) 点 $P(p, g(p))$ ($0 < p < 1$) は, $a, b \neq 0$ のときの点である.
このとき, 2点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ を通る直線は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

これと直線 $x = p$ の交点の y 座標は, $a + b = 1$ に注意して

$$\frac{p}{a} + \frac{y}{1-a} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = 1 + p - \left(a + \frac{p}{a}\right)$$

$$a, p > 0 \text{ であるから} \quad y = (1 - \sqrt{p})^2 - \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{p}{a}}\right)^2$$

y は, $\sqrt{a} - \sqrt{\frac{p}{a}} = 0$, すなわち, $a = \sqrt{p}$ のとき, 最大値をとるので

$$g(p) = (1 - \sqrt{p})^2$$

- (2) (1) の結果から, $g(x) = (1 - \sqrt{x})^2$ であるから $g'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$

$C: y = g(x)$ 上の点 Q を $(t, g(t))$ とする ($0 < t < 1$).

C 上の点 Q における接線の方程式は

$$y - (1 - \sqrt{t})^2 = \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t}}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t}}(x - \sqrt{t})$$

これから, R と S の座標は $R(\sqrt{t}, 0)$, $S(0, 1 - \sqrt{t})$

したがって, $OR = \sqrt{t}$, $OS = 1 - \sqrt{t}$ ゆえに $OR + OS = 1$

よって, 線分 OR と線分 OS の長さの和は点 Q のとり方によらず一定.

- (3) 求める面積を S とすると $S = \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} (1 - \sqrt{x})^2 dx$

$$u = 1 - \sqrt{x} \text{ とおくと, } x = (1 - u)^2, \quad \frac{dx}{du} = 2(u - 1) \quad \begin{array}{c|c} x & \frac{1}{9} \longrightarrow \frac{1}{4} \\ \hline u & \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S &= \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} (1 - \sqrt{x})^2 dx = \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} u^2 \cdot 2(u - 1) du \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (2u^3 - 2u^2) du = \left[\frac{u^4}{2} - \frac{2}{3}u^3 \right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{121}{2592} \end{aligned}$$

