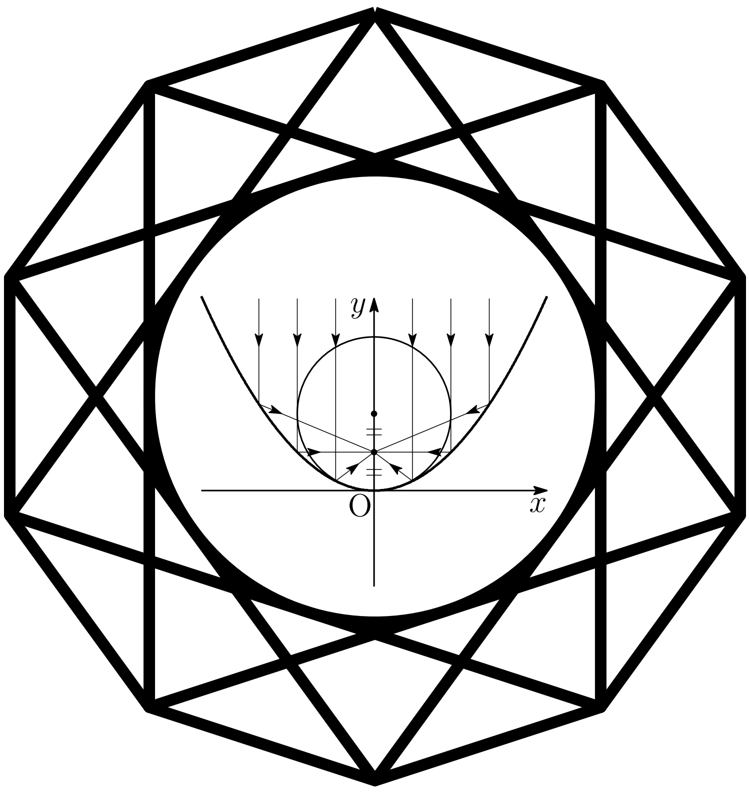
入試の軌跡

九州大学　理系

2015 − 2021

数　学



2021 年 10 月 27 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

序

本書は，九州大学経済学部 (経済工)・理学部・医学部 (保健 [看護] を除く)・歯学部・薬学部・工学部・芸術工学部・農学部受験者のための入試問題集である．

本書には，平成 27 年 (2015 年) 度から令和 3 年 (2021 年) 度までの 2 次試験前期日程の数学問題をすべて掲載した．第 1 章には問題を掲載し，第 2 章には解答，第 3 章には研究を付けた．

また，平成 9 年 (1997 年) から令和 3 年 (2021 年) までの一般前期試験問題および解答については，年度ごとに次のサイトに掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．

2. 本書は，電子文書 (PDF) での利用を想定し，ハイパーリンクを施した．利用する際には，全画面表示 ($\boxed{\text{Ctrl}}$+L) および描画領域に合わせる ($\boxed{\text{Ctrl}}$+3) と見やすくなる．ページスクロールには，($\boxed{\text{Ctrl}}$+▲，$\boxed{\text{Ctrl}}$+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る ($\boxed{\text{Alt}}$+◀)，進む ($\boxed{\text{Alt}}$+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには $\boxed{\text{ESC}}$．

3. 平成 13 年 (2001 年) 度から平成 26 年 (2014 年) 度までの旧課程の一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡　九州大学　理系』は，次である．

   http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf

4. また，本書の姉妹版である『入試の軌跡　九州大学　英語』も次のサイトに掲載しており，併せて活用いただけることを切に願うものである．

   http://kumamoto.s12.xrea.com/lis.html

令和 3 年 7 月　編者

目 次

第 1 章　一般前期問題

2003 年度以前の入試は，必答問題 3 題と，選択問題 3 題を 1 グループとした 2 グループから 1 題ずつ選んで 150 分で解答する形式であった．2004 年度入試以降は選択問題はなくなり，必答問題 5 題を 150 分で解答する現在の形式になった．

九大入試の特徴として，教科書にある公式の証明問題，教科書の典型的な問題についても確かな理解と応用力を問う問題が出題される．一方で，大学数学で扱う基本的な概念に因んだ問題が出題されることがあり，理学部数学教室や経済学部経済工学科らしさ (確率論) が随所に見られる．2009 年度入試においては，5 題中 2 題が微分幾何学の基本的な概念に由来するものであった．

2005 年度まで出題されていた複素数平面が 2015 年度から復活することになり，当時の頻出問題であったこと，比較的難易度が高かったことにも注意しておきたい．とくに，2014 年度入試においては，来年度からの新課程を意識した整数問題が出題されている．ユークリッドの互除法や合同式についても学習しておく必要があるようだ．

平成 26 年 3 月　編者

平成 28 年 (2016 年) に現行課程へ完全移行し，移行後の出題を見ると，11 年ぶりに復活した「複素数平面」，新たに導入された「整数の性質」の分野から毎回出題された．合同式を用いる問題が毎回出題されており，重点的に学習しておく必要がある．かって,「複素数平面」は，1997 年から 2005 年の教育課程における入学試験でも出題されていた．特に九州大学の「複素数平面」の出題率は高く，2004 年を除き毎回出題された．当時の九州大学の同分野の問題は良問が多く，学習教材としても優れている．これらの問題はすべて序文に示したサイトから入手することができる．

過去の出題からも分かるように,「場合の数と確率」「微積分」は重要分野である．

平成 30 年 9 月　編者

出題分野

2015 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	微分法と積分法	放物線と直線で囲まれた部分の面積
2	標準	数学 III	積分法	定積分と不等式の証明
3	標準	数学 III	積分法の応用	半球の影の面積・体積
4	標準	数学 A	場合の数と確率	袋の中の赤玉と青玉の個数の推移
5	やや難	数学 A	整数の性質	合同式，ユークリッドの互除法

2016 年度

<table>
<tr><th></th><th>難易度</th><th>科　目</th><th>分　野</th><th>出　題　内　容</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">標準</td><td rowspan="2">数学 III</td><td>極限</td><td>極限値</td></tr>
<tr><td>積分法</td><td>面積</td></tr>
<tr><td>2</td><td>標準</td><td>数学 A</td><td>図形の性質</td><td>チェバの定理，メネラウスの定理</td></tr>
<tr><td>3</td><td>やや易</td><td>数学 A</td><td>確率</td><td>マルコフ連鎖</td></tr>
<tr><td>4</td><td>標準</td><td>数学 A</td><td>整数の性質</td><td>合同式</td></tr>
<tr><td>5</td><td>標準</td><td>数学 III</td><td>複素数平面</td><td>ド・モアブルの定理</td></tr>
</table>

2017 年度

<table>
<tr><th></th><th>難易度</th><th>科　目</th><th>分　野</th><th>出　題　内　容</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">標準</td><td rowspan="2">数学 III</td><td>微分法とその応用</td><td>接線の傾き</td></tr>
<tr><td>積分法の応用</td><td>2 曲線で囲まれた部分の面積</td></tr>
<tr><td>2</td><td>標準</td><td>数学 B</td><td>空間のベクトル</td><td>2 つのベクトルのなす角</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">やや難</td><td>数学 A</td><td>整数の性質</td><td>合同式</td></tr>
<tr><td>数学 B</td><td>数列</td><td>等差数列 $\{a_n\}$ の 7，7^2 の倍数の個数</td></tr>
<tr><td>4</td><td>標準</td><td>数学 A</td><td>場合の数と確率</td><td>確率漸化式</td></tr>
<tr><td>5</td><td>標準</td><td>数学 III</td><td>複素数平面</td><td>ド・モアブルの定理</td></tr>
</table>

2018 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 III	関数	双曲線の媒介変数表示
2	標準	数学 III	積分法の応用	面積，回転体の体積
3	標準	数学 A	場合の数と確率	確率漸化式
4	標準	数学 A	整数の性質	3 次方程式の整数解・有理数解
5	標準	数学 III	複素数平面	複素係数の方程式

2019 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 III	極限	定積分・極限値
2	やや難	数学 II	式と証明	恒等式
3	標準	数学 A	確率	サイコロの目と 2 次方程式の係数
		数学 III	複素数平面	複素数平面上の 2 次方程式の解
4	標準	数学 III	極限	数列の極限
5	やや難	数学 III	複素数平面	1 次分数式変換 (メビウス変換)

2020 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 III	微分法とその応用	曲線に接する直線
2	標準	数学 II	複素数と方程式	虚数を解にもつ実係数の方程式
		数学 A	整数の性質	合同式
3	やや難	数学 B	空間のベクトル	等面四面体
4	標準	数学 A	確率	サイコロの出た目の積
5	標準	数学 III	積分法の応用	回転体の体積

2021 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 B	空間のベクトル	四面体に内接する球面
2	標準	数学 III	複素数平面	3 点を通る円
3	標準	数学 III	微分法とその応用	曲線と領域
		数学 III	積分法の応用	回転体の体積
4	標準	数学 III	複素数平面	平均値の定理
5	標準	数学 II	式と証明	2 項係数

出題分野 (2011-2021)

		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	数と式											
I	2 次関数		3									
	図形と計量											
	データの分析											
	式と証明									2		5
	複素数と方程式										2	
II	図形と方程式				3							
	三角関数											
	指数関数と対数関数											
	微分法と積分法					1						
	式と曲線				3				1			
	複素数平面						5	5	5	3·5		2·4
	関数											
III	極限		3·4	1			1			1·4		
	微分法とその応用	2			1			1			1	3
	積分法					2						
	積分法の応用	1	1	1·4	1	3	1	1	2		5	3
	場合の数と確率	5	5	3	4*	4	3	4	3	3	4	
A	整数の性質				2	5	4	3	4		2	
	図形の性質						2					
	平面上のベクトル											
B	空間のベクトル	4		2				2			3	1
	数列	3	5					3				
	確率分布と統計											
C	行列 (旧課程)		2	5								

数字は問題番号 (* は旧課程の内容を含む)

1.1　2015 年度

1 C_1，C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad 0 \leqq x \leqq 2$$
$$C_2 : y = -x^2 - 2x, \quad -2 \leqq x \leqq 0$$

また，a を実数とし，直線 $y = a(x+4)$ を ℓ とする。

(1) 直線 ℓ と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下，a が (1) の条件を満たすとする。このとき，ℓ と C_1 で囲まれた部分の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で ℓ の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ を求めよ。

(3) n を 3 以上の整数とするとき，不等式

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$$

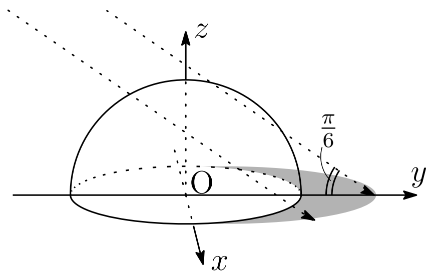
が成り立つことを示せ。

3 座標空間内に，原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径1の球がある。下の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当っている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x = k$ において，球の外で光が当らない部分の y 座標を k を用いて表せ。

(2) xy 平面上において，球の外で光が当らない部分の面積を求めよ。

(3) $z \geqq 0$ において，球の外で光が当らない部分の体積を求めよ。



4 袋の中に最初に赤玉2個と青玉1個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から1個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉1個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉1個を袋に入れる。袋に入っている3個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を1枚もらう。

(1) 2回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3) 8回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。 研

(4) 8回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど1枚である確率を求めよ。

5 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は3の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。 研

(3) p，q を異なる素数とする。$2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p，q の組をすべて求めよ。

1.2　2016 年度

1 座標平面上の曲線 C_1，C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$
$$C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする。ただし，a は実数である。n を自然数とするとき，曲線 C_1，C_2 が 2 点 P，Q で交わり，P，Q の x 座標はそれぞれ 1，$n+1$ となっている。また，曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域を T_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ。

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2:1$，$t : 1-t$，$1:3$ に内分する点を D，E，F とする。また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) AP $= k$AE，CR $= \ell$CD を満たす実数 k，ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。　研

3 座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で，点 $\mathrm{P}_0(1,\ 0)$ を1つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 とする。ある頂点に置かれている1枚のコインに対し，1つのサイコロを1回投げ，出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。 研

(規則) (i) 1から5までの目が出た場合は，出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。例えば，コインが P_4 にあるとき4の目が出た場合は P_2 まで動かす。

(ii) 6の目が出た場合は，x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし，コインが x 軸上にあるときは動かさない。例えば，コインが P_5 にあるときに6の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを1枚だけ P_0 に置き，1つのサイコロを続けて何回か投げて，1回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

(2) 3回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

(3) n を自然数とする。n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

4 自然数 n に対して，10^n を13で割った余りを a_n とおく。a_n は0から12までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を13で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3) 以下の3条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進数で表示したとき6桁となる。

(ii) N を十進数で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと2016となる。

(iii) N は13で割り切れる。

5 以下の問いに答えよ。

(1) θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) 次の方程式を満たす実数 x $(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3) 次の式を証明せよ。　研

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

1.3　2017年度

1 定数$a>0$に対し，曲線$y=a\tan x$の$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$の部分をC_1，曲線$y=\sin 2x$の$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$の部分をC_2とする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1とC_2が原点以外に交点をもつためのaの条件を求めよ。

(2) aが(1)の条件を満たすとき，原点以外のC_1とC_2の交点をPとし，Pのx座標をpとする。PにおけるC_1とC_2のそれぞれの接線が直交するとき，aおよび$\cos 2p$の値を求めよ。

(3) aが(2)で求めた値のとき，C_1とC_2で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 2つの定数$a>0$および$b>0$に対し，座標空間内の4点を

$$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 点Aから線分CDにおろした垂線とCDの交点をGとする。Gの座標をa，bを用いて表せ。

(2) さらに，点Bから線分CDにおろした垂線とCDの交点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$がなす角を$\theta$とするとき，$\cos\theta$を$a$，$b$を用いて表せ。

3 初項$a_1=1$，公差4の等差数列$\{a_n\}$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$の初項から第600項のうち，7の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の初項から第600項のうち，7^2の倍数である項の個数を求めよ。 研

(3) 初項から第n項までの積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数nを求めよ。

4 赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A，B，C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し，次のルール (a)，(b)，(c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。

(a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。

(b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。

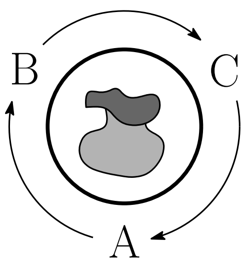
(c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A，B，C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。ただし，$a_1 = 1$，$b_1 = c_1 = 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。

(2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ。

(3) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。

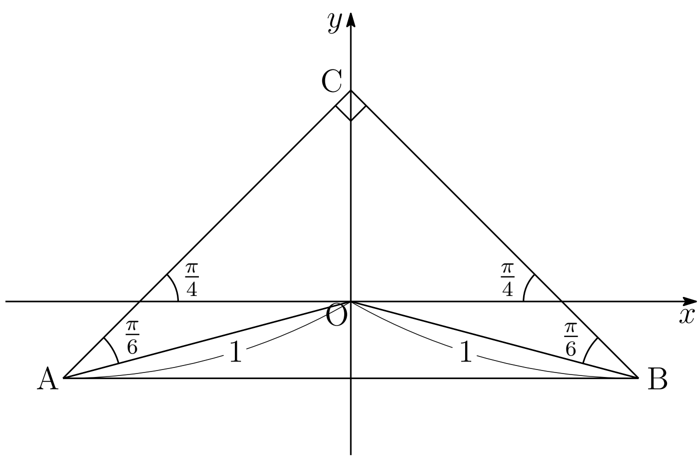


5 2つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$ を用いて，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ により定める。ただし，i は虚数単位を表す。2と3の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。

(2) $|z_n| \leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

(3) 下図のように，複素数平面上の $\triangle\mathrm{ABC}$ は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を一つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお A，B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と2点 A，B の距離はともに1である。点 P_n が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



1.4　2018 年度

$\boxed{1}$ 座標空間において，xy 平面上にある双曲線 $x^2-y^2=1$ のうち $x \geqq 1$ を満たす部分を C とする。また，z 軸上の点 A$(0,\ 0,\ 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき，直線 AP と平面 $x=d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし，d は正の定数とする。 $\boxed{研}$

$\boxed{2}$ 原点を中心とする半径 3 の半円 $C: x^2+y^2=9\ (y \geqq 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し，線分 PQ を $2:1$ に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。 $\boxed{研}$

(1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく，かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき，線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。

(2) 点 P を $(-3,\ 0)$ に固定する。Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。

(3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{3}$ 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが $0,\ 1,\ 2,\ 3$ である確率をそれぞれ $p_n,\ q_n,\ r_n,\ s_n$ とする。$p_n,\ q_n,\ r_n,\ s_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 整数 $a,\ b$ は 3 の倍数ではないとし，

$$f(x)=2x^3+a^2x^2+2b^2x+1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。

(2) $f(x)=0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。

(3) $f(x)=0$ を満たす有理数 x が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

$\boxed{5}$ α を複素数とする。等式

$$\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

1.5　2019年度

1 n を自然数とする。x，y がすべての実数を動くとき，定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2\, dt$$

の最小値を I_n とおく。極限値 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。　研

2 0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2+2)g(x) + 7$$
$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

3 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目を順に a，b，c とする。2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの解 z_1，z_2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ とする。また，複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。

(2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。

(3) P_1 と O を通る直線を ℓ_1 とし，P_2 と O を通る直線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 のなす鋭角が $60°$ である確率を求めよ。

4 座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ \sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり，A，B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 P_2，P_3，$\cdots\cdots$ を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \to \infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

5 a，b を複素数，c を純虚数でない複素数とし，i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が虚軸全体を動くとき 研

$$w = \frac{az+b}{cz+1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア) $z = i$ のときに $w = i$ となり，$z = -i$ のときに $w = -i$ となる。

(イ) C は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a，b，c の値を求めよ。さらに C を求め，複素数平面上に図示せよ。

1.6　2020 年度

1 点 $(a,\ 0)$ を通り，曲線 $y=e^{-x}-e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

2 a，b，c，d を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) c，d を a，b を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を 7 で割ると 1 余り，11 で割ると 10 余るとする。また，$f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り，11 で割ると 10 余るとする。a の絶対値と b の絶対値がともに 40 以下であるとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

3 四面体 OABC において，辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を ℓ，辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m，辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。$\ell\perp m$，$m\perp n$，$n\perp\ell$ であり，$\mathrm{AB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{CA}=2$ のとき，以下の問いに答えよ。 研

(1) 直線 OB と直線 CA のなす角 θ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

(2) 四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。

4 4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

5 座標空間において，中心 $(0,\ 2,\ 0)$，半径 1 で xy 平面内にある円を D とする。D を底面とし，$z\geqq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱 (内部を含む) を E とする。点 $(0,\ 2,\ 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け，D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。

(1) $-1\leqq t\leqq 1$ とする。平面 $x=t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また，T の体積を求めよ。

(2) T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

1.7　2021 年度

1 座標空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 四面体 OABC に内接する球の中心の座標を求めよ。

(2) 中心の x 座標，y 座標，z 座標がすべて正の実数であり，xy 平面，yz 平面，zx 平面のすべてと接する球を考える。この球が平面 ABC と交わるとき，その交わりとしてできる円の面積の最大値を求めよ。

2 θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ をみたす定数とし，x の 2 次方程式

$$x^2 - (4\cos\theta)x + \frac{1}{\tan\theta} = 0 \qquad \cdots (*)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $(*)$ が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ。

(2) θ が (1) で求めた範囲にあるとし，$(*)$ の 2 つの虚数解を α，β とする。ただし，α の虚部は β の虚部より大きいとする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{O}(0)$ を通る円の中心を $\mathrm{C}(\gamma)$ とするとき，θ を用いて γ を表せ。

(3) 点 O，A，C を (2) のように定めるとき，三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan\theta$ の値を求めよ。

3 座標平面上の点 $(x,\ y)$ について，次の条件を考える。

条件：すべての実数 t に対して $y \leqq e^t - xt$ が成立する。　$\cdots (*)$

以下の問いに答えよ。必要ならば $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を使ってよい。

(1) 条件 $(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ。

(2) 条件 $(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ のうち，$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 0$ をみたすもの全体の集合を S とする。S を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 研

4 自然数 n と実数 a_0，a_1，$a_2, \cdots$，a_n $(a_n \neq 0)$ に対して，2 つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

を考える。α，β を異なる複素数とする。複素数平面上の 2 点 α，β を結ぶ線分上にある点 γ で，

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

をみたすものが存在するとき，

α，β，$f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) $n = 2$ のとき，どのような α，β，$f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。

(2) $\alpha = 1 - i$，$\beta = 1 + i$，$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が平均値の性質をもつための，実数 a，b，c に関する必要十分条件を求めよ。

(3) $\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，$\beta = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$f(x) = x^7$ は，平均値の性質をもたないことを示せ。

5 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n，k が $2 \leqq k \leqq n - 2$ をみたすとき，${}_n\mathrm{C}_k > n$ であることを示せ。

(2) p を素数とする。$k \leqq n$ をみたす自然数の組 (n, k) で ${}_n\mathrm{C}_k = p$ となるものをすべて求めよ。

第 2 章　一般前期解答

問題冊子 (A4 で 12 ページ) は，見開きで問題が偶数ページ，下書き (計算スペース) が奇数ページに配置されており，問題ページの下側の余白を含め十分な計算スペースがある．解答用紙は，$\boxed{\mathbf{26}}$～$\boxed{\mathbf{30}}$の番号が書かれた 5 枚の A3 用紙がはさみ込まれており，問題$\boxed{\mathbf{1}}$～$\boxed{\mathbf{5}}$を順次指定された解答用紙に答えるようになっている．

設問ごとに解答欄が仕切られているため，十分な解答スペースではなく，途中の計算などを書いていくスペースはない (解答用紙の裏面の使用は不可)．そのため，問題用紙の下書き欄で計算した結果を整理して「理由と計算結果・結論」を明示する必要がある．なお，問題冊子は，試験終了後に持ち帰ることができる．

出題者は受験生に簡潔な表現力を要求したものと考えられる．理学部数学科の採点担当者からも，定積分の途中計算などを細かく書く必要はないと聞いた．

対策

1. 標準的な問題を中心に 3 題とやや難の 2 題が例年の出題傾向である．配点はすべて 50 点ずつの計 250 点であるので 150 分で効率的に問題を解いていく必要がある．なお，経済学部経済工学科は 300 点満点に換算される．

2. 完答が難しい問題についても，前半の設問はどれも基本または標準的な問題が配置されているので，確実に部分点を狙っていく必要がある．しかしながら，近年の傾向として，2018 年度は$\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，2019 年度は$\boxed{1}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$が大問のみの問題設定であったことに注意したい．

3. 九州大学では，完答できていない答案について，途中までの計算が正しいもの，また論理的な展開が間違っていないものについては加点されるそうである．特に大問中心の出題になった傾向を踏まえると，採点者が読みやすい簡潔な答案の作成を普段から練習しておくが必要がある．

2.1　2015 年度

1　(1) $y=-x^2+2x$ と $y=a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2+2x=a(x+4)\quad\text{すなわち}\quad x^2+(a-2)x+4a=0\quad\cdots(*)$$

C_1 と ℓ が接するとき，$(*)$ より

$$(a-2)^2-4\cdot1\cdot4a=0,\quad 0<-\frac{a-2}{2\cdot1}<2$$

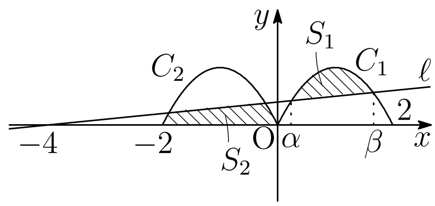
上の第 1 式および第 2 式から

$$a=10\pm4\sqrt{6},\quad -2<a<2\quad\text{すなわち}\quad a=10-4\sqrt{6}$$

よって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{0\leqq a<10-4\sqrt{6}}$

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=-(a-2),\quad \alpha\beta=4a,$$
$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{a^2-20a+4}$$



したがって

$$\begin{aligned}S_1&=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+2x)-a(x+4)\}\,dx\\&=-\int_\alpha^\beta\{x^2+(a-2)x+4a\}\,dx\\&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(3) $y=-x^2-2x$ と $y=a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2-2x=a(x+4)\quad\text{すなわち}\quad x^2+(a+2)x+4a=0\quad\cdots(**)$$

方程式 $(**)$ の解を γ，δ とすると $(\gamma<\delta)$

$$\gamma+\delta=-(a+2),\quad \gamma\delta=4a,$$
$$\delta-\gamma=\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta}=\sqrt{a^2-12a+4}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-2}^{0}\{-x^2-2x\}\,dx + \int_{\gamma}^{\delta}\{-x^2-2x-a(x+4)\}\,dx \\ &= -\int_{-2}^{0} x(x+2)\,dx - \int_{\gamma}^{\delta}(x-\gamma)(x-\delta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}\cdot 2^3 - \frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}(a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$S_1 = S_2$ より　$\dfrac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6}(a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}}$

整理すると　$(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$

ここで，$f(a) = (a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8$ とおくと

$$f(0) = 8 > 0, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{41\sqrt{41}-999}{125} < \frac{41\cdot 7-999}{125} < 0,$$

$$10-4\sqrt{6} = 2(5-2\sqrt{6}) = \frac{2}{5+2\sqrt{6}} > \frac{2}{5+5} = \frac{1}{5}$$

$f(a)$ は連続であるから，中間値の定理により，$f(a)=0$，すなわち $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在する．■

2 (1) $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ を微分すると　$y' = -\dfrac{\log x + 2x}{x^2(\log x)^3}$

したがって，$x > 1$ において　$y' < 0$

よって，$y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において，単調減少．

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{(\log x)'}{(\log x)^2}\,dx = \boldsymbol{-\frac{1}{\log x} + C}$　**(C は積分定数)**

別解　$t = \log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ であるから

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\log x} + C$$

(3) (1)，(2) の結果から，n が 3 以上の整数であるとき

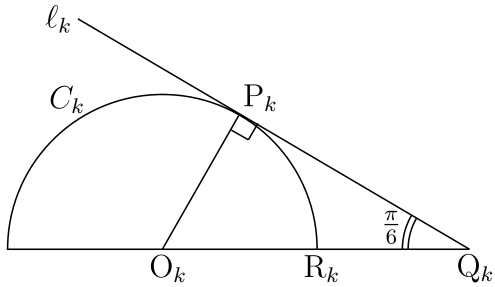
$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} &= \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k(\log k)^2}\,dx \\ &< \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int_{2}^{n} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^n = -\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log 2} < \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$

■

3　(1) 球 $x^2+y^2+z^2=1$ の $z \geqq 0$ の部分の平面 $x=k$ $(-1<k<1)$ による断面の表す図形は，中心 $\mathrm{O}_k(k,\ 0,\ 0)$，半径 $\sqrt{1-k^2}$ の半円

$$y^2+z^2=1-k^2\ (-1<k<1),\quad z \geqq 0$$

この半円を C_k とし，C_k 上の点を $\mathrm{R}_k(k, \sqrt{1-k^2})$ とする．方向ベクトルが $(0,\ \sqrt{3}, -1)$ で C_k に接する直線を ℓ_k とし，ℓ_k と C_k の接点を P_k，ℓ_k と xy 平面との共有点を Q_k とすると



$$\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=\sqrt{1-k^2}$$
$$\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k=2\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=2\sqrt{1-k^2}$$

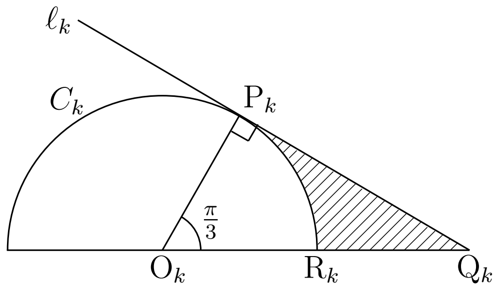
よって　　$\boldsymbol{\sqrt{1-k^2} \leqq y \leqq 2\sqrt{1-k^2}}$

(2) (1) の結果から　$\mathrm{R}_k\mathrm{Q}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k-\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\sqrt{1-k^2}$

よって　　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

(3) 右の図の斜線部分の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k\cdot\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k-\frac{1}{2}\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k{}^2\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-k^2)-\frac{\pi}{6}(1-k^2)$$
$$=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}(1-k^2)$$



よって，求める体積を V とすると

$$V=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\int_{-1}^{1}(1-k^2)\,dk=\boldsymbol{\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}}$$

■

4 (1) 求める確率は，2 回連続して赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

(2) 1 回の操作で青玉の個数は 1 個だけ増減する．最初に青玉が 1 個 (奇数個) であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が 3 個 (奇数個) にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．

(3) 偶数回目の操作で青玉の個数は 1 個または 3 個であるから，2 回目の操作で青玉が 1 個である確率を p とすると，(1) の結果から　研

$$p=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$ppp(1-p)=p^3(1-p)=\left(\frac{7}{9}\right)^3\frac{2}{9}=\mathbf{\frac{686}{6561}}$$

(4) 青玉 3 個の状態から，2 回連続して青玉を取り出す確率を q とすると

$$q=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

2 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$(1-p)qpp=p^2(1-p)q$$

4 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$p(1-p)qp=p^2(1-p)q$$

6 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$pp(1-p)q=p^2(1-p)q$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned}3\times p^2(1-p)q+p^3(1-p)&=2p^2(1-p)+p^3(1-p)\\&=p^2(1-p)(2+p)\\&=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{25}{9}=\mathbf{\frac{2450}{6561}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{5}$ (1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

よって，$2^n - 1$ は 3 の倍数である．

(2) n が自然数のとき，$2^n - 1$ は奇数である．　$\boxed{研}$

i) $n = 1$ のとき，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である．

ii) $n \geqq 2$ のとき

$$2^n + 1 = 1(2^n - 1) + 2$$

上式より，$2^n + 1$ を $2^n - 1$ で割った余りは 2．
$2^n - 1$ を 2 で割った余りは 1 であるから，ユークリッドの互除法により，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ の最大公約数は 1 である．

よって，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である．

(3) $2^{p-1} - 1 = pq^2$ （$p,\ q$ は異なる素数）　$\cdots(*)$

$(*)$ について，$p = 2$ のとき　$1 = 2q^2$

これを満たす素数 q は存在しない．

$p \neq 2$ となり，p は奇素数であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は自然数である．

(1) の結果から，$2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数であるから，pq^2 は 3 を因数にもつ．

i) $p = 3$ のとき，$(*)$ より　$3 = 3q^2$

q は素数であるから，不適．

ii) $q = 3$ のとき，$(*)$ より

$$2^{p-1} - 1 = 9p \quad \text{ゆえに} \quad (2^{\frac{p-1}{2}} + 1)(2^{\frac{p-1}{2}} - 1) = 9p$$

i) より，奇素数 p は $p \geqq 5$ であること，(2) の結果から，$2^{\frac{p-1}{2}} + 1$ と $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は互いに素であることに注意して

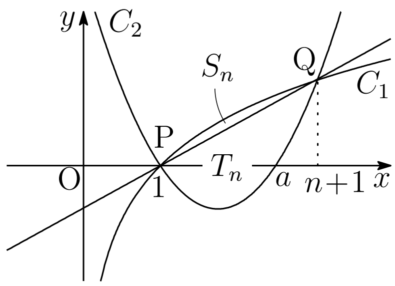
$$\text{(A)}\begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = 9 \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = p \end{cases} \quad \text{または} \quad \text{(B)}\begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = p \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 9 \end{cases}$$

(A) を解いて，$p = 7$．　(B) の第 2 式を満たす奇素数 p は存在しない．

よって　$\boldsymbol{(p,\ q) = (7,\ 3)}$　■

2.2　2016 年度

1 (1) C_1 と C_2 の交点 Q の x 座標が $n+1$ であるから



$$\log(n+1) = (n+1-1)(n+1-a)$$

$n \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{a = n + 1 - \frac{\log(n+1)}{n}}$$

上式より　$a - 1 = \dfrac{n^2 - \log(n+1)}{n}$

ここで　$\displaystyle\int_0^n \frac{t}{t+1}\,dt = \Big[\, t - \log(t+1) \,\Big]_0^n = n - \log(n+1) > 0$

上の 2 式から　$a - 1 = \dfrac{n^2 - \log(n+1)}{n} > \dfrac{n^2 - n}{n} = n - 1 \geqq 0$

よって　$\boldsymbol{a > 1}$

(2) $\displaystyle S_n = \int_1^{n+1} \log x\,dx - \frac{1}{2}\{(n+1)-1\}\log(n+1)$

$$= \Big[\, x\log x - x \,\Big]_1^{n+1} - \frac{n}{2}\log(n+1) = \boldsymbol{\frac{n+2}{2}\log(n+1) - n}$$

C_2 の x^2 の係数および 2 点 P，Q の x 座標に注意して

$$T_n = \frac{1}{6}\{(n+1)-1\}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3}$$

(3) (2) の結果から

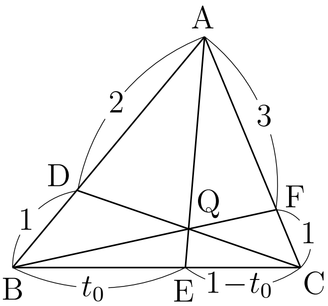
$$\frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\frac{n+2}{2}\log(n+1) - n}{n\log\frac{n^3}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - 1}{3\log n - \log 6}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\left\{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} - 1}{3\log n - \log 6}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)\left\{1 + \dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\} - \dfrac{1}{\log n}}{3 - \dfrac{\log 6}{\log n}}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}+0\right)(1+0) - 0}{3 - 0} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$ ■

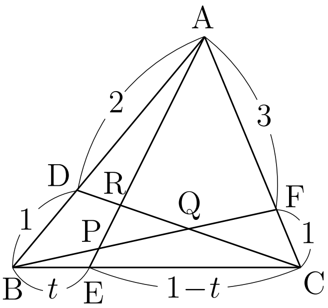
2　(1) チェバの定理により



$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

これを解いて　$\boldsymbol{t_0=\frac{3}{5}}$

(2) △AEC および直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって　$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}=\frac{3}{t}$

よって　$k=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\frac{3}{3+t}}$

△BCD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{2}{3}=1$$

したがって　$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}=\frac{3(1-t)}{2t}$

よって　$\ell=\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CD}}=\frac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}=\boldsymbol{\frac{3(1-t)}{3-t}}$

(3) (2) の図について，△BCF および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1$$

したがって　$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=\frac{3(1-t)}{4t}$　$\cdots$①

$t=\frac{3}{5}$ のとき，P は Q に一致するので　$\frac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{QB}}=\frac{1}{2}$　$\cdots$②

よって　$\triangle\mathrm{BCQ}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(4) $t=\dfrac{3}{5}$ のとき，R は Q に一致するので，(2) の結果から 研

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}=\frac{3\left(1-\frac{3}{5}\right)}{3-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\mathrm{CQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3(1-t)}{3-t}-\dfrac{1}{2}=3-t:3-5t$

また，①，② から

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\frac{3(1-\mathrm{t})}{3(1-\mathrm{t})+4\mathrm{t}}-\frac{1}{3}=3+\mathrm{t}:3-5\mathrm{t}$$

$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{CQ}:\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=(3+t)(3-t):(3-5t)^2$$

(3) の結果から　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)}=\boldsymbol{\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}}$ ■

3 (1) n 回サイコロ投げた後に，コインが P_i $(i=0,1,\cdots,5)$ の位置にある確率を $P_i(n)$ とすると 研

$$\begin{aligned}P_0(n+1)&=\frac{1}{6}P_0(n)+\frac{1}{6}P_1(n)+\frac{1}{6}P_2(n)+\frac{1}{6}P_3(n)+\frac{1}{6}P_4(n)+\frac{1}{6}P_5(n)\\&=\frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\}\end{aligned}$$

自然数 n に対して　$P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)=1$

したがって　$P_0(n)=\dfrac{1}{6}\times 1=\dfrac{1}{6}\quad\cdots(*)$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(2) $(*)$ より，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) $(*)$ より，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ ■

4 (1) 仮定から $10^n \equiv a_n,\quad 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって $a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より $\boldsymbol{a_1 = 10}$

(1) の結果を用いると，法 13 について

$$\begin{aligned}a_2 &\equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9\\ a_3 &\equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12\\ a_4 &\equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3\\ a_5 &\equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4\\ a_6 &\equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{a_2 = 9,\ a_3 = 12,\ a_4 = 3,\ a_5 = 4,\ a_6 = 1}$

(3) 整数 p，q を $1 \leqq p \leqq 9$，$0 \leqq q \leqq 9$ とし，求める自然数 N を

$$N = p{\cdot}10^5 + 2{\cdot}10^4 + 10^2 + 6{\cdot}10 + q$$

とおくと，法 13 に関して

$$\begin{aligned}N &\equiv p{\cdot}10^5 + 2{\cdot}10^4 + 10^2 + 6{\cdot}10 + q\\ &\equiv p{\cdot}4 + 2{\cdot}3 + 9 + 6{\cdot}10 + q = 4p + q + 75\\ &\equiv 4p + q - 3\end{aligned}$$

このとき，$N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0),\ (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1),\ (9,\ 6)$$

よって，求める自然数 N は

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

■

5　(1) ド・モアブルの定理により

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad \frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta \quad \cdots(*)$$

$(*)$ の辺々を加えると

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

$(*)$ の辺々を引くと

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\\
\cos 2x &= \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 1\\
\cos 3x &= \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

$t = z + \dfrac{1}{z}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1}{2}t, \quad \cos 2x = \frac{1}{2}t^2 - 1, \quad \cos 3x = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

これらを $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ に代入すると

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) = 1$$

整理すると　$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$　ゆえに　$(t-1)(t+2)(t-2) = 0$

これを解いて　$t = 1, -2,\ 2$　したがって　$\cos x = \dfrac{1}{2},\ -1,\ 1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(3) (1) の結果から　$\boxed{\text{研}}$

$$\sin^2 n\theta = \left\{-\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\right\}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)$$

$\theta = 20^\circ$ とすると，$z^{18} = 1$ であるから

$$(z^2-1)(z^{16}+z^{14}+\cdots+z^2+1) = 0$$

$z^2 \neq 1$ であるから　$z^{16}+z^{14}+\cdots+z^2+1=0$

また，$z \neq 0$ であるから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n}+\frac{1}{z^{2n}}\right) = -1$

したがって
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4}\sin^2 n\theta &= \sum_{n=1}^{4}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(z^{2n}+\frac{1}{z^{2n}}\right)\right\}\\ &= 4\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n}+\frac{1}{z^{2n}}\right)\\ &= 2-\frac{1}{4}\times(-1) = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

別解 $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ および $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ により

$$\begin{aligned}&\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ\\ =&\frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ}{2}\end{aligned}$$

方程式 $\cos 3\theta + \dfrac{1}{2} = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ の解は　$\theta = 40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$
ここで，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であるから，方程式

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta + \frac{1}{2} = 0 \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

の解と係数の関係により　$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

補足 また，解と係数の関係により　$\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\dfrac{1}{8}$　■

2.3　2017 年度

1　(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y = a\tan x$ と $y = \sin 2x$ から y を消去すると

$$a\tan x = \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sin 2x}{\tan x} = 2\cos^2 x \quad \cdots ①$$

このとき，$0 < 2\cos^2 x < 2$ より　　$\boldsymbol{0 < a < 2}$

(2) $f(x) = a\tan x$，$g(x) = \sin 2x$ とおいて，これらを微分すると

$$f'(x) = \frac{a}{\cos^2 x}, \quad g'(x) = 2\cos 2x$$

交点 P の x 座標が p であるから，① より　　$a = 2\cos^2 p \quad \cdots ②$

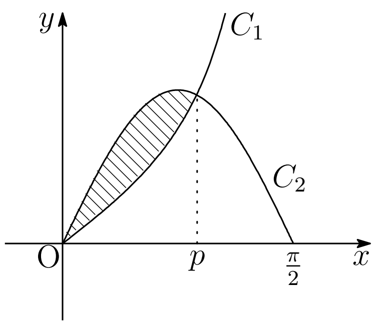
$f'(p)g'(p) = -1$ であるから　　$\dfrac{a}{\cos^2 p} \times 2\cos 2p = -1$

② を上式に代入すると

$$\frac{2\cos^2 p}{\cos^2 p} \times 2\cos 2p = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\cos 2p = -\frac{1}{4}}$$

したがって　　$a = 2\cos^2 p = \cos 2p + 1 = -\dfrac{1}{4} + 1 = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(3) 求める面積は右の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \left(\sin 2x - \frac{3}{4}\tan x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{4}\log|\cos x|\right]_0^p \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2p + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\log|\cos p| \end{aligned}$$

ここで，(2) の結果から　　$\log|\cos p| = \dfrac{1}{2}\log\cos^2 p = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{8}$

よって　　$S = -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{8} = \boldsymbol{\dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\log\dfrac{3}{8}}$　■

2　(1) A$(a,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$，D$(a,\ b,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a,\ 0,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{CD}}=(a,\ b,\ 0)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{a^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)$

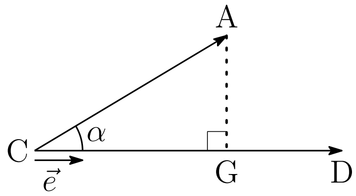
ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=(0,\ 0,\ 1)+\dfrac{a^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)$

$$=\left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)$$

よって　$\mathbf{G}\left(\boldsymbol{\dfrac{a^3}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1}\right)$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を α とし，単位ベクトル $\vec{e}$ を

$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}\quad\cdots①$$



とすると，A から CD に下ろした垂線と CD の交点 G について

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=(|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\alpha)\vec{e}\quad\cdots②$$

また，$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$

これと①を②に代入すると　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

(2) B$(0,\ b,\ 0)$ から，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ b,-1)$ であるから，(1) と同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$
$$=(0,\ 0,\ 1)+\frac{b^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right)$$

上式および (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)-(a,\ 0,\ 0)$$
$$=\left(-\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right)-(0,\ b,\ 0)$$
$$=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ -\frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)$$

$\vec{u}=(a^2+b^2)\overrightarrow{\mathrm{AG}}$，$\vec{v}=(a^2+b^2)\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ とおくと

$$\vec{u}=(-ab^2,\ a^2b,\ a^2+b^2),\quad \vec{v}=(ab^2,-a^2b,\ a^2+b^2)$$

したがって
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-a^2b^4-a^4b^2+(a^2+b^2)^2$$
$$=(a^2+b^2)(a^2+b^2-a^2b^2),$$
$$|\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2=a^2b^4+a^4b^2+(a^2+b^2)^2$$
$$=(a^2+b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)$$

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角は θ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-a^2b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)}=\boldsymbol{\frac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2+a^2b^2}}$$

■

3 (1) 初項 $a_1=1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=1+4(n-1)=4n-3 \cdots ①$$

a_n が 7 の倍数であるとき，$4n-3\equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8n\equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad n\equiv -1 \pmod 7$$

このとき，n は整数 m を用いて

$$n=7m-1 \quad \cdots ②$$

したがって，$1\leqq 7m-1\leqq 600$ を満たす整数 m の個数は

$$\frac{2}{7}\leqq m\leqq\frac{601}{7} \quad \text{すなわち} \quad 1\leqq m\leqq 85$$

よって，求める個数は　**85** (個)

(2) ② を ① に代入すると　研

$$a_n=4(7m-1)-3=7(4m-1)$$

a_n が 7^2 の倍数であるとき，$4m-1\equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8m\equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad m\equiv 2 \quad \pmod 7$$

このとき，m は整数 l を用いて

$$m=7l+2$$

これを ② に代入すると

$$n=7(7l+2)-1=49l+13 \quad \cdots ③$$

したがって，$1\leqq 49l+13\leqq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49}\leqq l\leqq\frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0\leqq l\leqq 11$$

よって，求める個数は　**12** (個)

(3) ③ を ① に代入すると

$$a_n = 4(49l + 13) - 3 = 7^2(4l + 1)$$

a_n が 7^3 の倍数であるとき，$4l + 1 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8l \equiv -2 \quad \text{ゆえに} \quad l \equiv -2 \pmod 7$$

このとき，l は整数 k を用いて

$$l = 7k - 2$$

これを ③ に代入すると

$$n = 49(7k - 2) + 13 = 343k - 85 \quad \cdots ④$$

$1 \leqq 343k - 85 \leqq 600$ を満たす整数 k は 1 で，このとき　$n = 258$

④ を ① に代入すると

$$a_n = 4(343k - 85) - 3 = 7^3(4k - 1)$$

これから，a_n が 7^4 の倍数となることはない．

以上の結果および ②，③ より，$1 \leqq n \leqq 600$ に対して

a_n が 7 の倍数であるとき　$n \equiv -1 \pmod 7$
a_n が 7^2 の倍数であるとき　$n \equiv 13 \pmod{49}$
a_n が 7^3 の倍数であるとき　$n = 258$

数列 $\{a_n\}$ のうち，7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

上の表で 2 列目のみ 7^2 を因数にもち，それ以外の列は 7 を因数にもつ．
ただし，第 6 行目第 2 列の a_{258} のみ 7^3 を因数にもつ．
したがって，2 列目以外の 32 項 (7 を因数にもつ)，2 列目の第 1 行から第 5 行目までの 5 項 (7^2を因数にもつ) および第 6 行目第 2 列の a_{258} より

$$32 \times 1 + 2 \times 5 + 3 = 45$$

よって，求める n の最小値は　$\boldsymbol{n = 265}$ ■

4　(1) 定められたルールにより，次の確率漸化式が得られる．

$$(*)\quad a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+c_n),\quad b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+b_n),\quad c_{n+1}=\frac{1}{4}(b_n+c_n)$$

$d_n=a_n+b_n+c_n\ (n=1,2,\cdots)$ とすると

$$d_1=a_1+b_1+c_1=1+0+0=1$$

$(*)$ の辺々を加えることにより

$$d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n\quad \text{ゆえに}\quad d_n=\frac{1}{2^{n-1}}\qquad\cdots①$$

したがって，$(*)$ は

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-b_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}b_n\\ b_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-c_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}c_n\\ c_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-a_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}a_n\end{aligned}$$

上の 3 式から，$n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4}c_{n-1}\right)=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{16}c_{n-1}\\ &=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{4}a_{n-2}\right)=\frac{3}{2^{n+3}}-\frac{1}{64}a_{n-2}\qquad\cdots②\end{aligned}$$

② に $n=3,\ 6$ を代入することにより

$$\begin{aligned}a_4&=\frac{3}{2^6}-\frac{1}{64}a_1=\frac{3}{64}-\frac{1}{64}\cdot 1=\frac{1}{32}\\ a_7&=\frac{3}{2^9}-\frac{1}{64}a_4=\frac{3}{512}-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{32}=\frac{11}{2048}\end{aligned}$$

よって　A が 4 回目に勝つ確率は　$a_4\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{32}\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{64}}$

A が 7 回目に勝つ確率は　$a_7\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{11}{2048}\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{11}{4096}}$

(2) ① より　$\boldsymbol{d_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}}$

(3) ② より　$\boldsymbol{a_{n+1}=\dfrac{3}{2^{n+3}}-\dfrac{1}{64}a_{n-2}}$　■

$\boxed{5}$ (1) $$\alpha = 10000 + 10000i = 10000\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ゆえに　$$z_n = \alpha w^n = \frac{10000\sqrt{2}}{2^n}\left\{\cos\left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi + i\sin\left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi\right\}$$

よって　$$\boldsymbol{|z_n| = \frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}},\quad \arg z_n = \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi}$$

(2) (1) の結果から，$|z_n| \leqq 1$ のとき

$$\frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-\frac{1}{2}} \geqq 10^4$$

両辺の常用対数をとると

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\log_{10} 2 \geqq 4 \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq \frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2}$$

ここで　$$\frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{0.301} + 0.5 = 13.7\cdots$$

よって，求める最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 14}$

(3) (1),(2) の結果から

$$|z_{14}| = \frac{10000}{2^{14-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4{\cdot}5^4}{2^{13}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^9}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{512}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\arg z_{14} = \left(\frac{14}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{7}{12}\pi + 2\pi$$
$$|z_{15}| = \frac{10000}{2^{15-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4{\cdot}5^4}{2^{14}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^{10}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{1024}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2}{\cdot}\frac{125}{128}{\cdot}\frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}{\cdot}\frac{125}{128}\sqrt{\frac{25}{32}} < \frac{1}{2}$$
$$\arg z_{15} = \left(\frac{15}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi$$

したがって，P_{14} は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外部にあり，P_{15} は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部にある．

よって，求める最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 15}$　■

2.4　2018 年度

1　C 上の点 P を $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,\ 0\right)$ とおく $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 直線 AP と平面 $x=d$ との交点を Q とすると，実数 k を用いて　研

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(0,\ 0,\ 1)+k\left(\frac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,-1\right)\\&=\left(\frac{k}{\cos\theta},\ k\tan\theta,\ 1-k\right)\quad\cdots①\end{aligned}$$

点 Q の x 座標が d であるから

$$\frac{k}{\cos\theta}=d\quad \text{ゆえに}\quad k=d\cos\theta$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(d,\ d\sin\theta,\ 1-d\cos\theta)\\&=(d,\ 0,\ 1)+d(0,\ \sin\theta,-\cos\theta)\end{aligned}$$

ここで

$$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-\cos\theta=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(d,\ 0,\ 1)+d\left(0,\ \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

このとき，$-\pi<\theta-\dfrac{\pi}{2}<0$ であるから，求める軌跡は，

平面 $x=d$ 上の点 $(d,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 d の円周上で $z<1$.

別解　軌跡の方程式を，次のように表してもよい.

$$\begin{cases}x=d\\y^2+(z-1)^2=d^2\\z<1\end{cases}$$

■

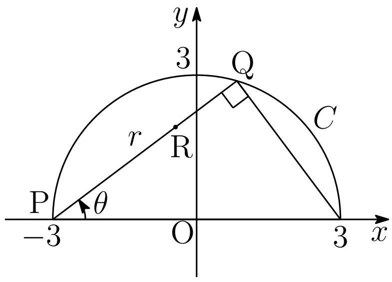
2　(1) $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy=\frac{1}{2}\pi\cdot3^2=\frac{9}{2}\pi$ であるから，$\mathrm{PR}=\dfrac{2}{3}\mathrm{PQ}$ より　研

$$S=\int_0^3 \mathrm{PR}\,dy=\frac{2}{3}\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\pi=\boldsymbol{3\pi}$$

(2) $\theta=\angle\mathrm{OPQ}$，$r=\mathrm{PQ}$ とおくと $(r=6\cos\theta)$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta=\frac{9}{2}\pi$$

$\mathrm{PR}=\dfrac{2}{3}r$ より



$$T=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}r\right)^2 d\theta=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta=\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{2}\pi=\boldsymbol{2\pi}$$

(3) $C : x^2+y^2=9\ (y\geqq0)$ の第 1 象限と y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積は，半径 3 の半球の体積であるから

$$\pi\int_0^3 x^2\,dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot3^3=18\pi$$

$\mathrm{P}(-x,\ y)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ を $2:1$ に内分する点は　$\left(\dfrac{x}{3},\ y\right)$　$(x\geqq0,\ y\geqq0)$

この点の軌跡は C の第 1 象限の部分を y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ だけ縮小したものであるから，図形 S と第 1 象限の共通部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1 とすると

$$V_1=\pi\int_0^3\left(\frac{x}{3}\right)^2 dy=\frac{1}{9}\pi\int_0^3 x^2\,dy=\frac{1}{9}\cdot18\pi=2\pi$$

$\mathrm{P}(-3,\ 0)$，$\mathrm{Q}(s,\ t)$ を $2:1$ に内分する点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{2s-3}{3},\quad y=\frac{2t}{3}\quad ゆえに\quad s=\frac{3}{2}(x+1),\quad t=\frac{3}{2}y$$

Q は C 上の点であるから　$s^2+t^2=9\ \ (t\geqq0)$

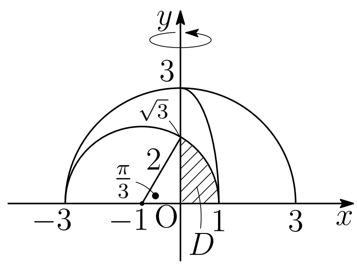
これに上の結果を代入することにより，R の軌跡の方程式は

$$\frac{9}{4}(x+1)^2+\frac{9}{4}y^2=9\quad ゆえに\quad (x+1)^2+y^2=4\ \ (y\geqq0)\quad\cdots(*)$$

$(*)$ の y 軸との交点の y 座標は，$(*)$ に $x=0$ を代入して

$$y=\sqrt{3}$$

右の図の領域 D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると



$$\begin{aligned} V_2 &= \pi\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,dy \\ &= \pi\int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2-1\}\,dy - 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy \qquad \cdots(**) \end{aligned}$$

ここで
$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2-1\}\,dy &= \int_0^{\sqrt{3}} (3-y^2)\,dy \\ &= \left[\,3y-\frac{1}{3}y^3\,\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

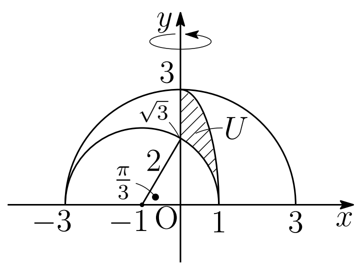
また，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy$ は，D の面積であるから

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy = \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

これらを $(**)$ に代入すると

$$V_2 = 2\sqrt{3}\pi - 2\pi\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

U の表す領域は右の図の斜線部分で，これを y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は



$$\begin{aligned} V_1-V_2 &= 2\pi - \left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi \\ &= \boldsymbol{\left(2-3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)\pi} \end{aligned}$$

注意　$(**)$ の $\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2-1\}\,dy$ は，D を直線 $x=-1$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を表す．■

3 法 4 に関する 0，1，2，3 の積は，右のようになる．
したがって，次の確率漸化式が成立する．

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$
\begin{aligned}
p_1 &= q_1 = r_1 = s_1 = \frac{1}{4} \\
p_{n+1} &= p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n & \cdots ① \\
q_{n+1} &= \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n & \cdots ② \\
r_{n+1} &= \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n & \cdots ③ \\
s_{n+1} &= \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n & \cdots ④
\end{aligned}
$$

$q_1 = s_1 = \frac{1}{4}$ および ②，④ より，$q_n = s_n$ であるから

$$q_1 = \frac{1}{4},\quad q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n \quad ゆえに \quad q_n = q_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

したがって　$\boldsymbol{q_n = s_n = \frac{1}{2^{n+1}}}$　これを ③ に代入すると

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2^{n+2}} \quad ゆえに \quad 2^{n+1}r_{n+1} = 2^n r_n + \frac{1}{2}$$

数列 $\{2^n r_n\}$ は初項 $2r_1 = \frac{1}{2}$，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$2^n r_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2} \quad ゆえに \quad \boldsymbol{r^n = \frac{n}{2^{n+1}}}$$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから

$$
\begin{aligned}
p_n &= 1 - q_n - r_n - s_n \\
&= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \boldsymbol{1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}}
\end{aligned}
$$

■

4　(1) 整数 a, b は 3 の倍数ではないから

$$a \equiv \pm 1,\ b \equiv \pm 1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 \equiv 1,\ b^2 \equiv 1 \pmod 3 \quad \cdots (*)$$

$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$ より，法 3 に関して

$$\begin{aligned} f(1) &= a^2 + 2b^2 + 3 \equiv 1 + 2\cdot 1 + 3 \equiv 0 && \pmod 3 \\ f(2) &= 4a^2 + 4b^2 + 17 \equiv 4\cdot 1 + 4\cdot 1 + 17 \equiv 1 && \pmod 3 \end{aligned}$$

よって，$f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りはそれぞれ **0** と **1**

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x が m であるとき

$$2m^3 + a^2m^2 + 2b^2m + 1 = 0$$

したがって　$m(2m^2 + a^2m + 2b^2) = -1$

上式より，次の (i), (ii) の場合分けができる．

(i) $m = 1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = -1$ のとき，
第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 + a^2 + 2b^2 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 2b^2 = -3$$

$a^2 + 2b^2 \geqq 0$ であるから，不適．

(ii) $m = -1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = 1$ のとき，
第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 - a^2 + 2b^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad -a^2 + 2b^2 = -1$$

$(*)$ より，$-a^2 + 2b^2 \equiv 1 \pmod 3$ であるから，不適．

(i), (ii) より，$f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しない．

補足　x を整数とするとき　$x + 3 \equiv x \pmod 3$
n を自然数とするとき　$(x+3)^n \equiv x^n \pmod 3$
ゆえに　$f(x+3) \equiv f(x) \pmod 3$
これと (1) の結果および $f(0) = 1$ から，$x \equiv 1 \pmod 3$ が $f(x) = 0$ を満たす x であるための必要条件である．したがって，(2) は，(ii) の $m = 1$ の場合についてのみ調べればよい．

(3) $f(x)=0$ を満たす x は負である．(2) の結果に注意すると，$f(x)=0$ を満たす有理数 x は整数ではないから，x を $\dfrac{p}{q}$ とすると ($p,\ q$ は互いに素である整数，$p<0,\ q>1$)

$$
\begin{aligned}
2\left(\frac{p}{q}\right)^3+a^2\left(\frac{p}{q}\right)^2+2b^2\cdot\frac{p}{q}+1=0\\
2p^3+a^2p^2q+2b^2pq^2+q^3=0\\
\frac{2p^3}{q}+a^2p^2+2b^2pq+q^2=0 \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

上式の $a^2p^2+2b^2pq+q^2$ が整数であるから，$\dfrac{2p^3}{q}$ は整数である．このとき，p と q は互いに素であるから ($q>1$)，$q=2$．これを ① に代入すると

$$p^3+a^2p^2+4b^2p+4=0 \quad ゆえに \quad p(p^2+a^2p+4b^2)=-4 \quad \cdots ②$$

負の整数 p は -4 の約数で，$q\ (=2)$ と互いに素であるから　$p=-1$

$p=-1$ を ② に代入すると

$$-(1-a^2+4b^2)=-4 \quad ゆえに \quad |a|^2-4|b|^2=-3$$

したがって　　$(|a|+2|b|)(|a|-2|b|)=-3$

条件より $a,\ b$ は 0 でない整数であるから，$|a|+2|b| \geqq 3$ に注意すると

$$\begin{cases}|a|+2|b|=3\\|a|-2|b|=-1\end{cases} \quad ゆえに \quad |a|=|b|=1$$

$a,\ b$ は，3 の倍数でないことに注意して

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,-1),\ (-1,\ 1),\ (-1,-1)}$$

■

$\boxed{5}$ $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ より

$$\frac{\alpha}{2|\alpha|^2+1}+\frac{\overline{z}i}{|z|^2+2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\overline{z}}{|z^2|+2}=\frac{\alpha i}{2|\alpha|^2+1}$$

上の第 2 式の共役複素数は　$\dfrac{z}{|z|^2+2}=\dfrac{-\overline{\alpha}i}{2|\alpha|^2+1}$　$\cdots(*)$

(i) $\alpha=0$ のとき，$(*)$ より　$z=0$

(ii) $\alpha\neq 0$ のとき，$(*)$ より，$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i}=\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ とおくと $(k>0)$

$|z|=k|\alpha|$ であるから，これを $\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ に代入すると

$$\frac{k^2|\alpha|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^2k^2-(2|\alpha|^2+1)k+2=0$$

したがって　$(k-2)(|\alpha|^2k-1)=0$　これを解いて　$k=2,\ \dfrac{1}{|\alpha|^2}$

$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i}=k$ であるから　$z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}$

(i), (ii) より　$\boldsymbol{\alpha=0}$ **のとき**　$\boldsymbol{z=0}$

$\boldsymbol{\alpha\neq 0}$ **のとき**　$\boldsymbol{z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}}$

■

2.5　2019 年度

1 まず，次の定積分を計算する．　研

$$\int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos 4n\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\Big[\ t - \frac{1}{4n\pi}\sin 4n\pi t\ \Big]_0^1 = \frac{1}{2},$$
$$\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt = \Big[\ -\frac{t}{2n\pi}\cos 2n\pi t + \frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi t\ \Big]_0^1 = -\frac{1}{2n\pi},$$
$$\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi}\Big[\ \cos 2n\pi t\ \Big]_0^1 = 0,$$
$$\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3},\quad \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2},\quad \int_0^1 dt = 1$$

上の結果により

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2\,dt \\
&\qquad = \int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt + x^2\int_0^1 t^2\,dt + y^2\int_0^1 dt \\
&\qquad\qquad - 2x\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt - 2y\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt + 2xy\int_0^1 t\,dt \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 - 2x\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) - 2y\cdot 0 + 2xy\cdot\frac{1}{2} \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 + \frac{x}{n\pi} + xy \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{12} + \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2} \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} \qquad \cdots (*)
\end{aligned}$$

したがって　$x = -\dfrac{6}{n\pi}$，$y = \dfrac{3}{n\pi}$ のとき，$(*)$ は最小値 $I_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{n^2\pi^2}$ をとる．

よって　　$\displaystyle \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}}$

別解 $\displaystyle\int_0^1 dt=1$，$\displaystyle\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$ より，$f(t)=t-\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\int_0^1 f(t)\,dt=0,\quad \int_0^1 f(t)^2\,dt=\frac{1}{3}\Big[\ \left(t-\frac{1}{2}\right)^3\ \Big]_0^1=\frac{1}{12}$$

$\displaystyle\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt=0$，$\displaystyle\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt=-\frac{1}{2n\pi}$ より

$$\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt=-\frac{1}{2n\pi}=-\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{1}{12}=-\frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)^2\,dt$$

したがって　$\displaystyle\int_0^1 f(t)\left\{\sin 2n\pi t+\frac{6}{n\pi}f(t)\right\}dt=0$

$g(t)=\sin 2n\pi t+\dfrac{6}{n\pi}f(t)$ とおくと　$\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt=0$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)\,dt&=\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt+\frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)\,dt=0,\\ \int_0^1 g(t)^2\,dt&=\int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt+\frac{12}{n\pi}\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt+\frac{36}{n^2\pi^2}\int_0^1 f(t)^2\,dt\\ &=\frac{1}{2}+\frac{12}{n\pi}\left(-\frac{1}{2n\pi}\right)+\frac{36}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}\end{aligned}$$

$\sin 2n\pi t=-\dfrac{6}{n\pi}f(t)+g(t)$，$t=f(t)+\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\sin 2n\pi t-xt-y&=-\frac{6}{n\pi}f(t)+g(t)-x\left(f(t)+\frac{1}{2}\right)-y\\ &=-\left(x+\frac{6}{n\pi}\right)f(t)+g(t)-\left(\frac{x}{2}+y\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1(\sin 2n\pi t-xt-y)^2\,dt&=\left(x+\frac{6}{n\pi}\right)^2\int_0^1 f(t)^2\,dt+\int_0^1 g(t)^2\,dt+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2\\ &=\frac{1}{12}\left(x+\frac{6}{n\pi}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2\\ &\geqq\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}=I_n\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} I_n=\frac{1}{2}}$　■

2　(1) 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\begin{cases} f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2 \end{cases}$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とする．$(*)$ の第 1 式から，$f(x)$ と $g(x)$ の最高次の係数が等しいことに注意して

$$\begin{cases} 2m=2+n & \cdots① \\ 3n=\max(4+m,\ 2+n) & \cdots② \end{cases}$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より　$3n=4+m$　ゆえに　$m=3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと　$m=n=2$

(ii) $4+m<2+n$ のとき，② より　$3n=2+n$　ゆえに　$n=1$
これを ① に代入すると，$m=\dfrac{3}{2}$ となり，不適．

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから，題意は成立する．

(2) $(*)$ の第 1 式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2)=(x^2+2)g(-x)+7$$

これと $(*)$ の第 1 式により　$g(-x)=g(x)$　$\cdots$③
また，$(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3)=x^4f(-x)-3x^2g(-x)-6x^2-2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3)=x^4f(-x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$

これと $(*)$ の第 2 式より　$f(-x)=f(x)$
また，$(*)$ に $x=0$ を代入すると

$$f(0)=2g(0)+7,\quad g(0)=-2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0)=3$$

以上の結果から，$f(x)=ax^2+3$，$g(x)=ax^2-2$ とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4+3=(x^2+2)(ax^2-2)+7 \\ ax^6-2=x^4(ax^2+3)-3x^2(ax^2-2)-6x^2-2 \end{cases}$$

整理すると　$\begin{cases} 2(a-1)x^2=0 \\ -3(a-1)x^4=0 \end{cases}$　ゆえに　$a=1$

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2+3,\ \ g(x)=x^2-2}$　■

3 (1) 2次方程式 $ax^2+bx+c=0\cdots(*)$ の解 z_1，z_2 が $z_1=z_2$，すなわち，2次方程式 $(*)$ が重解をもつ確率である．係数について，$b^2-4ac=0$ であるから，$b^2=4ac$ より

$b=2$ のとき，$ac=1$ より　$(a,\ c)=(1,\ 1)$
$b=4$ のとき，$ac=4$ より　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
$b=6$ のとき，$ac=9$ より　$(a,\ c)=(3,\ 3)$

よって，求める確率は　$\dfrac{1+3+1}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{216}}$

(2) (i) 2次方程式 $(*)$ が単位円周上に実数解をもつとき，その解は1ではないから，$(*)$ は -1 を重解にもち，その方程式は

$$a(x+1)^2=0 \quad ゆえに \quad b=2a,\quad c=a$$

これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の3組である．

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 2),\ (3,\ 6,\ 3)$$

(ii) 2次方程式 $(*)$ が単位円周上に虚数解をもつとき　$b^2-4ac<0$　$\cdots$①
$(*)$ の解と係数の関係および $z_2=\overline{z_1}$，$|z_1|=1$ に注意して

$$z_1z_2=\frac{c}{a} \quad ゆえに \quad |z_1|^2=\frac{c}{a} \quad すなわち \quad c=a \quad \cdots②$$

② を ① に代入して　$b^2-4a^2<0$　ゆえに　$\dfrac{b}{2}<a=c$

$b=1$ のとき　$a=c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=2,\ 3$ のとき　$a=c=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=4,\ 5$ のとき　$a=c=3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=6$ のとき　$a=c=4,\ 5,\ 6$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$6+2\cdot5+2\cdot4+3=27$ 組

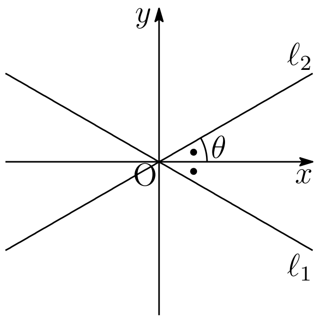
よって，求める確率は　$\dfrac{3+27}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{36}}$

(3) 条件を満たす z_1，z_2 は虚数であるから

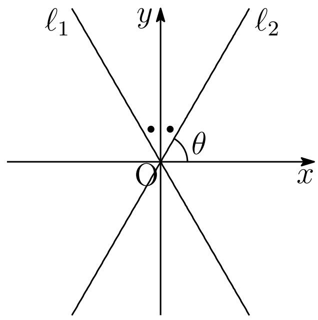
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b-\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$$

ℓ_2 の偏角を θ とすると　$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{b}$

(i)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



(ii)　$\tan\theta = \sqrt{3}$



(i) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より

$$\sqrt{3(4ac-b^2)} = b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = 3ac$$

$b=3$ のとき，$ac=3$ より　$(a,\ c) = (1,\ 3),\ (3, 1)$
$b=6$ のとき，$ac=12$ より　$(a,\ c) = (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$2+4=6$ 組

(ii) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{b} = \sqrt{3}$ より

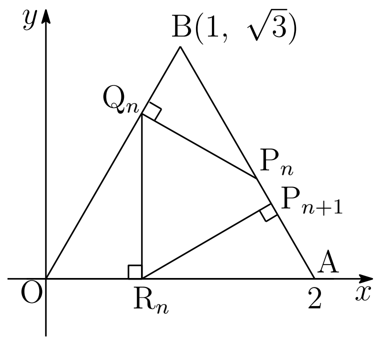
$$\sqrt{4ac-b^2} = \sqrt{3}b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = ac$$

$b=1$ のとき，$ac=1$ より　$(a,\ c) = (1,\ 1)$
$b=2$ のとき，$ac=4$ より　$(a,\ c) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
$b=3$ のとき，$ac=9$ より　$(a,\ c) = (3,\ 3)$
$b=4$ のとき，$ac=16$ より　$(a,\ c) = (4,\ 4)$
$b=5$ のとき，$ac=25$ より　$(a,\ c) = (5,\ 5)$
$b=6$ のとき，$ac=36$ より　$(a,\ c) = (6,\ 6)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$5\cdot 1+3=8$ 組

よって，求める確率は　$\dfrac{6+8}{6^3} = \mathbf{\dfrac{7}{108}}$　■

4 点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を通り，直線 OB に垂直な直線は



$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$

これと直線 OB : $y = \sqrt{3}x$ の交点の x 座標は

$$\sqrt{3}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$

これを解くことにより，点 Q_n の x 座標は　$x = \dfrac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$

次に，点 $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を通り，直線 AB に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

これを解くことにより，点 R_n の x 座標は　$x = x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1}$

点 Q_n と点 R_n の x 座標は等しいから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$$

2 点 P_n，P_{n+1} は直線 AB : $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 上の点であるから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_{n+1} + 2\sqrt{3}) = \frac{x_n + \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3})}{4}$$

整理すると　$x_{n+1} = -\dfrac{1}{8}x_n + \dfrac{15}{8}$　　ゆえに　$x_{n+1} - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{1}{8}\left(x_n - \dfrac{5}{3}\right)$

数列 $\left\{x_n - \dfrac{5}{3}\right\}$ は初項 $x_1 - \dfrac{5}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$x_n - \frac{5}{3} = \left(x_1 - \frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \qquad \text{ゆえに} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{5}{3}$$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3}) = -\sqrt{3}\cdot\frac{5}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

よって，求める点の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$ ■

5　$$C : w = \frac{az+b}{cz+1} \quad \cdots (*)$$ 研

条件 (ア) により　$i = \dfrac{ai+b}{ci+1}$,　$-i = \dfrac{a(-i)+b}{c(-i)+1}$

ゆえに　$b+c+(a-1)i = 0$,　$b+c-(a-1)i = 0$

上の 2 式から　$a = 1$,　$b = -c$

これを $(*)$ に代入すると　$w = \dfrac{z-c}{cz+1} \cdots ①$　ゆえに　$z = -\dfrac{w+c}{cw-1}$

点 z は虚軸全体を動くから，$z+\overline{z} = 0$ より　$-\dfrac{w+c}{cw-1} - \dfrac{\overline{w}-\overline{c}}{\overline{c}\,\overline{w}-1} = 0$

整理すると　$(c+\overline{c})|w|^2 + (|c|^2-1)(w+\overline{w}) - (c+\overline{c}) = 0 \quad \cdots ②$

条件 (イ) に注意すると，① により　$c \neq 0$

さらに，c は純虚数ではないから　$c+\overline{c} \neq 0$

$k = \dfrac{|c|^2-1}{c+\overline{c}} \cdots ③$ とおいて (k は実数)，② に適用すると

$$|w|^2 + k(w+\overline{w}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |w+k|^2 = k^2+1$$

条件 (イ) により　$k^2+1 = 1$　ゆえに　$k = 0$　よって　$|w| = 1$　$\cdots (**)$

また，③ により　$|c|^2 - 1 = 0$　ゆえに　$c = \pm 1$

(i) $c = 1$ のとき，① により

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2z}{z+1}$$

$z = 0$ のとき，$w = -1$ となり，条件 (ウ) に反する．

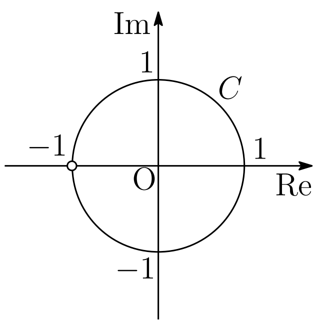
(ii) $c = -1$ のとき，① により

$$w = \frac{z+1}{-z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2}{-z+1} \neq 0$$

これは，条件 (ウ) を満たす．

よって　$\boldsymbol{a = 1,\ b = 1,\ c = -1}$

$(**)$ および $w \neq -1$ により，C の概形は右の図のようになる．



2.6 2020 年度

$\boxed{1}$ $y = e^{-x} - e^{-2x}$ より $y' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$

曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ 上の点 $(t,\ e^{-t} - e^{-2t})$ における接線の方程式は

$$y - (e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(x - t)$$

この直線が点 $(a,\ 0)$ を通るから

$$-(e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(a - t)$$

したがって $(e^t - 2)(a - t) = (e^t - 1) \quad \cdots (*)$

$e^t - 2 = 0$，すなわち，$t = \log 2$ は，$(*)$ は満たさない．

$t \neq \log 2$ のとき，$(*)$ から

$$a - t = \frac{e^t - 1}{e^t - 2} \quad \text{ゆえに} \quad a = t + 1 + \frac{1}{e^t - 2}$$

$f(t) = t + 1 + \dfrac{1}{e^t - 2}$ とおくと

$$f'(t) = 1 - \frac{e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 2)^2 - e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 1)(e^t - 4)}{(e^t - 2)^2}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$(\log 2)$	$\cdots$	$2\log 2$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{3}{2} + 2\log 2$	$\nearrow$

このとき $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to \infty} f(t) = \infty$

$\displaystyle\lim_{t \to \log 2 - 0} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to \log 2 + 0} f(t) = \infty,$

したがって，$f(t)$ のとり得る値の範囲は $f(t) \leqq 0,\ \dfrac{3}{2} + 2\log 2 \leqq f(t)$

よって，求める a の値の範囲は $\boldsymbol{a \leqq 0,\ \dfrac{3}{2} + 2\log 2 \leqq a}$ ■

2 (1) $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x)=0$ の解であるから，
$f(x)$ は，$(x-w)(x-\overline{w})$，すなわち，x^2-x+1 を因数にもつ．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4+ax^2+bx^2+cx+d \\ &= (x^2-x+1)\{x^2+(a+1)x+a+b\} \\ &\qquad\qquad +(b+c-1)x-a-b+d \end{aligned}$$

したがって　$b+c-1=0,\quad -a-b+d=0$
よって　$\boldsymbol{c=1-b,\ \ d=a+b}$

(2) (1) の結果から　$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+(1-b)x+a+b$
ゆえに　$f(1)=2a+b+2,\quad f(-1)=3b$
$f(1)$，$f(-1)$ を 7 で割った余りが，それぞれ 1，3 であるから

$$2a+b+2\equiv 1,\quad 3b\equiv 3 \pmod 7$$

上の第 2 式から　$b\equiv 1 \pmod 7$　これを第 1 式に代入すると

$$2a+1+2\equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad a\equiv -1 \pmod 7$$

$f(1)$，$f(-1)$ を 11 で割った余りが，ともに 10 であるから

$$2a+b+2\equiv 10,\quad 3b\equiv 10 \pmod{11}$$

上の第 2 式から　$b\equiv 7 \pmod{11}$　これを第 1 式に代入すると

$$2a+7+2\equiv 10 \quad \text{ゆえに} \quad 2a\equiv 1 \pmod{11}$$

さらに　$6\cdot 2a\equiv 6\cdot 1$　ゆえに　$a\equiv 6 \pmod{11}$

ゆえに　$(*)\begin{cases} a\equiv -1 \pmod 7 \\ a\equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$　　$(**)\begin{cases} b\equiv 1 \pmod 7 \\ b\equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$

$(*)$ の第 1 式から，$a=-1+7k$ とおき (k は整数)，これを $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$-1+7k\equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad k\equiv 1 \pmod{11}$$

$k=1+11\ell$ とおくと (ℓ は整数)

$$a=-1+7(1+11\ell)=6+77\ell$$

a の絶対値が 40 以下であるから，$\ell=0$ より　$a=6$　$\cdots$①

$(**)$ の第 2 式から，$b = 7 + 11m$ とおき (m は整数)，これを $(**)$ の第 1 式に代入すると

$$7 + 11m \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 4m \equiv 1 \quad \text{したがって} \quad m \equiv 2 \pmod 7$$

$m = 2 + 7n$ とおくと (n は整数)

$$b = 7 + 11(2 + 7n) = 29 + 77n$$

b の絶対値が 40 以下であるから，$n = 0$ より　$b = 29$　$\cdots$②

(1) の結果から

$$f(x) = (x^2 - x + 1)\{x^2 + (a+1)x + a + b\}$$

①，② をこれに代入して

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + 7x + 35)$$

$f(x) = 0$ の解は，$x^2 - x + 1 = 0$，$x^2 + 7x + 35 = 0$ を解いて

$$\boldsymbol{x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2},\ \frac{-7 \pm \sqrt{91}i}{2}}$$

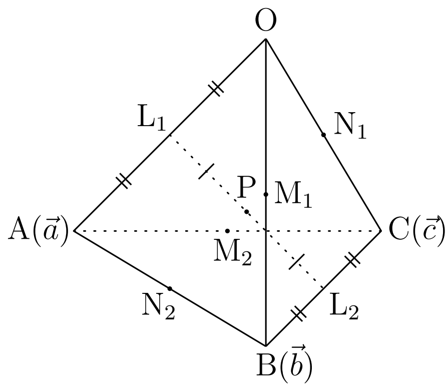
補足 $(*)\begin{cases} a \equiv -1 \pmod 7 \\ a \equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$　$(**)\begin{cases} b \equiv 1 \pmod 7 \\ b \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$ より

$$\begin{cases} a - 6 \equiv 0 \pmod 7 \\ a - 6 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} b - 29 \equiv 0 \pmod 7 \\ b - 29 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

したがって　$a - 6 \equiv 0,\ b - 29 \equiv 0 \pmod{77}$

$a,\ b$ の絶対値がともに 40 以下であるから　$a = 6$，$b = 29$ ■

3　(1) 点 O を始点とし，3 点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする．線分 OA，OB，OC の中点をそれぞれ $\mathrm{L_1}$，$\mathrm{M_1}$，$\mathrm{N_1}$ とし，線分 BC，CA，AB の中点をそれぞれ $\mathrm{L_2}$，$\mathrm{M_2}$，$\mathrm{N_2}$ とすると 研



$$2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}} = \vec{b}+\vec{c}-\vec{a},$$
$$2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}} = \vec{c}+\vec{a}-\vec{b},$$
$$2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}} = \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$$

直線 $\mathrm{L_1L_2}$，$\mathrm{M_1M_2}$，$\mathrm{N_1N_2}$ はそれぞれ直線 ℓ，m，n であるから，$\ell\perp m$ より，$\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}\perp\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$ であるから

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}) &= (\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})\\ &= |\vec{c}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2 = 0 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$m\perp n$，$n\perp\ell$ であるから，同様にして

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}}) &= (\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\\ &= |\vec{a}|^2-|\vec{c}-\vec{b}|^2 = 0 \quad \cdots ②\\ (2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) &= (\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\\ &= |\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{c}|^2 = 0 \quad \cdots ③\end{aligned}$$

①〜③ より　$|\vec{c}| = |\vec{b}-\vec{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \mathrm{AB} = \sqrt{5}$
$|\vec{a}| = |\vec{c}-\vec{b}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \mathrm{BC} = \sqrt{3}$
$|\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{c}| = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = \mathrm{CA} = 2$

①〜③ をそれぞれ整理すると

$2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2 = 3+4-5 = 2$　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$
$2\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2 = 4+5-3 = 6$　ゆえに　$\vec{b}\cdot\vec{c} = 3$
$2\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2 = 5+3-4 = 4$　ゆえに　$\vec{c}\cdot\vec{a} = 2$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}-\vec{c}$ のなす角を φ とすると $(0\leqq\varphi\leqq\pi)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})}{|\vec{b}||\vec{a}-\vec{c}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2} = \frac{1-3}{2^2} = -\frac{1}{2} \quad ゆえに \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

よって，直線 OB と直線 CA のなす角 θ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ は

$$\theta = \pi-\varphi = \pi-\frac{2\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2 = 1+2-3=0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) &= (\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = |\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 5-4+1-2=0\end{aligned}$$

したがって　　$\mathrm{OA}\perp\mathrm{L_1L_2}$，$\mathrm{BC}\perp\mathrm{L_1L_2}$

2 点 $\mathrm{L_1}$，$\mathrm{L_2}$ の中点を P とすると　$\mathrm{PO}=\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$

点 P は，四面体 OABC の 4 頂点を通る球面の中心である．したがって

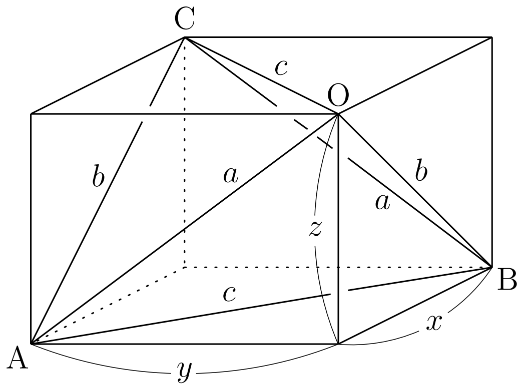
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OL_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OL_2}}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

このとき　$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$$= 3+4+5+2\cdot1+2\cdot3+2\cdot2 = 24$$

よって，求める半径は　$\dfrac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \dfrac{1}{4}\sqrt{24} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

補足 四面体 OABC のすべての面が合同である四面体を等面四面体という．$a=\mathrm{OA}$，$b=\mathrm{OB}$，$c=\mathrm{OC}$ とすると，直方体の縦，横，高さがそれぞれ x，y，z で



$$y^2+z^2=a^2$$
$$z^2+x^2=b^2$$
$$x^2+y^2=c^2$$

を満たすものが唯一存在する．

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2},\quad z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

したがって，等面四面体はこの直方体に埋め込まれ，求める球面の半径はこの長方形に外接する球面の半径 R に等しい．

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

■

$\boxed{4}$ (1) X が 5 で割り切れない，すなわち，4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0，X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1-(p_0+p_1) = 1-\left(\frac{626}{1296}+\frac{500}{1296}\right) = \mathbf{\frac{19}{144}}$$

(2) X が 2 で割り切れない，すなわち，4 回とも奇数の目が出る確率を q_0，X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1-(q_0+q_1) = 1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\right) = \mathbf{\frac{37}{48}}$$

(3) X が 100 の倍数となるは，出る目の組合せが次の (i)〜(iv) の場合である．

(i) $\{\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ 5,\ 5\}$ のとき $(\mathrm{A}=2,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

(ii) $\{4,\ 5,\ 5,\ \mathrm{B}\}$ のとき $(\mathrm{B}=1,\ 2,\ 3,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

(iii) $\{4,\ 4,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

(iv) $\{4,\ 5,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

(i)〜(iv) より，求める確率は $\dfrac{24+48+6+4}{1296} = \dfrac{82}{1296} = \mathbf{\dfrac{41}{648}}$ ■

5 (1) T の表す領域は

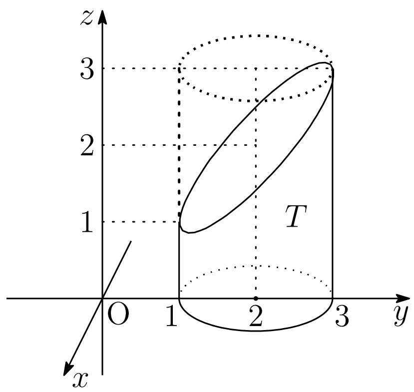
$$x^2+(y-2)^2 \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq y$$

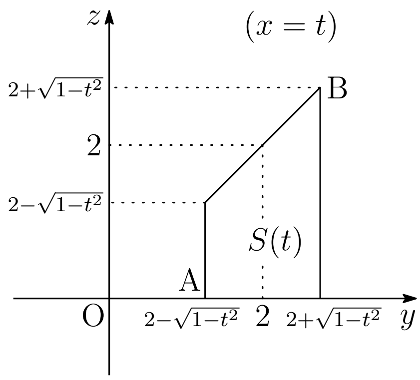
T を平面 $x=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの断面を表す領域は

$$x=t, \quad 2-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 2+\sqrt{1-t^2}, \quad 0 \leqq z \leqq y$$

右下の図で中央の z 座標が 2 であることに注意して

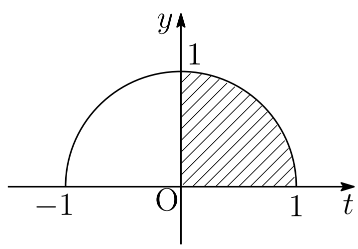
$$S(t)=2\{(2+\sqrt{1-t^2})-(2-\sqrt{1-t^2})\}=\boldsymbol{4\sqrt{1-t^2}}$$





右の図の斜線部分の面積は

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$$



よって，求める T の体積を V_1 とすると

$$V_1=\int_{-1}^1 S(t)\,dt=\int_{-1}^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt=8\int_0^1 \sqrt{1-t^2}=8\cdot\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{2\pi}$$

(2) 2 点 A，B を (1) の図のようにとると

$$\mathrm{OA}=2-\sqrt{1-t^2}, \quad \mathrm{OB}=\sqrt{2}(2+\sqrt{1-t^2})$$

求める立体の体積を V_2 とすると，T が yz 平面に関して対称であるから

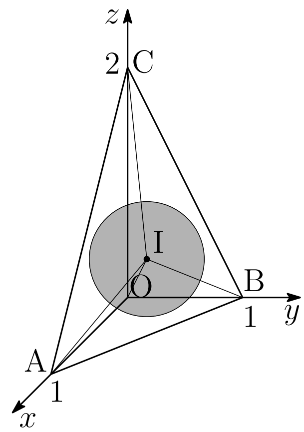
$$\frac{V_2}{2\pi}=\int_0^1(\mathrm{OB}^2-\mathrm{OA}^2)\,dt=\int_0^1\{2(2+\sqrt{1-t^2})^2-(2-\sqrt{1-t^2})^2\}\,dt$$

$$=\int_0^1(5-t^2)\,dt+12\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\left[\,5t-\frac{t^3}{3}\,\right]_0^1+12\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{14}{3}+3\pi$$

よって $\quad V_2=\boldsymbol{2\pi\left(\frac{14}{3}+3\pi\right)}$ ■

2.7　2021 年度

1　(1) 四面体 OABC に内接する球の中心を I，半径を d とすると，I から xy 平面, yz 平面，zx 平面，平面 ABC までの距離はともに d であり，I$(d,\ d,\ d)$ とおける $(d>0)$．△OAB，△OBC，△OCA，△ABC の面積は



$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2},$$
$$\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{OCA}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ 2)$ より

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot5-1^2}=\frac{3}{2}$$

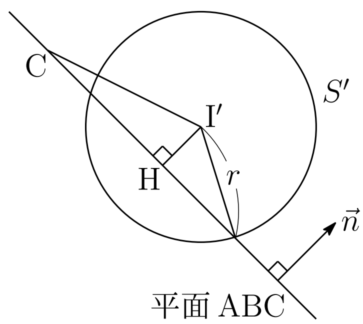
したがって，四面体 OABC の表面積を S，体積を V とすると

$$S=\frac{1}{2}+1+1+\frac{3}{2}=4,\quad V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{OC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2=\frac{1}{3}$$

上の結果を $V=\dfrac{1}{3}Sd$ に代入すると

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot4d\quad \text{ゆえに}\quad d=\frac{1}{4}\quad \text{よって}\quad \mathrm{I}\left(\boldsymbol{\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}}\right)$$

(2) 条件を満たす球を S' とし，S' の中心を I$'(r,\ r,\ r)$，半径を r とする $(r>0)$．
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを



$$\vec{n}=(2,\ 2,\ 1)$$

とおき，I$'$ から平面 ABC に垂線 I$'$H を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{CI'}}=(r,\ r,\ r-2)$$

したがって　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CI'}}=2r+2r+r-2=5r-2$

$\overrightarrow{\mathrm{CI'}}=\overrightarrow{\mathrm{CH}}+\overrightarrow{\mathrm{HI'}}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HI'}}=5r-2$

$\vec{n}/\!/\overrightarrow{\mathrm{HI'}}$ であるから　$|\vec{n}||\overrightarrow{\mathrm{HI'}}|=|5r-2|$

$$|\overrightarrow{\mathrm{HI'}}|=\frac{|5r-2|}{|\vec{n}|}=\frac{|5r-2|}{3}$$

S' が平面 ABC と共有点をもつとき，$|\mathrm{HI}'| \leqq r$ であるから

$$\frac{|5r-2|}{3} \leqq r \quad \text{ゆえに} \quad -3r \leqq 5r-2 \leqq 3r$$

これを解いて $\quad \dfrac{1}{4} \leqq r \leqq 1 \quad \cdots ①$

S' と平面 ABC が交わってできる円の半径を R とすると

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 - |\overrightarrow{\mathrm{HI}'}|^2 = r^2 - \left(\frac{|5r-2|}{3}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{9}(16r^2 - 20r + 4) \\ &= -\frac{16}{9}\left(r - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

① に注意すると，$r = \dfrac{5}{8}$ のとき，R^2 の最大値は $\dfrac{1}{4}$

よって，求める円の面積の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ 0,\ 2)$ の外積 (ベクトル積) は[1]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (1\cdot 2 - 0\cdot 0,\ 0\cdot(-1) - (-1)\cdot 2,\ -1\cdot 0 - 1\cdot(-1)) \\ &= (2,\ 2,\ 1) \end{aligned}$$

は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に直交する．

3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad 2x + 2y + z - 2 = 0$$

この平面の法ベクトルは[2] $\quad \vec{n} = (2,\ 2,\ 1)$

点 $\mathrm{I}'(r,\ r,\ r)$ から平面 $2x + 2y + z - 2 = 0$ までの距離は

$$\frac{|2r + 2r + r - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|5r-2|}{3}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.179 (物理ページ p.184))
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.171 (物理ページ p.176))

2　(1) x の 2 次方程式

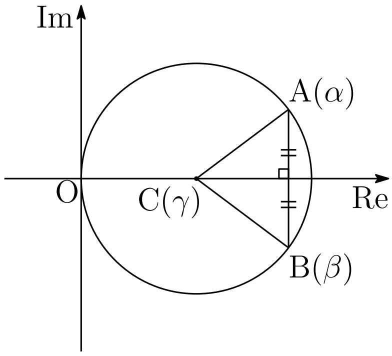
$$x^2 - (4\cos\theta)x + \frac{1}{\tan\theta} = 0 \qquad \cdots (*)$$

が実数解をもたないから，係数について

$$D/4 = (2\cos\theta)^2 - \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\tan\theta}(4\sin\theta\cos\theta - 1) = \frac{2\sin 2\theta - 1}{\tan\theta} < 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ に注意して解くと　$0 < 2\theta < \dfrac{\pi}{6}$　よって　$\boldsymbol{0 < \theta < \dfrac{\pi}{12}}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係により



$$\alpha + \beta = 4\cos\theta, \quad \alpha\beta = \frac{1}{\tan\theta}$$

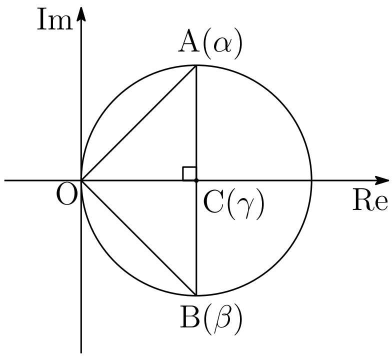
α，β は互いに共役で，中心 C(γ) は A，B の垂直二等分線上，すなわち，実軸上の点であるから，γ は実数である．
OC = AC より　$|\gamma| = |\gamma - \alpha|$

$$\gamma^2 = (\gamma - \alpha)(\gamma - \overline{\alpha}) = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$$

整理すると　$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\beta$

よって　$\gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \dfrac{1}{4\cos\theta\tan\theta} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4\sin\theta}}$

(3) OC = AC より，△OAC が直角三角形であるとき，$\angle\mathrm{OCA} = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，C は AB の中点であるから，$\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \gamma$ より，(2) の結果から



$$\frac{4\cos\theta}{2} = \frac{1}{4\sin\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2\theta = \frac{1}{4}$$

$\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}$ であるから

$$\frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2\theta - 8\tan\theta + 1 = 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より，$0 < \tan\theta < 1$ に注意して　$\boldsymbol{\tan\theta = 4 - \sqrt{15}}$

3　(1)　$f(t) = e^t - xt - y$ とおく．条件 $(*)$ をみたすとき，すべての実数 t に対して

$$f(t) \geqq 0 \qquad \text{(A)}$$

をみたす点 $(x,\ y)$ の集合を求めればよい．

(i)　$x < 0$ のとき

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = \lim_{t \to -\infty} (e^t - xt - y) = -\infty$$

このとき，(A) をみたさない．

(ii)　$x = 0$ のとき，$f(t) = e^t - y$ は，単調増加であるから

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = \lim_{t \to -\infty} (e^t - y) = -y \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \leqq 0$$

(iii)　$x > 0$ のとき，$f'(t) = e^t - x$ より

t	$\cdots$	$\log x$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

極小値 $f(\log x) = x - x\log x - y$ であるから，(A) をみたすとき

$$x - x\log x - y \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \leqq x - x\log x$$

(i)〜(iii) より

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x - x\log x & (x > 0) \end{cases}$$

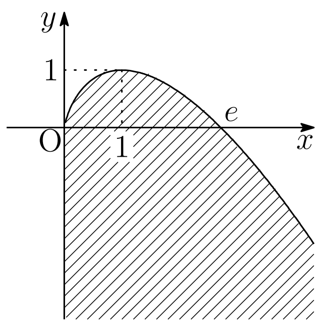
とおくと，条件 $(*)$ をみたす点 $(x,\ y)$ は

$$x \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad y \leqq g(x)$$

$x > 0$ のとき　$g'(x) = -\log x,\ g''(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$

したがって，$x \geqq 0$ における $g(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g''(x)$		$-$	$-$	$-$
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$



$$\lim_{x \to +0} g(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty$$

よって，点 $(x,\ y)$ 全体の集合は，右上の図の斜線部分で境界線を含む．

(2) 求める立体の体積を V とすると　研

$$\frac{V}{\pi} = \int_1^e x^2(1-\log x)^2\,dx$$

$x = e^t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt} = e^t$

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 (e^t)^2(1-t)^2 \cdot e^t\,dt = \int_0^1 e^{3t}(t-1)^2\,dt \\ &= \frac{1}{3}\left[\ e^{3t}\left\{(t-1)^2 - \frac{\{(t-1)^2\}'}{3} + \frac{\{(t-1)^2\}''}{3^2}\right\}\ \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left[\ e^{3t}\left\{(t-1)^2 - \frac{2(t-1)}{3} + \frac{2}{9}\right\}\ \right]_0^1 = \frac{2e^3}{27} - \frac{17}{27}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi(2e^3-17)}{27}}$

補足 対数型から指数型の積分に置換すると，次の積分公式が利用できる[3].

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx = \frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C$$

補足 まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す.

$h(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき}\quad h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$h(x)$ は単調減少で，$h(1) = 2$ であるから

$$h(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

よって　　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to+0} x\log x = 0$$

---

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7)

$\boxed{4}$ (1) $n=2$ のとき，$f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$，$f'(x)=2a_2x+a_1$

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{a_2(\beta^2-\alpha^2)+a_1(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=a_2(\alpha+\beta)+a_1$$
$$f'(\gamma)=2a_2\gamma+a_1$$

γ を複素数平面上の 2 点 α, β の中点，すなわち，$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ とすると

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$$

よって，どのような α, β, $f(x)$ も平均値の性質をもつ．

(2) $\alpha=1-i$, $\beta=1+i$, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}&=\frac{\beta^3-\alpha^3+a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+a(\alpha+\beta)+b\\&=2+2a+b\end{aligned}$$

γ は，複素数平面上の線分 α, β 上の点であるから

$$\gamma=1+ti\quad(-1\leqq t\leqq 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned}f'(\gamma)&=3(1+ti)^2+2a(1+ti)+b\\&=3-3t^2+2a+b+2t(3+a)i\end{aligned}$$

平均値の性質をもつとき

$$2+2a+b=3-3t^2+2a+b+2t(3+a)i$$

整理すると $\quad 1-3t^2=0\quad$ かつ $\quad 2t(3+a)=0$

$-1\leqq t\leqq 1$ に注意して $\quad t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ a=-3$

このとき，平均値の性質をもつ．

よって，実数 a, b, c, に関する必要十分条件は

$$\boldsymbol{a=-3,\ 2\text{ 数 } b,\ c\text{ は任意の実数}}$$

(3) $\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}$，$\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\alpha^7=\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^7=\cos\frac{7}{4}\pi-i\sin\frac{7}{4}\pi=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\beta$$
$$\beta^7=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^7=\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}=\alpha$$

$f(x)=x^7$, $f'(x)=7x^6$ について

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^7-\alpha^7}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=-1,\quad f'(\gamma)=7\gamma^6 \qquad (*)$$

$\arg\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$, $\arg\beta=\dfrac{\pi}{4}$ であるから　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\arg\gamma\leqq\dfrac{\pi}{4}$

平均値の性質をもつと仮定すると，$\arg(7\gamma^6)=\arg(-1)$ であるから

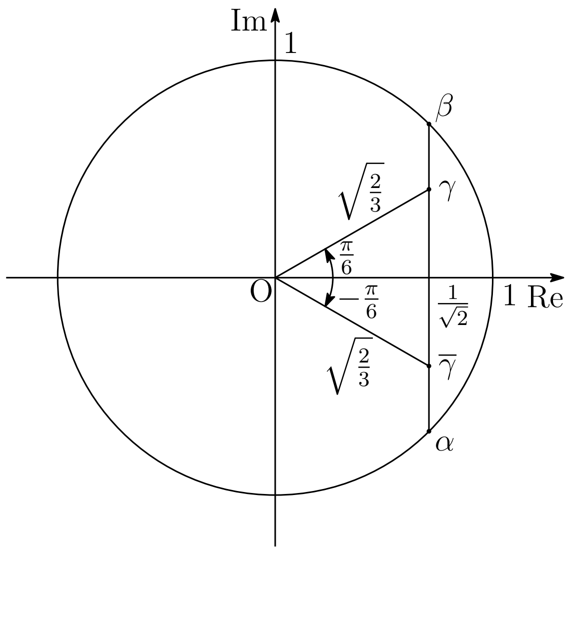
$$6\arg\gamma=\pm\pi\quad ゆえに\quad \arg\gamma=\pm\frac{\pi}{6}$$

これをみたす 2 点 α, β を結ぶ線分上の点 γ について

$$|\gamma|=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$
$$|7\gamma^6|=7\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^6=\frac{56}{27}\neq|-1|$$

上の第 2 式から，$7\gamma^6\neq-1$ となり，平均値の性質に反する．

よって，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$, $\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $f(x)=x^7$ は，平均値の性質をもたない．



5 (1) (i) $2 \leqq k \leqq n-k \leqq n-2$ のとき，$\dfrac{n-j}{j} \geqq 1$ であるから $(j=1,2,\cdots,k)$

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{1\cdot2\cdot3\cdots k} \\
&> n\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\cdots\frac{n-k}{k} \\
&\geqq n\cdot1\cdot1\cdots1 = n
\end{aligned}
$$

(ii) $2 \leqq n-k \leqq k \leqq n-2$ のとき，$k' = n-k$ とおくと

$$2 \leqq k' \leqq n-k' \leqq n-2$$

(i) の結果から　${}_n\mathrm{C}_{k'} > n$　ゆえに　${}_n\mathrm{C}_k > n$

(i),(ii) より，自然数 n, k が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき

$${}_n\mathrm{C}_k > n$$

(2) $2 \leqq k \leqq n-2$ について

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{1\cdot2\cdot3\cdots k} = p \qquad (*)$$

が成立するとき，素数 p は n, $n-1, \cdots, n-k+1$ のいずれかの因数で

$${}_n\mathrm{C}_k = p \leqq n$$

これは，(1) の結論に反する．
$k=0$, n のとき，$(*)$ は成立しないから，$k=1$, $n-1$ より

$${}_n\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_{n-1} = p$$

よって　　$\boldsymbol{(n,\ k) = (p,\ 1),\ (p,\ p-1)}$

第 3 章　一般前期研究

九州大学の入試問題 (数学) の特徴として，毎年出題される「確率」「微積分」がある．旧課程の数学 A の分野に期待値 (確率変数の平均) があり，これをテーマとする九大 (経済工学部) らしい問題が多岐にわたり出題されていた．現行課程では，期待値が数学 B の「確率分布と統計」の分野で扱うことになり，同分野が九州大学の出題の範囲外であるため,「確率」の出題内容がかなり限られてきた印象を持つ．

近年の確率の出題内容を見ると，大学で扱う確率論で扱う反射壁・吸収壁，破産問題[1] などの分野から入試問題として整えた変数の推移 (2015 年) をテーマとする問題が出題された．2015 年の問題で簡単に説明すると，青玉の個数を変数 X を縦軸に，横軸を試行回数とすると，$X=0,\ 1,\ 2,\ 3$ の値で推移し，$X=0$，$X=3$ を反射壁としている．仮に本題が $X=0$ または $X=3$ になった時点で試行が終了するとき，$X=0$，$X=3$ はその吸収壁という．また，青玉 1 個を 1 万円としてゲームに参加し，3 万円または 0 円になったときにゲームが終了するといった破産問題でもある．

折れ線グラフを用いる問題は，2002 年 (1 次元ランダムウォーク) にも出題され，九大らしい工夫がなされた良問である．

確率分野からの出題内容が狭くなったため，2016 年から 2018 年はマルコフ連鎖・確率漸化式を中心とする出題になってしまった．

最後に「微積分」の求積問題は，受験生にとって明暗を分けることが多い．確かに，時間が掛かっても膨大な計算の末，正解に至る受験生もいるが，試験時間は限られている．問題の核心を捉え，簡潔な解答を目指す必要がある．そのための学習が何よりも重要であり，本書はこれに対する編者の解答である．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2014.pdf $\boxed{4}$

3.1　2015 年度

3.1.1　4 番 (3) 研究

操作を n 回繰り返す中で袋の中の玉が 3 個とも青玉になることなしに，青玉の個数が 1 個である確率を p_n とする．　問　解

(i) n が奇数のとき

(2) で示したように奇数回目に青玉が 1 個になることはないから　$p_n = 0$

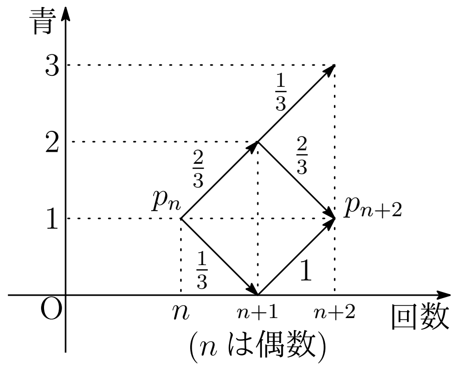
(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1\right) = \frac{7}{9}p_n$$

ゆえに　$p_n = \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$

n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2} \times \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$



東大理科 2008 年

白黒 2 種類のカードがたくさんある．そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作 (**A**) を考える．

(**A**) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる．

以下の問 (1)，(2) に答えよ．

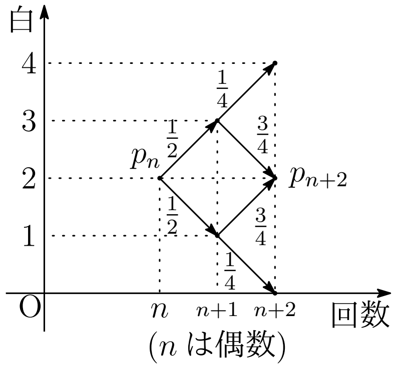
(1) 最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

(2) 最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

解答　(1) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 4 枚とも同じ色になることなしに，白と黒のカードが 2 枚づつである確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき
奇数回目に 4 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　**0**

(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$



$$p_{n+2} = p_n \times \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4}p_n$$

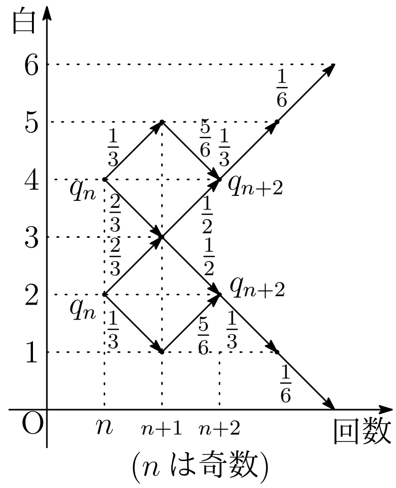
ゆえに　$p_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

求める確率は

$$p_{n-2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

(2) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 6 枚とも同じ色になることなしに，白のカードが 2 枚である確率を q_n とすると，対称性により白のカードが 4 枚である確率も q_n である．

(i) n が奇数のとき　$q_1 = \dfrac{1}{2}$



$$\begin{aligned} q_{n+2} &= q_n \times \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} + q_n\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{17}{18}q_n \end{aligned}$$

ゆえに　$q_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

求める確率は，3 以上の奇数のとき

$$q_{n-2} \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}}$$

(ii) n が 1 または偶数のとき
6 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　**0**

3.1.2 5番 (2) ユークリッドの互除法

n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x,y) と表記すると 問 解

$$(x,y)\,|\,x, \quad (x,y)\,|\,y$$

が成り立つ．

ユークリッドの互除法

2整数 a，b について $(a>b>0)$，a を b で割ったときの商を q，余りを c とすると

$c \neq 0$ のとき　$(a,b)=(b,c)$

$c = 0$ のとき　$(a,b)=b$

証明 <u>$c \neq 0$ のとき</u>，$a=bq+c$ より　$(b,c)\,|\,a$　また，$(b,c)\,|\,b$ であるから，(b,c) は a と b の公約数，したがって

$$(b,c)\,|\,(a,b) \quad \cdots ①$$

同様に，$c=a-bq$ より　$(a,b)\,|\,c$　また，$(a,b)\,|\,b$ であるから，(a,b) は b と c の公約数，したがって

$$(a,b)\,|\,(b,c) \quad \cdots ②$$

①，② より　$(a,b)=(b,c)$

<u>$c=0$ のとき</u>，自明．　証終

補足 さらに，b を c で割った余りが d であるとき　$(b,c)=(c,d)$

すなわち　$(a,b)=(b,c)=(c,d)$

2つの整数 a_1，a_2 について $(a_1>a_2>0)$，a_1 を a_2 で割った余りを a_3，さらに，a_2 を a_3 で割った余りを a_4，順次，a_k を a_{k+1} で割った余りを a_{k+2} とすると

$$(a_1,a_2)=(a_2,a_3)=(a_3,a_4)=\cdots=(a_k,a_{k+1})=(a_{k+1},a_{k+2})=\cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列であるから，互除法を繰り返すことにより，a_1 と a_2 の最小公倍数を求めることができる．

3.2 2016 年度

3.2.1 2 番 (4) 外積 (ベクトル積)

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと 問 解

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\cdot\frac{3}{4}\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=3(1-t):2t$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3(1-t)+2t}=\frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b}+2t\vec{c}\}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b}-3\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b}-3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え，外積の性質を用いると [2]

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって $\triangle\mathrm{PQR}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}:1$

外積は高校数学の範囲外であるから，2 次試験では使えないが，センター試験では，非常に有効な計算法である．なお，外積 (ベクトル積) の演算について，次式が成り立つことに注意したい．

$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{b}$$

また，これに $\vec{c}=\vec{b}$ を代入すると $\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

3.2.2 3 番 マルコフ連鎖

$P_i(n+1)$ は $P_j(n)$ によって決定する確率過程 (マルコフ連鎖) である． 問 解

$$
\begin{aligned}
P_0(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\} \\
P_1(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+2P_5(n)\} \\
P_2(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_3(n)+2P_4(n)+P_5(n)\} \\
P_3(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\} \\
P_4(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+2P_2(n)+P_3(n)+P_5(n)\} \\
P_5(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+2P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)\}
\end{aligned}
$$

したがって　$P_0(n)=P_3(n)=\dfrac{1}{6}$,

$$
\begin{aligned}
P_1(n+1)-P_5(n+1) &= -\frac{1}{3}\{P_1(n)-P_5(n)\}, \\
P_2(n+1)-P_4(n+1) &= -\frac{1}{3}\{P_2(n)-P_4(n)\}
\end{aligned}
$$

$P_1(1)=P_2(1)=P_4(1)=P_5(1)=\dfrac{1}{6}$ より　$P_1(n)=P_5(n)$，$P_2(n)=P_4(n)$

これらの結果から　$P_1(n+1)=P_2(n+1)=\dfrac{1}{3}\left\{P_1(n)+P_2(n)+\dfrac{1}{6}\right\}$

ゆえに　$P_1(n+1)=\dfrac{2}{3}P_1(n)+\dfrac{1}{18}$

$P_1(1)=\dfrac{1}{6}$ であるから　$P_1(n)=\dfrac{1}{6}$　よって　$P_i(n)=\dfrac{1}{6}\ (i=0,1,\cdots 5)$

3.2.3　5 番 (3) 発展

$\theta = \dfrac{\pi}{n}$，$\alpha = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ とおくと　問　解

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - \alpha^k)$$

また　$z^n - 1 = (z-1)\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　ゆえに　$\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k) = \sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　$\cdots (*)$

$(*)$ は，z に関する恒等式であるから，$z=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \prod_{k=1}^{n-1}(1 - \cos 2k\theta - i\sin 2k\theta) = \prod_{k=1}^{n-1}(2\sin^2 k\theta - 2i\sin k\theta\cos k\theta) \\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1}(\sin k\theta - i\cos k\theta) \\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - k\theta\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - k\theta\right)\right\} \\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta \times (\cos 0 - i\sin 0) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta \\
(\text{右辺}) &= n
\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

たとえば，$n=9$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9} = \frac{9}{256}$

したがって　$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{3}{16}$　$\cdots$①

同様に，$n=18$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{17}\sin\frac{k\pi}{18} = \frac{9}{2^{16}}$

したがって　$\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \cdots \sin 80^\circ = \dfrac{3}{256}$　$\cdots$②

さらに，①，② から　$\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \dfrac{1}{16}$

3.3 2017年度

3.3.1 3番(2)(3) 別解

(2) $a_n = 4n - 3$ より，a_n が 7^2 の倍数であるとき 問 解

$$4n - 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 12(4n-3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 13 \pmod{7^2}$$

n は整数 l を用いて　$n = 49l + 13$

したがって，$1 \leqq 49l + 13 \leqq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leqq l \leqq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq l \leqq 11$$

よって，求める個数は　**12** (個)

(3) $a_n = 4n - 3$ より，a_n が 7^3 の倍数であるとき

$$4n - 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 86(4n-3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 258 \pmod{7^3}$$

n は整数 m を用いて　$n = 343m + 258$

したがって，$1 \leqq 343m + 258 \leqq 600$ を満たす整数 m は $m = 0$ の1個で

$$a_{258} = 4\cdot258 - 3 = 1029 = 3\cdot7^3$$

また，$\{a_n\}$ の初項から第600項のうち，7^4 で割り切れる項はない．

(1),(2) の結果から，数列 $\{a_n\}$ のうち，7の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

これら38個の項をそれぞれ7で割ると，さらに7で割り切れる項が第2列に6個あり，これらをまた7で割ると，最後に残った a_{258} だけが7で1回割れる．

したがって，これら38個の積は7で $38 + 6 + 1$，すなわち，45回割り切れる．

よって，求める n の最小値は　$\boldsymbol{n = 265}$

3.4　2018 年度

3.4.1　1 番 双曲線の媒介変数表示

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$ により，　問　解

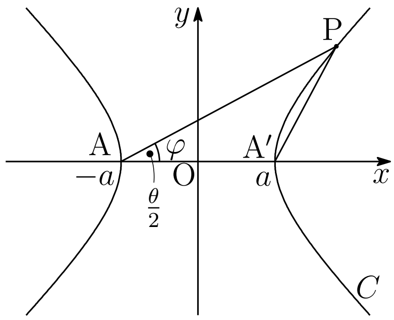
$$\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\theta},\quad \frac{y}{b}=\tan\theta$$

とおくと，双曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，次のように媒介変数表示ができる．

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$

とくに，$a=b$ のとき，直角双曲線となる．

直角双曲線 $C : x^2-y^2=a^2$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，2 頂点を $\mathrm{A}(-a,\ 0)$，$\mathrm{A}'(a,0)$ とおく．



直線 AP の傾きを m，直線 A′P の傾きを m' とすると

$$m=\frac{y}{x+a},\quad m'=\frac{y}{x-a}\quad \text{ゆえに}\quad mm'=\frac{y^2}{x^2-a^2}=1$$

P は 2 直線 $\mathrm{AP} : y=m(x+a)$，$\mathrm{A'P} : y=\dfrac{1}{m}(x-a)$ の交点であるから

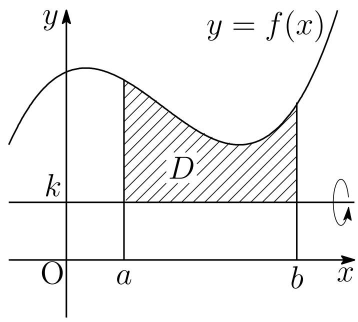
$$x=\frac{1+m^2}{1-m^2}a,\quad y=\frac{2m}{1-m^2}a$$

ここで，$m=\tan\varphi$ とおくと　$x=\dfrac{a}{\cos 2\varphi}$，$y=a\tan 2\varphi$

さらに，$\theta=2\varphi$ とおくことにより　$x=\dfrac{a}{\cos\theta}$，$y=a\tan\theta$

直角双曲線の漸近線が $y=x$ と $y=-x$ であるから，$0\leqq\theta<2\pi$，すなわち，$0\leqq\varphi<\pi$ において，$\varphi\neq\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$ である．$\varphi=\frac{\pi}{4}-0$ のとき P は第 1 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{\pi}{4}+0$ のとき P は第 3 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi-0$ のとき P は第 2 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi+0$ のとき P は第 4 象限の無限遠点にある．

3.4.2 2番 (3) 研究

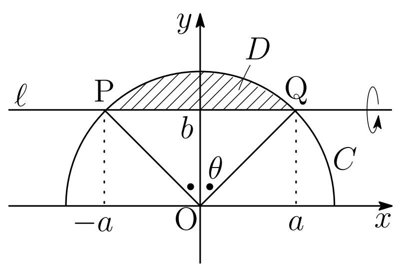


$k>0$とする．曲線$y=f(x)$と直線$y=k$が，区間$a \leqq x \leqq b$において，$f(x) \geqq k$であるとき，この区間において，曲線$y=f(x)$と直線$y=k$で囲まれた領域Dを直線$y=k$のまわりに1回転させた回転体の体積をVとすると 問 解

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_a^b (y-k)^2\,dy \\ &= \pi\int_a^b (y^2-k^2)\,dx - 2\pi k\int_a^b (y-k)\,dx \end{aligned}$$

Dをx軸のまわりに1回転させた回転体の体積をV_x，Dの面積をSとすると

$$\boldsymbol{V = V_x - 2\pi k S}$$



半円$C: x^2+y^2=a^2+b^2$ $(y \geqq 0)$と直線$\ell: y=b$ $(b \geqq 0)$で囲まれた領域をDとする．Dをℓのまわりに1回転させた回転体の体積をV，Dをx軸のまわりに1回転させた回転体の体積をV_x，Dの面積をSとすると

$$V_x = \pi\int_{-a}^{a} (y^2-b^2)\,dx = \pi\int_{-a}^{a} (a^2-x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi a^3$$

とくに，V_xはCの半径rに関係なくaの値により決定する．
Cとℓの2つの交点P，Qに対し，$\angle\mathrm{POQ}=2\theta$，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=r$とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2\cdot 2\theta - \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b = r^2\theta - ab, \\ V &= V_x - 2\pi bS = \frac{4}{3}\pi a^3 - 2\pi b(r^2\theta - ab) \\ &= 2\pi\left(\frac{2}{3}a^3 + ab^2 - br^2\theta\right) \end{aligned}$$

例えば，$C: x^2+y^2=4$，$\ell: y=1$のとき，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$r=2$，$\theta=\frac{\pi}{3}$より

$$V = 2\left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

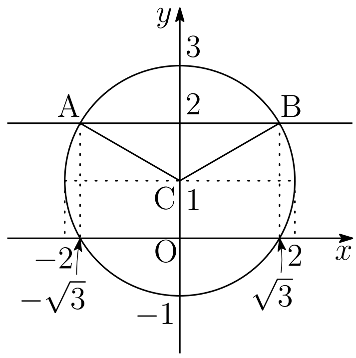
これは，40ページで求めたV_2の2倍に等しい．

前ページで示したように，領域 D を回転させた回転体の体積は，D の面積 S を利用すると，簡単に求めることができる．

例題 次の領域 D_1 および D_2 をそれぞれ x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$$D_1 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ y \geqq 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

解答 D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．
右図において，$\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_2 = \pi\cdot 2^2 - 2S_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$y = 1 + \sqrt{4-x^2}\ (-2 \leqq x \leqq 2) \cdots (*)$ とすると

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx = S_1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

D_1 および D_2 を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする．$(*)$ より，$x^2+(y-1)^2 = 4$ であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y^2-2^2)\,dx = 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-x^2)\,dx \\ &= 2\pi S_1 + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)\,dx \\ &= 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{6}(2\sqrt{3})^3 = 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

D_2 の境界を表す 2 曲線 $C_1 : y = f(x)$，$C_2 : y = g(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{4-x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 2 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{4-x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 0 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$

とすると

$$f(x) + g(x) = 2, \qquad \int_{-2}^{2} \{f(x) - g(x)\}\,dx = S_2$$

したがって

$$\begin{aligned}V_2 &= \pi\int_{-2}^{2}\{f(x)^2 - g(x)^2\}\,dx \\ &= \pi\int_{-2}^{2}\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}\,dx \\ &= \pi\int_{-2}^{2}2\{f(x)-g(x)\}\,dx = 2\pi\int_{-2}^{2}\{f(x)-g(x)\}\,dx \\ &= 2\pi S_2 = 2\pi\left(\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

補足 D_2 の重心は $(0,\ 1)$ であるから，パップス・ギュルダンの定理[3] により

$$V_2 = 2\pi S_2\cdot 1 = 2\pi\left(\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right)$$

九大理系 2012 年

円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 求める体積は　$V_1+V_2 = 2\pi\left(\frac{8\pi}{3}+3\sqrt{3}\right)$

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 参照)

九大理系 2013 年

原点 O を中心とし，点 A(0, 1) を通る円を S とする。点 B$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

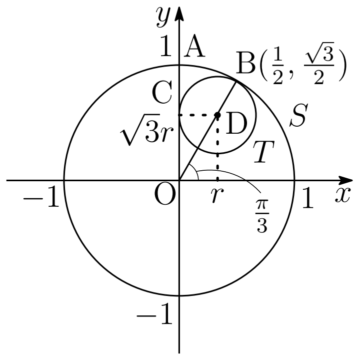
(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，円 T の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答　(1) OB の x 軸の正の方向となす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから，T の半径を r とすると，D の座標は $(r,\ \sqrt{3}r)$，OD $= 2r$ である．
右の図より，OD + DB = 1 であるから

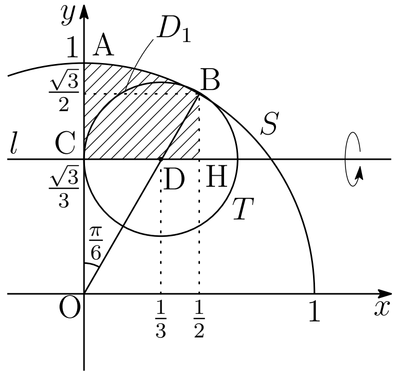
$$2r + r = 1 \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{1}{3}$$

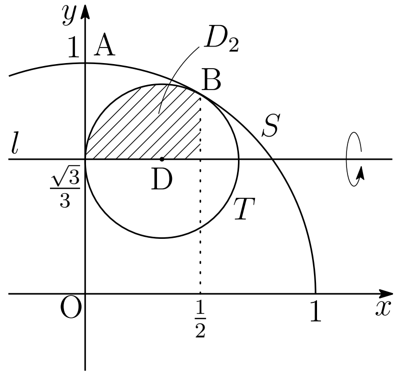
よって　　$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$



(2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ とすると，S と y 軸，l，直線 $x = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた領域 D_1 の面積は，左下の図から

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) dx &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \triangle\mathrm{OCD} + \triangle\mathrm{BDH} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{24} \qquad \cdots (*)\end{aligned}$$





D_1 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると，$x^2+y^2=1$ および $(*)$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}y+\frac{1}{3}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}-x^2\right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}-x^2\right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{24}\right)\end{aligned}$$

D_2 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると，

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

に注意して

$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}x-x^2\right) dx$$

求める体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \frac{V_1}{\pi}-\frac{V_2}{\pi} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\,dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{24}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left[\,x-\frac{x^2}{2}\,\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi+\frac{1}{12} = \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\end{aligned}$$

よって　$$\boldsymbol{V=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\right)}$$

3.5　2019 年度

3.5.1　1 番 関数の内積

原点 O，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とし ($\vec{a}\perp\vec{b}$)，平面 OAB 上にない点 P($\vec{p}$) をとる．m, n を実数とするとき　問 解

$$
\begin{aligned}
|\vec{p}-m\vec{a}-n\vec{b}|^2 &= |\vec{p}|^2+m^2|\vec{a}|^2+n^2|\vec{b}|^2-2m\vec{a}\cdot\vec{p}-2n\vec{b}\cdot\vec{p} \\
&= |\vec{a}|^2\left(m-\frac{\vec{a}\cdot\vec{p}}{|a|^2}\right)^2+|\vec{b}|^2\left(n-\frac{\vec{b}\cdot\vec{p}}{|b|^2}\right)^2+|\vec{p}|^2-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{p})^2}{|\vec{a}|^2}-\frac{(\vec{b}\cdot\vec{p})^2}{|\vec{b}|^2} \\
&\geqq |\vec{p}|^2-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{p})^2}{|\vec{a}|^2}-\frac{(\vec{b}\cdot\vec{p})^2}{|\vec{b}|^2} \qquad \cdots(*)
\end{aligned}
$$

ここで，2 つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ の内積

$$\langle f(t),g(t)\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

を定義すると，ベクトルの内積と同様に

$$
\begin{aligned}
\langle f(t),g(t)\rangle &= \langle g(t),f(t)\rangle \\
k\langle f(t),g(t)\rangle &= \langle kf(t),g(t)\rangle=\langle f(t),kg(t)\rangle \quad (k\ \text{は定数}) \\
\langle f(t),g(t)+h(t)\rangle &= \langle f(t),g(t)\rangle+\langle f(t),h(t)\rangle \\
|f(t)|^2 &= \langle f(t),f(t)\rangle
\end{aligned}
$$

が成立する．例えば，

$$
\begin{aligned}
\left\langle 1,t-\frac{1}{2}\right\rangle &= \int_0^1 1\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}\right]_0^1=0, \\
\left|t-\frac{1}{2}\right|^2 &= \int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=\left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1=\frac{1}{12}, \\
\langle 1,\sin 2n\pi t\rangle &= \int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt=-\frac{1}{2n\pi}\Big[\cos 2n\pi t\Big]_0^1=0, \\
\left\langle t-\frac{1}{2},\sin 2n\pi t\right\rangle &= \langle t,\sin 2n\pi t\rangle-\frac{1}{2}\langle 1,\sin 2n\pi t\rangle=\langle t,\sin 2n\pi t\rangle \\
&= \int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt=\left[-\frac{t}{2n\pi}\cos 2n\pi t+\frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi t\right]_0^1=-\frac{1}{2n\pi}, \\
|\sin 2n\pi t|^2 &= \int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\cos 4n\pi t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{4n\pi}\sin 4n\pi t\right]_0^1=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$f(t)-\dfrac{\langle e(t), f(t)\rangle}{|e(t)|^2}e(t)$ は $e(t)$ と直交するから，$t-\dfrac{1}{2}$ は 1 と直交することに注意して

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\sin(2n\pi t)-xt-y)^2\,dt &= |\sin 2n\pi t - xt - y|^2\\ &= \left|\sin 2n\pi t - x\left(t-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{x}{2}+y\right)\right|^2\end{aligned}$$

ここで，$p(t)=\sin 2n\pi t$，$f(t)=t-\dfrac{1}{2}$，$e(t)=1$ とすると，$(*)$ により

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\sin(2n\pi t)-xt-y)^2\,dt &= \left|p(t)-xf(t)-\left(\frac{x}{2}+y\right)e(t)\right|^2\\ &\geqq |p(t)|^2-\frac{\langle f(t), p(t)\rangle^2}{|f(t)|^2}-\frac{\langle e(t), p(t)\rangle^2}{|e(t)|^2}\end{aligned}$$

$(*)$ および前ページの結果から

$$x=\frac{\langle f(t), p(t)\rangle}{|f(t)|^2}=\frac{-\frac{1}{2n\pi}}{\frac{1}{12}}, \qquad \frac{x}{2}+y=\frac{\langle e(t), f(t)\rangle}{|e(t)|^2}=0$$

すなわち，$x=-\dfrac{6}{n\pi}$，$y=\dfrac{3}{n\pi}$ のとき，最小値

$$|p(t)|^2-\frac{\langle f(t), p(t)\rangle^2}{|f(t)|^2}-\frac{\langle e(t), p(t)\rangle^2}{|e(t)|^2}=\frac{1}{2}-\frac{\left(-\frac{1}{2n\pi}\right)^2}{\frac{1}{12}}-0=\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}$$

をとる．

原点 O，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ とし $(\vec{a}\perp\vec{b})$，平面 OAB 上にない点 P$(\vec{p})$ について，ベクトル

$$\vec{h}=\vec{p}-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{p})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}-\frac{(\vec{b}\cdot\vec{p})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

が $\vec{a}$ および $\vec{b}$ と垂直で，$|\vec{p}-m\vec{a}-n\vec{b}|^2$ は $m=\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{p})}{|\vec{a}|^2}$，$n=\dfrac{(\vec{b}\cdot\vec{p})}{|\vec{b}|^2}$ のとき，最小となる．

同様に，$e(t)$ と $f(t)$ が直交するから，関数 (直交関数)

$$h(t)=p(t)-\frac{\langle f(t), p(t)\rangle}{|f(t)|^2}f(t)-\frac{\langle e(t), p(t)\rangle}{|e(t)|^2}e(t)$$

は，$e(t)$ および $f(t)$ と直交する．このとき，$|p(t)-xt-y|^2$ の最小値を与える．

3.5.2　5 番 メビウス変換

補足 $z = i\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $w = \dfrac{z+1}{-z+1}$ に代入すると　問 解

$$w = \frac{i\tan\theta + 1}{-i\tan\theta + 1} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$-\pi < 2\theta < \pi$ より，w は点 -1 を除く原点 O を中心とする単位円周上にある．

解説 一般に，1 次分数式変換 (メビウス変換)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,\ b,\ c,\ d\ \text{は複素数},\ ad - bc \neq 0)$$

は，拡縮 (回転)kz，平行移動 $z + \alpha$，反転 $\dfrac{1}{z}$ の合成変換である．
特に反転に関して，次の性質がある [4]．

- 原点を通らない円は，原点を通らない円に移る．
- 原点を通る円は，原点を通らない直線に移る．
- 原点を通らない直線は，原点を通る円から原点を除いた図形に移る．
- 原点を通る直線は，原点を通る直線から原点を除いた図形に移る．

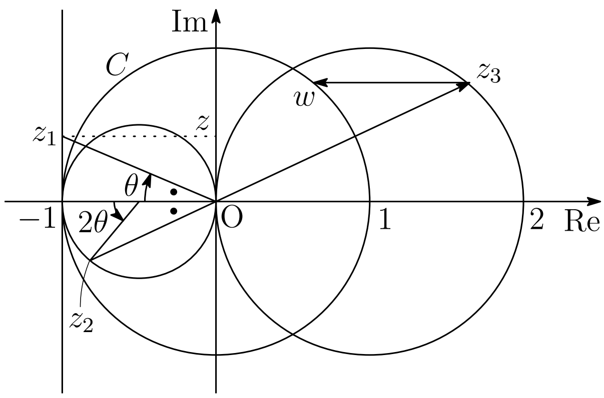
次の変換 (平行移動，反転，拡縮，平行移動)

$$f_1(z) = z - 1, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = -2z, \quad f_4(z) = z - 1$$

について，合成変換 $f(z) = f_4{\circ}f_3{\circ}f_2{\circ}f_1(z)$ は　$f(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$

$z = i\tan\theta$，$z_1 = f_1(z)$，$z_2 = f_2(z_1)$，$z_3 = f_3(z_2)$，$w = f_4(z_3)$ とすると

$$\begin{aligned} z_2 = f_2{\circ}f_1(z) &= \frac{1}{i\tan\theta - 1} = \frac{-\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \\ &= -\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \end{aligned}$$



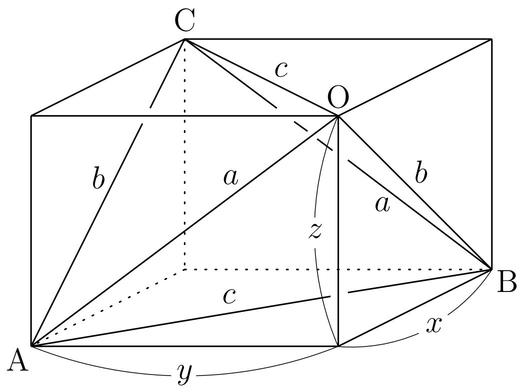
[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf $\boxed{3}$ の解説を参照．

3.6 2020 年度

3.6.1 3 番 等面四面体の体積

等面四面体の体積を V とすると，V は直方体の体積から 4 つの直角四面体を引いたものであるから 問 解

$$
\begin{aligned}
V &= xyz - 4\cdot\frac{1}{6}xyz = \frac{1}{3}xyz = \frac{1}{3}\sqrt{x^2y^2z^2} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}
\end{aligned}
$$



$\alpha = \angle\mathrm{BOC}$，$\beta = \angle\mathrm{COA}$，$\gamma = \angle\mathrm{AOB}$ とすると，余弦定理により

$$
\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}
$$

よって，等面四面体の体積 V は

$$
V = \frac{1}{3}abc\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}
$$

また，一般の四面体 OABC において，$a = \mathrm{OA}$，$b = \mathrm{OB}$，$c = \mathrm{OC}$，$\alpha = \angle\mathrm{BOC}$，$\beta = \angle\mathrm{COA}$，$\gamma = \angle\mathrm{AOB}$ であるとき，その体積は [5]

$$
\frac{1}{6}abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)}
$$

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (p.11)

3.7　2021 年度

3.7.1　3 番 部分積分法の応用

本来，部分積分法　問 解

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x)\\ &\qquad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx\end{aligned}$$

が成立する．$f(x)$ を n 次多項式とし，p ($p \neq 0$)，q を定数とする．

$$\begin{gathered}g'(x) = e^{px+q},\quad g(x) = \frac{e^{px+q}}{p},\quad g^{(-1)}(x) = \frac{e^{px+q}}{p^2},\\ g^{(-2)}(x) = \frac{e^{px+q}}{p^3},\quad g^{(-3)}(x) = \frac{e^{px+q}}{p^4},\cdots, g^{(-n)}(x) = \frac{e^{px+q}}{p^{n+1}}\end{gathered}$$

とおくと

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx = \frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots + (-1)^n\frac{f^{(n)}(x)}{p^n}\right\} + C$$

同様に，整式 $f(x)$ について次式が得られる．

$$\begin{aligned}\int e^{x+q}f(x)\,dx &= e^{x+q}\left\{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\right\} + C\\ \int e^{-x+q}f(x)\,dx &= -e^{-x+q}\left\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\right\} + C\\ \int a^{px+q}f(x)\,dx &= \frac{a^{px+q}}{p\log a}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p\log a} + \frac{f''(x)}{(p\log a)^2} - \frac{f'''(x)}{(p\log a)^3} + \cdots\right\} + C\\ \int a^{x+q}f(x)\,dx &= \frac{a^{-x+q}}{\log a}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{\log a} + \frac{f''(x)}{(\log a)^2} - \frac{f'''(x)}{(\log a)^3} + \cdots\right\} + C\\ \int a^{-x+q}f(x)\,dx &= -\frac{a^{-x+q}}{\log a}\left\{f(x) + \frac{f'(x)}{\log a} + \frac{f''(x)}{(\log a)^2} + \frac{f'''(x)}{(\log a)^3} + \cdots\right\} + C\end{aligned}$$