平成18年度　九州大学２次試験後期日程(数学問題)150分
理学部(数学科)　3月12日　数学I・II・III・A・B・C

$\boxed{1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = 0,\quad a_2 = 1\quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，$B_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ とおくとき，等式

$$B_{n+1} = AB_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす2次正方行列 A を求めよ．

(2) (1) で求めた行列 A に対し，

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

を満たす実数 λ，μ を求めよ．ただし，$\mu < 0 < \lambda$ とする．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を λ，μ を用いて表せ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

$\boxed{2}$ 座標空間において，3点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{a},\ 0,\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{b},\ 0\right)$，$\mathrm{C}\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{c}\right)$ を通る平面を α とする．ただし，a，b，c は正の数とする．平面 α に垂直で原点Oを通る直線と，α との交点をHとおく．次の問いに答えよ．

(1) 点Hの座標と線分OHの長さを a，b，c を用いて表せ．

(2) $c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．2点A，Bが条件 $\mathrm{OH} = 1$ を満たしながら動くとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S の最小値を求めよ．

$\boxed{3}$ 野球の2チームA，Bが多くとも5試合を戦い，先に3勝したチームが優勝とする．各試合でAチームがBチームに勝確率は一定値 p $(0 < p < 1)$ であり，引き分けはないものとする．次の問いに答えよ．

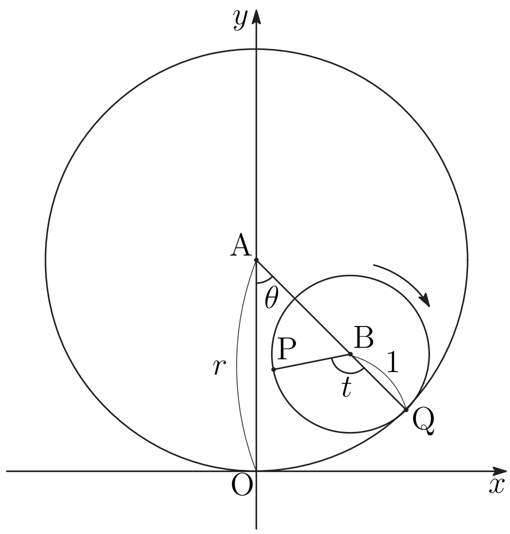
(1) 4試合目でAチームの優勝が決まる確率を求めよ．

(2) 5試合目で優勝チームが決まる確率を求めよ．

(3) 優勝チームが決まるまでに行われる試合数の期待値を求めよ．

(4) (3) で求めた期待値を最大にする確率は $p = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面内で，中心 $\mathrm{A}(0,\ r)$，半径 r の円 A を考える．ここで，半径 r は 2 より大きい定数であるとする．この円 A に半径 1 の円 B が内接しながら滑ることなく転がるとき，円 B の周上の点 P の描く軌跡を考えよう．ただし，円 B の中心は円 A の中心に関し反時計回りに動くものとする．時刻 $t=0$ では，円 B は円 A に原点 O において内接しているとし，このとき点 P は原点 O に一致しているとする．時刻 t $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ における円 A と円 B との接点を Q とし，$\angle\mathrm{PBQ} = t$ と仮定する．ただし，点 B は円 B の中心である．また $\angle\mathrm{OAQ} = \theta$ とおく．次の問に答えよ．



(1) 時刻 t における角 θ を t および r を用いて表せ．

(2) 時刻 t における円 B の中心 B の座標を θ および r を用いて表せ．

(3) 時刻 t における点 P の座標 $(x,\ y)$ を θ および r を用いて表せ．

(4) $r=4$ のとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ における点 P の軌跡を曲線 C とし，点 Q の軌跡を D とする．2 曲線 C と D で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$，$B_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

(2) ハミルトン・ケリーの定理を (1) で求めた行列 A に適用すると

$$A^2 - A - E = O$$

ここで，$\mu + \lambda = 1$，$\mu\lambda = -1$ とおくと $(\mu < 0 < \lambda)$

$$A^2 - (\mu + \lambda)A + \mu\lambda E = O \quad \text{ゆえに} \quad A(A - \mu E) = \lambda(A - \mu E)$$

このとき　$A - \mu E = \begin{pmatrix} 1-\mu & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda\mu \\ 1 & -\mu \end{pmatrix}$

ゆえに，$\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ は行列 A の固有値 λ に対する固有ベクトル.

同様に，$\begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$ は行列 A の固有値 μ に対する固有ベクトル.

したがって　$A\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

すなわち　$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

λ，μ は方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解であるから $(\mu < 0 < \lambda)$,

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

(3) $A^{n-1}\begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix}=\lambda^{n-1}\begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix}$, $A^{n-1}\begin{pmatrix}\mu\\1\end{pmatrix}=\mu^{n-1}\begin{pmatrix}\mu\\1\end{pmatrix}$ より

$$A^{n-1}\begin{pmatrix}\lambda-\mu\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^n-\mu^n\\\lambda^{n-1}-\mu^{n-1}\end{pmatrix}$$

$B_n=A^{n-1}B_1$ であるから

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda-\mu}\begin{pmatrix}\lambda^n-\mu^n\\\lambda^{n-1}-\mu^{n-1}\end{pmatrix}$$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{\lambda^{n-1}-\mu^{n-1}}{\lambda-\mu}}$

(4) (3) の結果から

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda^{n-1}-\mu^{n-1}}=\frac{\lambda-\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1}}$$

$\left|\dfrac{\mu}{\lambda}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{a},\ 0,\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{b},\ 0\right)$, $\mathrm{C}\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{c}\right)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(-\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ 0\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(-\frac{1}{a},\ 0,\ \frac{1}{c}\right)\quad\cdots(*)$$

これらのベクトルに垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$$

とおく．実数 k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{n}$ とおけるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k(a,\ b,\ c)=ka^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+kb^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+kc^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

このとき　$ka^2+kb^2+kc^2=1$　ゆえに　$k=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=|k|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

別解 3 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{a},\ 0,\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{b},\ 0\right)$，$\mathrm{C}\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{c}\right)$ を通る平面 α の方程式は

$$ax + by + cz - 1 = 0$$

したがって，O から α に下ろした垂線 OH の長さは

$$\mathrm{OH} = \frac{|-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

点と平面の距離

点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ から平面 $ax+by+cz+d=0$ までの距離は

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(2) $(*)$ より，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right) - \left(\frac{1}{a^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2abc} \end{aligned}$$

$\mathrm{OH}=1$ より，(1) の結果から　　$a^2+b^2+c^2=1$

また，$c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから　　$S=\dfrac{\sqrt{3}}{2ab}$　$\left(a^2+b^2=\dfrac{2}{3}\right)$

相加・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2}{3} = a^2+b^2 \geqq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{ab} \geqq 3$$

したがって　　$S \geqq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　$\left(\text{等号は } a=b=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき}\right)$

よって，求める S の最小値は　　$\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

補足 四面体 OABC の体積を V とすると　$V=\dfrac{1}{6abc}$

このとき，$\mathrm{OH}=1$ および $V=\dfrac{1}{3}S\cdot\mathrm{OH}$ より　$S=\dfrac{1}{2abc}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 3試合終了時点でAチームは2勝1敗で，4試合目にAチームが勝つ確率であるから

$$ {}_3\mathrm{C}_2 p^2(1-p)\times p = \boldsymbol{3p^3(1-p)} $$

(2) 4試合終了時点でAチームが2勝2敗となる確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^2 = \boldsymbol{6p^2(1-p)^2} $$

(3) Bチームの勝つ確率を $q\ (=1-p)$ とおく．

3試合目で優勝が決まる確率は

$$ p^3+q^3 $$

4試合目で優勝が決まる確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_2(p^2q\times p + pq^2\times q) = 3pq(p^2+q^2) $$

(2) の結果から，5試合目で優勝が決まる確率は

$$ 6p^2q^2 $$

以上より，求める期待値を $E(X)$ とすると

$$ E(X) = 3\times(p^3+q^3) + 4\times 3pq(p^2+q^2) + 5\times 6p^2q^2 $$

ここで，$p+q=1$ より

$$ \begin{aligned} p^3+q^3 &= (p+q)^3 - 3pq(p+q) = 1-3pq, \\ p^2+q^2 &= (p+q)^2 - 2pq = 1-2pq \end{aligned} $$

したがって

$$ \begin{aligned} E(X) &= 3(1-3pq) + 12pq(1-2pq) + 30p^2q^2 \\ &= 3(2p^2q^2+pq+1) \quad \cdots ① \\ &= 3\{2p^2(1-p)^2 + p(1-p) + 1\} \\ &= \boldsymbol{3(2p^4-4p^3+p^2+p+1)} \end{aligned} $$

(4) ① より

$$ E(X) = 3\left\{2\left(pq+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}\right\} $$

ここで

$$ pq = p(1-p) = -\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} $$

$0<p<1$ であるから，上式より　$0 < pq \leqq \dfrac{1}{4}$

よって，$E(X)$ は，$pq=\dfrac{1}{4}$，すなわち，$\boldsymbol{p=q=\dfrac{1}{2}}$ のとき最大となる．

$\boxed{4}$ (1) $\overset{\frown}{\mathrm{OQ}}=\overset{\frown}{\mathrm{QP}}$ より　$r\theta = t$　よって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{t}{r}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (r-1)\begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = (r-1)\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} (r-1)\sin\theta \\ r-(r-1)\cos\theta \end{pmatrix}$

よって　　$\mathrm{B}\boldsymbol{((r-1)\sin\theta,\ r-(r-1)\cos\theta)}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \begin{pmatrix} \cos\{(\theta - \frac{\pi}{2}) - t\} \\ \sin\{(\theta - \frac{\pi}{2}) - t\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta - t) \\ -\cos(\theta - t) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sin(\theta - r\theta) \\ -\cos(\theta - r\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(r-1)\theta \\ -\cos(r-1)\theta \end{pmatrix}$$

上式および (2) の結果から

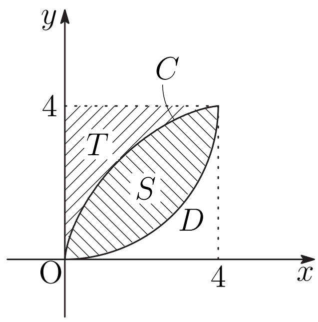
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \begin{pmatrix} (r-1)\sin\theta \\ r-(r-1)\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(r-1)\theta \\ -\cos(r-1)\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (r-1)\sin\theta - \sin(r-1)\theta \\ r-(r-1)\cos\theta - \cos(r-1)\theta \end{pmatrix}$$

よって

$\mathbf{P}\boldsymbol{((r-1)\sin\theta - \sin(r-1)\theta,\ r-(r-1)\cos\theta - \cos(r-1)\theta)}$

(4) (1),(3) の結果から，$r=4$，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ より，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の表す軌跡 C は



$$\begin{cases} x = 3\sin\theta - \sin 3\theta \\ y = 4 - 3\cos\theta - \cos 3\theta \end{cases} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

右の図において

$$S + T = 4\pi,$$

$$\begin{aligned} T &= \int_0^4 (4-y)\,dx \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta + \cos 3\theta)(\cos\theta - \cos 3\theta)\,d\theta \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2\theta - \cos^2 3\theta - 2\cos 3\theta\cos\theta)\,d\theta \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\cos 2\theta - \cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 6\theta\right) d\theta \\ &= 3\left[\,\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{12}\sin 6\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

よって　　$S = 4\pi - T = 4\pi - \dfrac{3}{2}\pi = \boldsymbol{\dfrac{5}{2}\pi}$