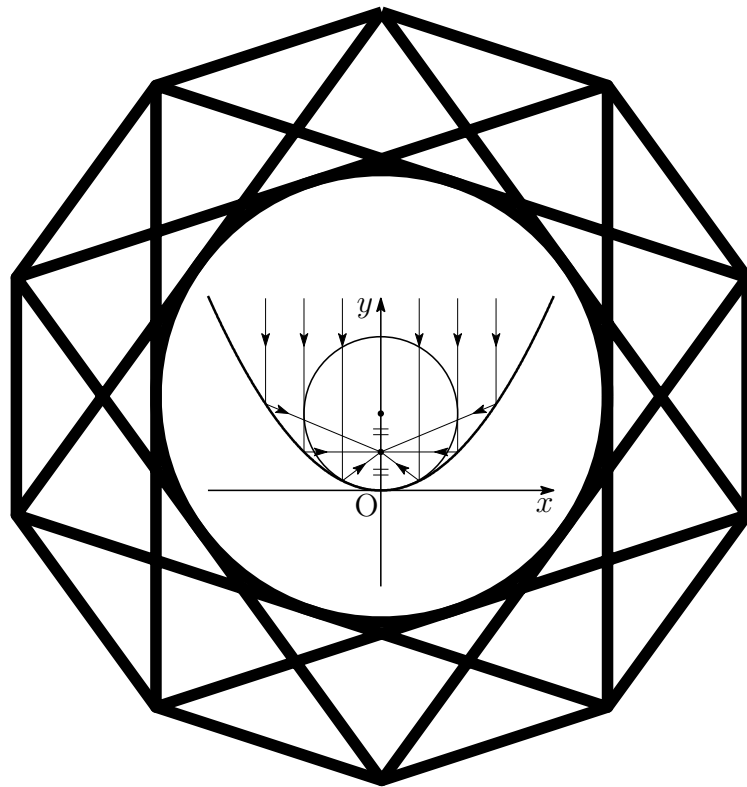


入試の軌跡

九州大学 理系

2015 - 2019

数学



2019 年 10 月 19 日

Typed by L^AT_EX 2_ε

序

本書は，九州大学経済学部(経済工)・理学部・医学部(保健[看護]を除く)・歯学部・薬学部・工学部・芸術工学部・農学部受験者のための入試問題集である。

本書には，平成27年(2015年)度から平成31年(2019年)度までの2次試験前期日程の数学問題をすべて掲載した。第1章には問題を掲載し，第2章には解答，第3章には研究を付けた。

また，平成9年(1997年)から平成31年(2019年)までの一般前期試験問題および解答については，年度ごとに次のサイトに掲載している。

<http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html>

本書の編集にあたり，以下の点に留意した。

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した。
2. 本書は，電子文書(PDF)での利用を想定し，ハイパーリンクを施した。利用する際には，全画面表示(`[Ctrl]+L`)および描画領域に合わせる(`[Ctrl]+3`)と見やすくなる。ページスクロールには，(`[Ctrl]+▲`)，(`[Ctrl]+▼`)が利用でき，リンク(ジャンプ)先から戻る(`[Alt]+◀`)，進む(`[Alt]+▶`)も利用できる。なお，全画面表示を解除するには`[ESC]`。
3. 平成13年(2001年)度から平成26年(2014年)度までの旧課程の一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡 九州大学 理系』は，次である。

http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf

4. また，本書の姉妹版である『入試の軌跡 九州大学 英語』も次のサイトに掲載しており，併せて活用いただけることを切に願うものである。

<http://kumamoto.s12.xrea.com/lis.html>

令和元年6月 編者

目次

序	i
第1章 一般前期問題	1
1.1 2015年度	5
1.2 2016年度	7
1.3 2017年度	10
1.4 2018年度	13
1.5 2019年度	14
第2章 一般前期解答	17
2.1 2015年度	18
2.2 2016年度	23
2.3 2017年度	29
2.4 2018年度	36
2.5 2019年度	43
第3章 一般前期研究	51
3.1 2015年度	52
3.1.1 4番(3)研究	52
3.1.2 5番(2) ユークリッドの互除法	54
3.2 2016年度	55
3.2.1 2番(4) 外積(ベクトル積)	55
3.2.2 3番 マルコフ連鎖	56
3.2.3 5番(3) 発展	57
3.3 2017年度	58
3.3.1 3番(2)(3) 別解	58
3.4 2018年度	59
3.4.1 1番 双曲線の媒介変数表示	59
3.4.2 2番(3) 研究	60
3.5 2019年度	65
3.5.1 1番 関数の内積	65
3.5.2 5番 メビウス変換	67

第 1 章 一般前期問題

2003 年度以前の入試は，必答問題 3 題と，選択問題 3 題を 1 グループとした 2 グループから 1 題ずつ選んで 150 分で解答する形式であった．2004 年度入試以降は選択問題はなくなり，必答問題 5 題を 150 分で解答する現在の形式になった．

九大入試の特徴として，教科書にある公式の証明問題，教科書の典型的な問題についても確かな理解と応用力を問う問題が出題される．一方で，大学数学で扱う基本的な概念に因んだ問題が出題されることがあり，理学部数学教室や経済学部経済工学科らしさ(確率論)が随所に見られる．2009 年度入試においては，5 題中 2 題が微分幾何学の基本的な概念に由来するものであった．

2005 年度まで出題されていた複素数平面が 2015 年度から復活することになり，当時の頻出問題であったこと，比較的難易度が高かったことにも注意しておきたい．とくに，2014 年度入試においては，来年度からの新課程を意識した整数問題が出題されている．ユークリッドの互除法や合同式についても学習しておく必要があるようだ．

平成 26 年 3 月 編者

平成 28 年(2016 年)に現行課程へ完全移行し，移行後の出題を見ると，11 年ぶりに復活した「複素数平面」，新たに導入された「整数の性質」の分野から毎回出題された．合同式を用いる問題が毎回出題されており，重点的に学習しておく必要がある．かつて，「複素数平面」は，1997 年から 2005 年の教育課程における入学試験でも出題されていた．特に九州大学の「複素数平面」の出題率は高く，2004 年を除き毎回出題された．当時の九州大学の同分野の問題は良問が多く，学習教材としても優れている．これらの問題はすべて序文に示したサイトから入手することができる．

過去の出題からも分かるように，「場合の数と確率」「微積分」は重要分野である．

平成 30 年 9 月 編者

出題分野

2015年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学II	微分法と積分法	放物線と直線で囲まれた部分の面積
2	標準	数学III	積分法	定積分と不等式の証明
3	標準	数学III	積分法の応用	半球の影の面積・体積
4	標準	数学A	場合の数と確率	袋の中の赤玉と青玉の個数の推移
5	やや難	数学A	整数の性質	合同式, ユークリッドの互除法

2016年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学III	極限	極限值
			積分法	面積
2	標準	数学A	図形の性質	チェバの定理, メネラウスの定理
3	やや易	数学A	確率	マルコフ連鎖
4	標準	数学A	整数の性質	合同式
5	標準	数学III	複素数平面	ド・モアブルの定理

2017年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学III	微分法とその応用	接線の傾き
			積分法の応用	2曲線で囲まれた部分の面積
2	標準	数学B	空間のベクトル	2つのベクトルのなす角
3	やや難	数学A	整数の性質	合同式
		数学B	数列	等差数列 $\{a_n\}$ の $7, 7^2$ の倍数の個数
4	標準	数学A	場合の数と確率	確率漸化式
5	標準	数学III	複素数平面	ド・モアブルの定理

2018年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学III	関数	双曲線の媒介変数表示
2	標準	数学III	積分法の応用	面積, 回転体の体積
3	標準	数学A	場合の数と確率	確率漸化式
4	標準	数学A	整数の性質	3次方程式の整数解・有理数解
5	標準	数学III	複素数平面	複素係数の方程式

2019年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学 III	極限	定積分・極限值
2	やや難	数学 II	式と証明	恒等式
3	標準	数学 A	確率	サイコロの目と2次方程式の係数
		数学 III	複素数平面	複素数平面上的2次方程式の解
4	標準	数学 III	極限	数列の極限
5	やや難	数学 III	複素数平面	1次分数式変換(メビウス変換)

出題分野 (2010-2019)

		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2次関数			3							
	図形と計量	1									
	データの分析										
II	式と証明										2
	複素数と方程式										
	図形と方程式					3					
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法						1				
III	式と曲線					3				1	
	複素数平面							5	5	5	3・5
	関数										
	極限	3		3・4	1			1			1・4
	微分法とその応用	3	2			1			1		
	積分法						2				
	積分法の応用	4	1	1	1・4	1	3	1	1	2	
A	場合の数と確率	2	5	5	3	4*	4	3	4	3	3
	整数の性質					2	5	4	3	4	
	図形の性質							2			
B	平面上のベクトル										
	空間のベクトル		4		2				2		
	数列		3	5					3		
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	5		2	5						

数字は問題番号 (* は旧課程の内容を含む)

1.1 2015 年度

1 C_1, C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$C_2 : y = -x^2 - 2x, \quad -2 \leq x \leq 0$$

また、 a を実数とし、直線 $y = a(x + 4)$ を l とする。

(1) 直線 l と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下、 a が (1) の条件を満たすとする。このとき、 l と C_1 で囲まれた部分の面積を S_1 、 x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \frac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分 $\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$ を求めよ。

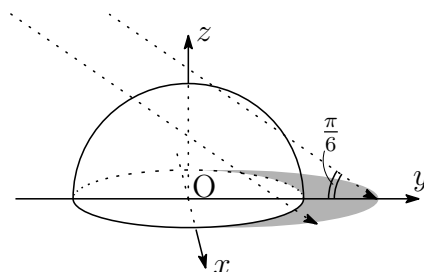
(3) n を 3 以上の整数とするとき、不等式

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$$

が成り立つことを示せ。

3 座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。下の概略図のように、 y 軸の負の方向から仰角 $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0, \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 球の $z \geq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。 k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき、 xy 平面上の直線 $x = k$ において、球の外で光が当たらない部分の y 座標を k を用いて表せ。
- (2) xy 平面上において、球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。
- (3) $z \geq 0$ において、球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。



4 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を 1 枚もらう。

- (1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。
- (2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。
- (3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。 研
- (4) 8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

5 以下の問いに答えよ。

- (1) n が正の偶数のとき、 $2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。
- (2) n を自然数とする。 $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。 研
- (3) p, q を異なる素数とする。 $2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p, q の組をすべて求めよ。

1.2 2016 年度

1 座標平面上の曲線 C_1 , C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$

$$C_2 : y = (x - 1)(x - a)$$

とする。ただし、 a は実数である。 n を自然数とすると、曲線 C_1 , C_2 が 2 点 P , Q で交わり、 P , Q の x 座標はそれぞれ 1 , $n + 1$ となっている。また、曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n , 曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域を T_n とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を n の式で表し、 $a > 1$ を示せ。
- (2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において、辺 AB , BC , CA をそれぞれ $2 : 1$, $t : 1 - t$, $1 : 3$ に内分する点を D , E , F とする。また、 AE と BF , BF と CD , CD と AE の交点をそれぞれ P , Q , R とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 3 直線 AE , BF , CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下、 t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

- (2) $AP = kAE$, $CR = \ell CD$ を満たす実数 k , ℓ をそれぞれ求めよ。
- (3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。
- (4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

研

3 座標平面上で円 $x^2 + y^2 = 1$ に内接する正六角形で、点 $P_0(1, 0)$ を1つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 とする。ある頂点に置かれている1枚のコインに対し、1つのサイコロを1回投げ、出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。 研

- (規則) (i) 1から5までの目が出た場合は、出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。例えば、コインが P_4 にあるとき4の目が出た場合は P_2 まで動かす。
- (ii) 6の目が出た場合は、 x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし、コインが x 軸上にあるときは動かさない。例えば、コインが P_5 にあるときに6の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを1枚だけ P_0 に置き、1つのサイコロを続けて何回か投げて、1回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 2回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。
- (2) 3回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。
- (3) n を自然数とする。 n 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

4 自然数 n に対して、 10^n を13で割った余りを a_n とおく。 a_n は0から12までの整数である。以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} は $10a_n$ を13で割った余りに等しいことを示せ。
- (2) a_1, a_2, \dots, a_6 を求めよ。
- (3) 以下の3条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。
 - (i) N を十進数で表示したとき6桁となる。
 - (ii) N を十進数で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと2016となる。
 - (iii) N は13で割り切れる。

5 以下の問いに答えよ。

- (1) θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数, i を虚数単位とし, z を $z = \cos \theta + i \sin \theta$ で表される複素数とする。このとき, 整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$$

- (2) 次の方程式を満たす実数 x ($0 \leq x < 2\pi$) を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

- (3) 次の式を証明せよ。

研

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

1.3 2017年度

1 定数 $a > 0$ に対し, 曲線 $y = a \tan x$ の $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の部分を C_1 , 曲線 $y = \sin 2x$ の $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ。
- (2) a が (1) の条件を満たすとき, 原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし, P の x 座標を p とする。 P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき, a および $\cos 2p$ の値を求めよ。
- (3) a が (2) で求めた値のとき, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 2つの定数 $a > 0$ および $b > 0$ に対し, 座標空間内の4点を

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, 1), D(a, b, 1)$$

と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。 G の座標を a, b を用いて表せ。
- (2) さらに, 点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。 \overrightarrow{AG} と \overrightarrow{BH} がなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ を a, b を用いて表せ。

3 初項 $a_1 = 1$, 公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

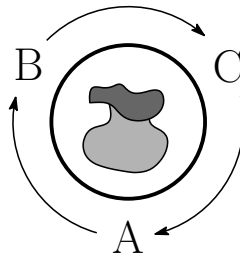
- (1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち, 7 の倍数である項の個数を求めよ。
- (2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち, 7^2 の倍数である項の個数を求めよ。 研
- (3) 初項から第 n 項までの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

4 赤玉2個, 青玉1個, 白玉1個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A, B, C の3人がこの順番で時計回りに着席している。3人のうち, ひとりが袋から玉を1個取り出し, 色を確認したら袋にもどす操作を考える。1回目は A が玉を取り出し, 次のルール (a), (b), (c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。

- (a) 赤玉を取り出したら, 取り出した人を勝者とする。
- (b) 青玉を取り出したら, 次の回も同じ人が玉を取り出す。
- (c) 白玉を取り出したら, 取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

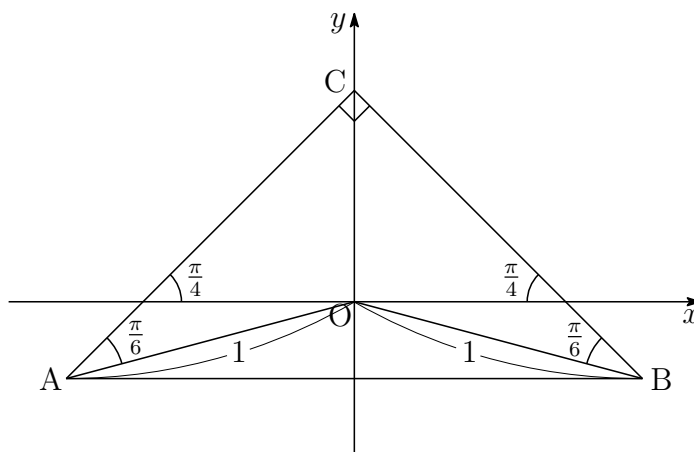
A, B, C の3人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n ($n = 1, 2, \dots$) とする。ただし, $a_1 = 1, b_1 = c_1 = 0$ である。以下の問いに答えよ。

- (1) A が4回目に勝つ確率と7回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。
- (2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくとき, d_n を求めよ。
- (3) 自然数 $n \geq 3$ に対し, a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。



5 2つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ を用いて、複素数平面上の点 $P_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ ($n = 1, 2, \dots$) により定める。ただし、 i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として、以下の問いに答えよ。

- (1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。
- (2) $|z_n| \leq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。
- (3) 下図のように、複素数平面上の $\triangle ABC$ は線分 AB を斜辺とし、点 $C\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を一つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお A, B を表す複素数の虚部は負であり、原点 O と 2 点 A, B の距離はともに 1 である。点 P_n が $\triangle ABC$ の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



1.4 2018年度

1 座標空間において、 xy 平面上にある双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のうち $x \geq 1$ を満たす部分を C とする。また、 z 軸上の点 $A(0, 0, 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき、直線 AP と平面 $x = d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし、 d は正の定数とする。 研

2 原点を中心とする半径3の半円 $C: x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0)$ 上の2点 P と Q に対し、線分 PQ を2:1に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。 研

(1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく、かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき、線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。

(2) 点 P を $(-3, 0)$ に固定する。 Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。

(3) (1)の図形 S から(2)の図形 T を除いた図形と第1象限の共通部分を U とする。 U を y 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積を求めよ。

3 1から4までの数字を1つずつ書いた4枚のカードが箱に入っている。箱の中から1枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。 k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし、積 $X_1 X_2 \cdots X_n$ を4で割った余りが0, 1, 2, 3である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。 p_n, q_n, r_n, s_n を求めよ。

4 整数 a, b は3の倍数ではないとし、

$$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(1)$ と $f(2)$ を3で割った余りをそれぞれ求めよ。

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。

(3) $f(x) = 0$ を満たす有理数 x が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。

5 α を複素数とする。等式

$$\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\bar{z} = 0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし、 i は虚数単位である。

1.5 2019年度

- 1 n を自然数とする。 x, y がすべての実数を動くとき、定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt$$

の最小値を I_n とおく。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

研

- 2 0 でない 2 つの整式 $f(x), g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$\begin{aligned} f(x^2) &= (x^2 + 2)g(x) + 7 \\ g(x^3) &= x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。
 - (2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。
- 3 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とする。2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの解 z_1, z_2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ $P_1(z_1), P_2(z_2)$ とする。また、複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

- (1) P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。
 - (2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。
 - (3) P_1 と O を通る直線を l_1 とし、 P_2 と O を通る直線を l_2 とする。 l_1 と l_2 のなす鋭角が 60° である確率を求めよ。
- 4 座標平面上の 3 点 $O(0, 0), A(2, 0), B(1, \sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり、 A, B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 P_2, P_3, \dots を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき、点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし、点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし、点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \rightarrow \infty$ のとき、 P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

- 5 a, b を複素数, c を純虚数でない複素数とし, i を虚数単位とする。複素数平面において, 点 z が虚軸全体を動くとき 研

$$w = \frac{az + b}{cz + 1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

- (ア) $z = i$ のときに $w = i$ となり, $z = -i$ のときに $w = -i$ となる。
- (イ) C は単位円の周に含まれる。
- (ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a, b, c の値を求めよ。さらに C を求め, 複素数平面上に図示せよ。

第 2 章 一般前期解答

問題冊子 (A4 で 12 ページ) は、見開きで問題が偶数ページ、下書き (計算スペース) が奇数ページに配置されており、問題ページの下側の余白を含め十分な計算スペースがある。解答用紙は、**26**～**30**の番号が書かれた 5 枚の A3 用紙がはさみ込まれており、問題**1**～**5**を順次指定された解答用紙に答えるようになっている。

設問ごとに解答欄が仕切られているため、十分な解答スペースではなく、途中の計算などを書いていくスペースはない (解答用紙の裏面の使用は不可)。そのため、問題用紙の下書き欄で計算した結果を整理して「理由と計算結果・結論」を明示する必要がある。なお、問題冊子は、試験終了後に持ち帰ることができる。

出題者は受験生に簡潔な表現力を要求したものと考えられる。理学部数学科の採点担当者からも、定積分の途中計算などを細かく書く必要はないと聞いた。

対策

1. 標準的な問題を中心に 3 題とやや難の 2 題が例年の出題傾向である。配点はすべて 50 点ずつの計 250 点であるので 150 分で効率的に問題を解いていく必要がある。なお、経済学部経済工学科は 300 点満点に換算される。
2. 完答が難しい問題についても、前半の設問はどれも基本または標準的な問題が配置されているので、確実に部分点を狙っていく必要がある。しかしながら、近年の傾向として、2018 年度は**1**、**3**、**5**、2019 年度は**1**、**4**、**5**が大問のみの問題設定であったことに注意したい。
3. 九州大学では、完答できていない答案について、途中までの計算が正しいもの、また理論的な展開が間違っていないものについては加点されるそうである。特に大問中心の出題になった傾向を踏まえると、採点者が読みやすい簡潔な答案の作成を普段から練習しておく必要がある。

2.1 2015年度

1 (1) $y = -x^2 + 2x$ と $y = a(x + 4)$ から y を消去すると

$$-x^2 + 2x = a(x + 4) \quad \text{すなわち} \quad x^2 + (a - 2)x + 4a = 0 \quad \dots (*)$$

C_1 と ℓ が接するとき, (*) より

$$(a - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4a = 0, \quad 0 < -\frac{a - 2}{2 \cdot 1} < 2$$

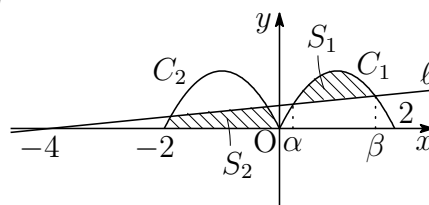
上の第1式および第2式から

$$a = 10 \pm 4\sqrt{6}, \quad -2 < a < 2 \quad \text{すなわち} \quad a = 10 - 4\sqrt{6}$$

よって, 求める a の値の範囲は $0 \leq a < 10 - 4\sqrt{6}$

(2) 方程式(*)の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -(a - 2), & \alpha\beta &= 4a, \\ \beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{a^2 - 20a + 4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad S_1 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + 2x) - a(x + 4)\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 + (a - 2)x + 4a\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(a^2 - 20a + 4)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(3) $y = -x^2 - 2x$ と $y = a(x + 4)$ から y を消去すると

$$-x^2 - 2x = a(x + 4) \quad \text{すなわち} \quad x^2 + (a + 2)x + 4a = 0 \quad \dots (**)$$

方程式(**)の解を γ, δ とすると ($\gamma < \delta$)

$$\begin{aligned} \gamma + \delta &= -(a + 2), & \gamma\delta &= 4a, \\ \delta - \gamma &= \sqrt{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta} = \sqrt{a^2 - 12a + 4} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-2}^0 \{-x^2 - 2x\} dx + \int_{\gamma}^{\delta} \{-x^2 - 2x - a(x+4)\} dx \\ &= -\int_{-2}^0 x(x+2) dx - \int_{\gamma}^{\delta} (x-\gamma)(x-\delta) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 - \frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}(a^2 - 12a + 4)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$S_1 = S_2 \text{ より } \frac{1}{6}(a^2 - 20a + 4)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}(a^2 - 12a + 4)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{整理すると } (a^2 - 20a + 4)^{\frac{3}{2}} + (a^2 - 12a + 4)^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$$

ここで, $f(a) = (a^2 - 20a + 4)^{\frac{3}{2}} + (a^2 - 12a + 4)^{\frac{3}{2}} - 8$ とおくと

$$f(0) = 8 > 0, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{41\sqrt{41} - 999}{125} < \frac{41 \cdot 7 - 999}{125} < 0,$$

$$10 - 4\sqrt{6} = 2(5 - 2\sqrt{6}) = \frac{2}{5 + 2\sqrt{6}} > \frac{2}{5 + 5} = \frac{1}{5}$$

$f(a)$ は連続であるから, 中間値の定理により, $f(a) = 0$, すなわち $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \frac{1}{5}$ の範囲に存在する. ■

2 (1) $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ を微分すると $y' = -\frac{\log x + 2x}{x^2(\log x)^3}$

したがって, $x > 1$ において $y' < 0$

よって, $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において, 単調減少.

$$(2) \int \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \int \frac{(\log x)'}{(\log x)^2} dx = -\frac{1}{\log x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

別解 $t = \log x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ であるから

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\log x} + C$$

(3) (1), (2) の結果から, n が 3 以上の整数であるとき

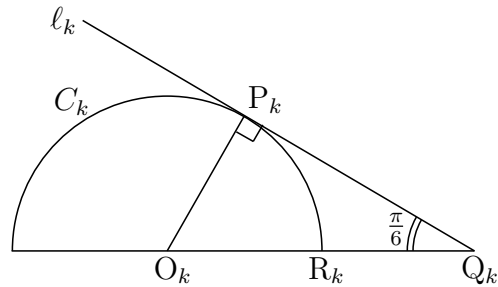
$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} &= \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k(\log k)^2} dx \\ &< \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\log x} \right]_2^n = -\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log 2} < \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$

■

- 3 (1) 球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の $z \geq 0$ の部分の平面 $x = k$ ($-1 < k < 1$) による断面の表す図形は、中心 $O_k(k, 0, 0)$ 、半径 $\sqrt{1 - k^2}$ の半円

$$y^2 + z^2 = 1 - k^2 \quad (-1 < k < 1), \quad z \geq 0$$

この半円を C_k とし、 C_k 上の点を $R_k(k, \sqrt{1 - k^2})$ とする。方向ベクトルが $(0, \sqrt{3}, -1)$ で C_k に接する直線を l_k とし、 l_k と C_k の接点を P_k 、 l_k と xy 平面との共有点を Q_k とすると



$$\begin{aligned} O_k R_k &= O_k P_k = \sqrt{1 - k^2} \\ O_k Q_k &= 2 O_k P_k = 2\sqrt{1 - k^2} \end{aligned}$$

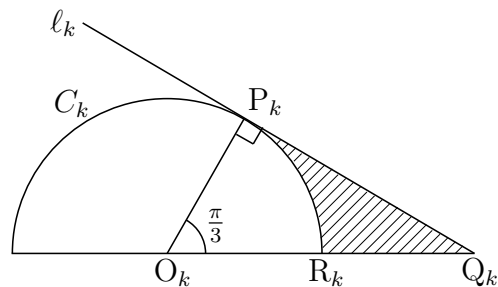
よって $\sqrt{1 - k^2} \leq y \leq 2\sqrt{1 - k^2}$

- (2) (1) の結果から $R_k Q_k = O_k Q_k - O_k R_k = \sqrt{1 - k^2}$

よって $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - k^2} dk = \frac{\pi}{2}$

- (3) 右の図の斜線部分の面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} O_k P_k \cdot P_k Q_k - \frac{1}{2} O_k R_k^2 \cdot \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - k^2) - \frac{\pi}{6} (1 - k^2) \\ &= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} (1 - k^2) \end{aligned}$$



よって、求める体積を V とすると

$$V = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} \int_{-1}^1 (1 - k^2) dk = \frac{6\sqrt{3} - 2\pi}{9}$$



- 4 (1) 求める確率は、2回連続して赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

- (2) 1回の操作で青玉の個数は1個だけ増減する．最初に青玉が1個(奇数個)であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が3個(奇数個)にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．
- (3) 偶数回目の操作で青玉の個数は1個または3個であるから，2回目の操作で青玉が1個である確率を p とすると，(1)の結果から 研

$$p = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

8回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$ppp(1-p) = p^3(1-p) = \left(\frac{7}{9}\right)^3 \frac{2}{9} = \frac{686}{6561}$$

- (4) 青玉3個の状態から，2回連続して青玉を取り出す確率を q とすると

$$q = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2回目の操作のときに限り，硬貨を1枚もらう確率は

$$(1-p)qpp = p^2(1-p)q$$

4回目の操作のときに限り，硬貨を1枚もらう確率は

$$p(1-p)qp = p^2(1-p)q$$

6回目の操作のときに限り，硬貨を1枚もらう確率は

$$pp(1-p)q = p^2(1-p)q$$

上式および(3)の結果から

$$\begin{aligned} 3 \times p^2(1-p)q + p^3(1-p) &= 2p^2(1-p) + p^3(1-p) \\ &= p^2(1-p)(2+p) \\ &= \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{25}{9} = \frac{2450}{6561} \end{aligned}$$



- 5 (1) n が正の偶数のとき, $\frac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

よって, $2^n - 1$ は3の倍数である.

- (2) n が自然数のとき, $2^n - 1$ は奇数である. 研

- i) $n = 1$ のとき, $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である.
ii) $n \geq 2$ のとき

$$2^n + 1 = 1(2^n - 1) + 2$$

上式より, $2^n + 1$ を $2^n - 1$ で割った余りは2.

$2^n - 1$ を2で割った余りは1であるから, ユークリッドの互除法により, $2^n + 1$ と $2^n - 1$ の最大公約数は1である.

よって, $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である.

- (3) $2^{p-1} - 1 = pq^2$ (p, q は異なる素数) $\cdots (*)$

(*) について, $p = 2$ のとき $1 = 2q^2$

これを満たす素数 q は存在しない.

$p \neq 2$ となり, p は奇素数であるから, $\frac{p-1}{2}$ は自然数である.

(1) の結果から, $2^{p-1} - 1$ は3の倍数であるから, pq^2 は3を因数にもつ.

- i) $p = 3$ のとき, (*) より $3 = 3q^2$

q は素数であるから, 不適.

- ii) $q = 3$ のとき, (*) より

$$2^{p-1} - 1 = 9p \quad \text{ゆえに} \quad (2^{\frac{p-1}{2}} + 1)(2^{\frac{p-1}{2}} - 1) = 9p$$

i) より, 奇素数 p は $p \geq 5$ であること, (2) の結果から, $2^{\frac{p-1}{2}} + 1$ と $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は互いに素であることに注意して

$$(A) \begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = 9 \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = p \end{cases} \quad \text{または} \quad (B) \begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = p \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 9 \end{cases}$$

(A) を解いて, $p = 7$. (B) の第2式を満たす奇素数 p は存在しない.

よって $(p, q) = (7, 3)$ ■

2.2 2016 年度

- 1 (1) C_1 と C_2 の交点 Q の x 座標が $n+1$ であるから

$$\log(n+1) = (n+1-1)(n+1-a)$$

$n \neq 0$ であるから

$$a = n+1 - \frac{\log(n+1)}{n}$$

$$\text{上式より } a-1 = \frac{n^2 - \log(n+1)}{n}$$

$$\text{ここで } \int_0^n \frac{t}{t+1} dt = \left[t - \log(t+1) \right]_0^n = n - \log(n+1) > 0$$

$$\text{上の2式から } a-1 = \frac{n^2 - \log(n+1)}{n} > \frac{n^2 - n}{n} = n-1 \geq 0$$

よって $a > 1$

$$\begin{aligned} (2) S_n &= \int_1^{n+1} \log x dx - \frac{1}{2} \{(n+1) - 1\} \log(n+1) \\ &= \left[x \log x - x \right]_1^{n+1} - \frac{n}{2} \log(n+1) = \frac{n+2}{2} \log(n+1) - n \end{aligned}$$

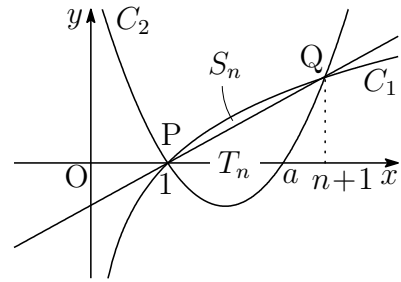
C_2 の x^2 の係数および2点 P , Q の x 座標に注意して

$$T_n = \frac{1}{6} \{(n+1) - 1\}^3 = \frac{1}{6} n^3$$

- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n \log T_n} &= \frac{\frac{n+2}{2} \log(n+1) - n}{n \log \frac{n^3}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \log(n+1) - 1}{3 \log n - \log 6} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \{\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\} - 1}{3 \log n - \log 6} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \left\{1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\} - \frac{1}{\log n}}{3 - \frac{\log 6}{\log n}} \end{aligned}$$

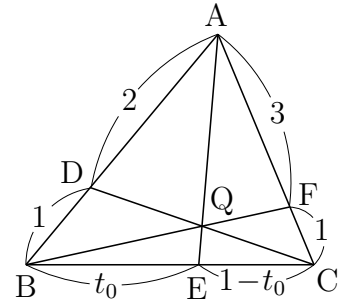
$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log T_n} = \frac{\left(\frac{1}{2} + 0\right) (1 + 0) - 0}{3 - 0} = \frac{1}{6}$$



2 (1) チェバの定理により

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

これを解いて $t_0 = \frac{3}{5}$

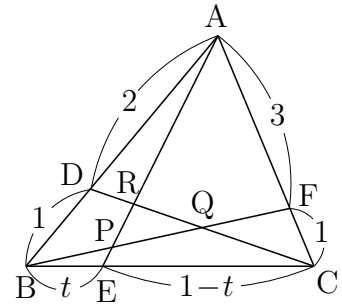


(2) $\triangle AEC$ および直線 BF について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AP}{PE} \cdot \frac{t}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

したがって $\frac{AP}{PE} = \frac{3}{t}$

よって $k = \frac{AP}{AE} = \frac{3}{3+t}$



$\triangle BCD$ および直線 AE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DA}{AB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

したがって $\frac{CR}{RD} = \frac{3(1-t)}{2t}$

よって $\ell = \frac{CR}{CD} = \frac{3(1-t)}{3(1-t)+2t} = \frac{3(1-t)}{3-t}$

(3) (2) の図について、 $\triangle BCF$ および直線 AE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CA}{AF} \cdot \frac{FP}{PB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{FP}{PB} = 1$$

したがって $\frac{FP}{PB} = \frac{3(1-t)}{4t} \quad \dots \textcircled{1}$

$t = \frac{3}{5}$ のとき、 P は Q に一致するので $\frac{FQ}{QB} = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$

よって $\triangle BCQ = \frac{2}{3} \triangle BCF = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

(4) $t = \frac{3}{5}$ のとき, R は Q に一致するので, (2) の結果から

研

$$\frac{CQ}{CD} = \frac{3\left(1 - \frac{3}{5}\right)}{3 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

したがって $CQ : QR = \frac{1}{2} : \frac{3(1-t)}{3-t} - \frac{1}{2} = 3-t : 3-5t$

また, ①, ② から

$$BQ : PQ = \frac{2}{3} : \frac{3(1-t)}{3(1-t)+4t} - \frac{1}{3} = 3+t : 3-5t$$

$\triangle BCQ : \triangle PQR = BQ \cdot CQ : PQ \cdot QR$ であるから

$$\triangle BCQ : \triangle PQR = (3+t)(3-t) : (3-5t)^2$$

(3) の結果から $\triangle PQR = \frac{1}{6} \times \frac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)} = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}$ ■

3 (1) n 回サイコロ投げた後に, コインが P_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) の位置にある確率を $P_i(n)$ とすると

研

$$\begin{aligned} P_0(n+1) &= \frac{1}{6}P_0(n) + \frac{1}{6}P_1(n) + \frac{1}{6}P_2(n) + \frac{1}{6}P_3(n) + \frac{1}{6}P_4(n) + \frac{1}{6}P_5(n) \\ &= \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n)\} \end{aligned}$$

自然数 n に対して $P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n) = 1$

したがって $P_0(n) = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6} \dots (*)$

よって, 求める確率は $\frac{1}{6}$

(2) (*) より, 求める確率は $\frac{1}{6}$

(3) (*) より, 求める確率は $\frac{1}{6}$ ■

4 (1) 仮定から $10^n \equiv a_n, 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第1式から $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって $a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より $a_1 = 10$

(1)の結果を用いると、法13について

$$a_2 \equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9$$

$$a_3 \equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12$$

$$a_4 \equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3$$

$$a_5 \equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4$$

$$a_6 \equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1$$

よって $a_2 = 9, a_3 = 12, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 1$

(3) 整数 p, q を $1 \leq p \leq 9, 0 \leq q \leq 9$ とし、求める自然数 N を

$$N = p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

とおくと、法13に関して

$$N \equiv p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

$$\equiv p \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 9 + 6 \cdot 10 + q = 4p + q + 75$$

$$\equiv 4p + q - 3$$

このとき、 $N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 (p, q) の組は

$$(p, q) = (2, 8), (3, 4), (4, 0), (5, 9), (6, 5), (7, 1), (9, 6)$$

よって、求める自然数 N は

$$220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166$$



5 (1) ド・モアブルの定理により

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad \frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i \sin n\theta \quad \cdots (*)$$

(*) の辺々を加えると

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos n\theta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$$

(*) の辺々を引くと

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$$

(2) (1) の結果から

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 1$$

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$t = z + \frac{1}{z}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1}{2}t, \quad \cos 2x = \frac{1}{2}t^2 - 1, \quad \cos 3x = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

これらを $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ に代入すると

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \right) = 1$$

整理すると $t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$ ゆえに $(t-1)(t+2)(t-2) = 0$

これを解いて $t = 1, -2, 2$ したがって $\cos x = \frac{1}{2}, -1, 1$

$0 \leq x < 2\pi$ であるから $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

(3) (1)の結果から

研

$$\sin^2 n\theta = \left\{ -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right) \right\}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}} \right)$$

 $\theta = 20^\circ$ とすると, $z^{18} = 1$ であるから

$$(z^2 - 1)(z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1) = 0$$

 $z^2 \neq 1$ であるから $z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1 = 0$

$$\text{また, } z \neq 0 \text{ であるから } \sum_{n=1}^4 \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}} \right) = -1$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \sum_{n=1}^4 \sin^2 n\theta &= \sum_{n=1}^4 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}} \right) \right\} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\text{よって } \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

$$\text{別解 } \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \text{ および } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ により}$$

$$\begin{aligned} &\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ \\ &= \frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ}{2} \end{aligned}$$

方程式 $\cos 3\theta + \frac{1}{2} = 0$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) の解は $\theta = 40^\circ, 80^\circ, 160^\circ$

ここで, $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ であるから, 方程式

$$4\cos^3 \theta - 3\cos \theta + \frac{1}{2} = 0 \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

の解と係数の関係により $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$

$$\text{よって } \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

補足 また, 解と係数の関係により $\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\frac{1}{8}$ ■

2.3 2017年度

- 1 (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $y = a \tan x$ と $y = \sin 2x$ から y を消去すると

$$a \tan x = \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sin 2x}{\tan x} = 2 \cos^2 x \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき, $0 < 2 \cos^2 x < 2$ より $0 < a < 2$

- (2) $f(x) = a \tan x$, $g(x) = \sin 2x$ とおいて, これらを微分すると

$$f'(x) = \frac{a}{\cos^2 x}, \quad g'(x) = 2 \cos 2x$$

交点 P の x 座標が p であるから, ① より $a = 2 \cos^2 p \quad \dots \textcircled{2}$

$$f'(p)g'(p) = -1 \text{ であるから} \quad \frac{a}{\cos^2 p} \times 2 \cos 2p = -1$$

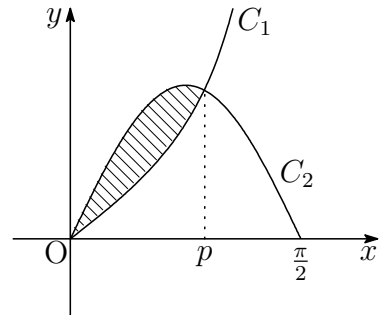
② を上式に代入すると

$$\frac{2 \cos^2 p}{\cos^2 p} \times 2 \cos 2p = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \cos 2p = -\frac{1}{4}$$

$$\text{したがって} \quad a = 2 \cos^2 p = \cos 2p + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

- (3) 求める面積は右の図の斜線部分であるから, その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \left(\sin 2x - \frac{3}{4} \tan x \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{4} \log |\cos x| \right]_0^p \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2p + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \log |\cos p| \end{aligned}$$



ここで, (2) の結果から $\log |\cos p| = \frac{1}{2} \log \cos^2 p = \frac{1}{2} \log \frac{3}{8}$

$$\text{よって} \quad S = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \log \frac{3}{8} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \log \frac{3}{8} \quad \blacksquare$$

2 (1) $A(a, 0, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(a, b, 1)$ より

$$\vec{CA} = (a, 0, -1), \quad \vec{CD} = (a, b, 0)$$

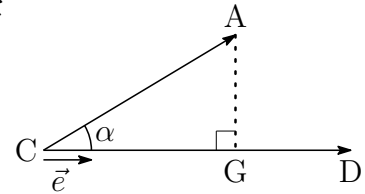
$$\text{したがって} \quad \vec{CG} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CD}}{|\vec{CD}|^2} \vec{CD} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} (a, b, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \vec{OG} &= \vec{OC} + \vec{CG} = (0, 0, 1) + \frac{a^2}{a^2 + b^2} (a, b, 0) \\ &= \left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}, 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad G \left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}, 1 \right)$$

補足 \vec{CA} と \vec{CD} のなす角を α とし, 単位ベクトル \vec{e} を

$$\vec{e} = \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} \quad \dots \textcircled{1}$$



とすると, A から CD に下ろした垂線と CD の交点 G について

$$\vec{CG} = (|\vec{CA}| \cos \alpha) \vec{e} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{また, } \cos \alpha = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CD}}{|\vec{CA}| |\vec{CD}|} \text{ であるから } |\vec{CA}| \cos \alpha = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CD}}{|\vec{CD}|}$$

$$\text{これと } \textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると } \vec{CG} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CD}}{|\vec{CD}|^2} \vec{CD}$$

(2) B(0, b, 0) から, $\overrightarrow{CB} = (0, b, -1)$ であるから, (1) と同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OC} + \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|^2} \overrightarrow{CD} \\ &= (0, 0, 1) + \frac{b^2}{a^2 + b^2} (a, b, 0) = \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{b^3}{a^2 + b^2}, 1 \right)\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2}, 1 \right) - (a, 0, 0) \\ &= \left(-\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2}, 1 \right), \\ \overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} = \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{b^3}{a^2 + b^2}, 1 \right) - (0, b, 0) \\ &= \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, -\frac{a^2b}{a^2 + b^2}, 1 \right)\end{aligned}$$

$\vec{u} = (a^2 + b^2)\overrightarrow{AG}$, $\vec{v} = (a^2 + b^2)\overrightarrow{BH}$ とおくと

$$\vec{u} = (-ab^2, a^2b, a^2 + b^2), \quad \vec{v} = (ab^2, -a^2b, a^2 + b^2)$$

$$\begin{aligned}\text{したがって} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} &= -a^2b^4 - a^4b^2 + (a^2 + b^2)^2 \\ &= (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - a^2b^2), \\ |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 &= a^2b^4 + a^4b^2 + (a^2 + b^2)^2 \\ &= (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + a^2b^2)\end{aligned}$$

\vec{u} と \vec{v} のなす角は θ であるから

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - a^2b^2)}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + a^2b^2)} = \frac{a^2 + b^2 - a^2b^2}{a^2 + b^2 + a^2b^2}$$



- 3** (1) 初項 $a_1 = 1$, 公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1 + 4(n - 1) = 4n - 3 \cdots \textcircled{1}$$

a_n が 7 の倍数であるとき, $4n - 3 \equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$8n \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -1 \pmod{7}$$

このとき, n は整数 m を用いて

$$n = 7m - 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

したがって, $1 \leq 7m - 1 \leq 600$ を満たす整数 m の個数は

$$\frac{2}{7} \leq m \leq \frac{601}{7} \quad \text{すなわち} \quad 1 \leq m \leq 85$$

よって, 求める個数は **85** (個)

- (2) ② を ① に代入すると

$$a_n = 4(7m - 1) - 3 = 7(4m - 1)$$

a_n が 7^2 の倍数であるとき, $4m - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$8m \equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad m \equiv 2 \pmod{7}$$

このとき, m は整数 l を用いて

$$m = 7l + 2$$

これを ② に代入すると

$$n = 7(7l + 2) - 1 = 49l + 13 \quad \cdots \textcircled{3}$$

したがって, $1 \leq 49l + 13 \leq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leq l \leq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq l \leq 11$$

よって, 求める個数は **12** (個)

研

(3) ③を①に代入すると

$$a_n = 4(49l + 13) - 3 = 7^2(4l + 1)$$

a_n が 7^3 の倍数であるとき、 $4l + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$8l \equiv -2 \quad \text{ゆえに} \quad l \equiv -2 \pmod{7}$$

このとき、 l は整数 k を用いて

$$l = 7k - 2$$

これを③に代入すると

$$n = 49(7k - 2) + 13 = 343k - 85 \quad \dots \textcircled{4}$$

$1 \leq 343k - 85 \leq 600$ を満たす整数 k は1で、このとき $n = 258$

④を①に代入すると

$$a_n = 4(343k - 85) - 3 = 7^3(4k - 1)$$

これから、 a_n が 7^4 の倍数となることはない。

以上の結果および②, ③より、 $1 \leq n \leq 600$ に対して

$$a_n \text{が} 7 \text{の倍数であるとき} \quad n \equiv -1 \pmod{7}$$

$$a_n \text{が} 7^2 \text{の倍数であるとき} \quad n \equiv 13 \pmod{49}$$

$$a_n \text{が} 7^3 \text{の倍数であるとき} \quad n = 258$$

数列 $\{a_n\}$ のうち、7の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

上の表で2列目のみ 7^2 を因数にもち、それ以外の列は7を因数にもつ。

ただし、第6行目第2列の a_{258} のみ 7^3 を因数にもつ。

したがって、2列目以外の32項(7を因数にもつ)、2列目の第1行から第5行目までの5項(7^2 を因数にもつ)および第6行目第2列の a_{258} より

$$32 \times 1 + 2 \times 5 + 3 = 45$$

よって、求める n の最小値は $n = 265$ ■

4 (1) 定められたルールにより, 次の確率漸化式が得られる.

$$(*) \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n), \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n)$$

$d_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると

$$d_1 = a_1 + b_1 + c_1 = 1 + 0 + 0 = 1$$

(*) の辺々を加えることにより

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n \quad \text{ゆえに} \quad d_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \dots \textcircled{1}$$

したがって, (*) は

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - b_n \right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - c_n \right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - a_n \right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}a_n \end{aligned}$$

上の3式から, $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4}c_{n-1} \right) = \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{16}c_{n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4}a_{n-2} \right) = \frac{3}{2^{n+3}} - \frac{1}{64}a_{n-2} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

②に $n = 3, 6$ を代入することにより

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{3}{2^6} - \frac{1}{64}a_1 = \frac{3}{64} - \frac{1}{64} \cdot 1 = \frac{1}{32} \\ a_7 &= \frac{3}{2^9} - \frac{1}{64}a_4 = \frac{3}{512} - \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{32} = \frac{11}{2048} \end{aligned}$$

よって A が4回目に勝つ確率は $a_4 \times \frac{2}{4} = \frac{1}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$

A が7回目に勝つ確率は $a_7 \times \frac{2}{4} = \frac{11}{2048} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{4096}$

(2) ①より $d_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

(3) ②より $a_{n+1} = \frac{3}{2^{n+3}} - \frac{1}{64}a_{n-2}$ ■

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \alpha = 10000 + 10000i = 10000\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{ゆえに } z_n = \alpha w^n = \frac{10000\sqrt{2}}{2^n} \left\{ \cos \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi + i \sin \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi \right\}$$

$$\text{よって } |z_n| = \frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}}, \quad \arg z_n = \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi$$

(2) (1)の結果から, $|z_n| \leq 1$ のとき

$$\frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}} \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-\frac{1}{2}} \geq 10^4$$

両辺の常用対数をとると

$$\left(n - \frac{1}{2} \right) \log_{10} 2 \geq 4 \quad \text{ゆえに} \quad n \geq \frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{ここで} \quad \frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{0.301} + 0.5 = 13.7\dots$$

よって, 求める最小の自然数 n は $\mathbf{n = 14}$

(3) (1),(2)の結果から

$$\begin{aligned} |z_{14}| &= \frac{10000}{2^{14-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4 \cdot 5^4}{2^{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{512} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \arg z_{14} &= \left(\frac{14}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi = \frac{7}{12} \pi + 2\pi \\ |z_{15}| &= \frac{10000}{2^{15-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4 \cdot 5^4}{2^{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{1024} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{128} \cdot \frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{128} \sqrt{\frac{25}{32}} < \frac{1}{2} \\ \arg z_{15} &= \left(\frac{15}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi = \frac{3}{4} \pi + 2\pi \end{aligned}$$

したがって, P_{14} は $\triangle ABC$ の外部にあり, P_{15} は $\triangle ABC$ の内部にある.

よって, 求める最小の自然数 n は $\mathbf{n = 15}$ ■

2.4 2018年度

- 1 C 上の点 P を $\left(\frac{1}{\cos\theta}, \tan\theta, 0\right)$ とおく $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$. 直線 AP と平面 $x = d$ との交点を Q とすると, 実数 k を用いて 研

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AP} \\ &= (0, 0, 1) + k\left(\frac{1}{\cos\theta}, \tan\theta, -1\right) \\ &= \left(\frac{k}{\cos\theta}, k\tan\theta, 1-k\right) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

点 Q の x 座標が d であるから

$$\frac{k}{\cos\theta} = d \quad \text{ゆえに} \quad k = d\cos\theta$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= (d, d\sin\theta, 1-d\cos\theta) \\ &= (d, 0, 1) + d(0, \sin\theta, -\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ここで} \quad \sin\theta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ -\cos\theta &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OQ} = (d, 0, 1) + d\left(0, \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

このとき, $-\pi < \theta - \frac{\pi}{2} < 0$ であるから, 求める軌跡は,

平面 $x = d$ 上の点 $(d, 0, 1)$ を中心とする半径 d の円周上で $z < 1$.

別解 軌跡の方程式を, 次のように表してもよい.

$$\begin{cases} x = d \\ y^2 + (z - 1)^2 = d^2 \\ z < 1 \end{cases}$$



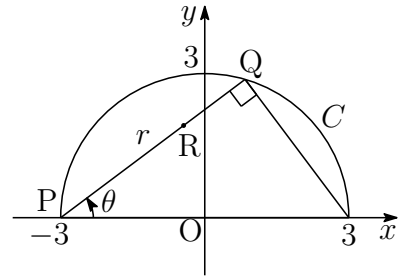
2 (1) $\int_0^3 PQ dy = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$ であるから, $PR = \frac{2}{3}PQ$ より 研

$$S = \int_0^3 PR dy = \frac{2}{3} \int_0^3 PQ dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}\pi = 3\pi$$

(2) $\theta = \angle OPQ$, $r = PQ$ とおくと ($r = 6 \cos \theta$)

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{9}{2}\pi$$

$PR = \frac{2}{3}r$ より



$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}r\right)^2 d\theta = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{2}\pi = 2\pi$$

(3) $C: x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) の第1象限と y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積は, 半径3の半球の体積であるから

$$\pi \int_0^3 x^2 dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 18\pi$$

$P(-x, y)$, $Q(x, y)$ を2:1に内分する点は $\left(\frac{x}{3}, y\right)$ ($x \geq 0, y \geq 0$)

この点の軌跡は C の第1象限の部分を y 軸を元に x 軸方向に $\frac{1}{3}$ だけ縮小したものであるから, 図形 S と第1象限の共通部分を y 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi \int_0^3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 dy = \frac{1}{9}\pi \int_0^3 x^2 dy = \frac{1}{9} \cdot 18\pi = 2\pi$$

$P(-3, 0)$, $Q(s, t)$ を2:1に内分する点を $R(x, y)$ とすると

$$x = \frac{2s-3}{3}, \quad y = \frac{2t}{3} \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{3}{2}(x+1), \quad t = \frac{3}{2}y$$

Q は C 上の点であるから $s^2 + t^2 = 9$ ($t \geq 0$)

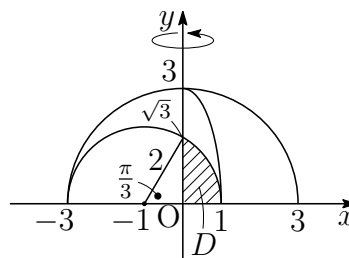
これに上の結果を代入することにより, R の軌跡の方程式は

$$\frac{9}{4}(x+1)^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)^2 + y^2 = 4 \quad (y \geq 0) \quad \cdots (*)$$

(*) の y 軸との交点の y 座標は, (*) に $x = 0$ を代入して

$$y = \sqrt{3}$$

右の図の領域 D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると



$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} x^2 dy \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2 - 1\} dy - 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x dy \quad \cdots (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2 - 1\} dy &= \int_0^{\sqrt{3}} (3 - y^2) dy \\ &= \left[3y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

また, $\int_0^{\sqrt{3}} x dy$ は, D の面積であるから

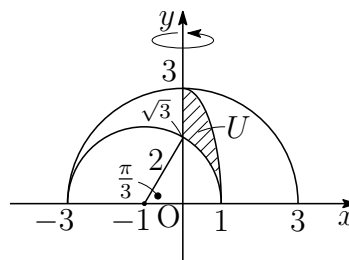
$$\int_0^{\sqrt{3}} x dy = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

これらを (**) に代入すると

$$V_2 = 2\sqrt{3}\pi - 2\pi \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \right) \pi$$

U の表す領域は右の図の斜線部分で, これを y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= 2\pi - \left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \right) \pi \\ &= \left(2 - 3\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi \right) \pi \end{aligned}$$



注意 (**) の $\pi \int_0^{\sqrt{3}} \{(x+1)^2 - 1\} dy$ は, D を直線 $x = -1$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を表す. ■

- 3** 法 4 に関する 0, 1, 2, 3 の積は, 右のようになる.
したがって, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_1 = q_1 = r_1 = s_1 = \frac{1}{4}$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots \textcircled{4}$$

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$q_1 = s_1 = \frac{1}{4}$ および $\textcircled{2}$, $\textcircled{4}$ より, $q_n = s_n$ であるから

$$q_1 = \frac{1}{4}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n \quad \text{ゆえに} \quad q_n = q_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

したがって $q_n = s_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ これを $\textcircled{3}$ に代入すると

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n+1}r_{n+1} = 2^n r_n + \frac{1}{2}$$

数列 $\{2^n r_n\}$ は初項 $2r_1 = \frac{1}{2}$, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$2^n r_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2} \quad \text{ゆえに} \quad r^n = \frac{n}{2^{n+1}}$$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - q_n - r_n - s_n \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}} \end{aligned}$$



4 (1) 整数 a, b は 3 の倍数ではないから

$$a \equiv \pm 1, b \equiv \pm 1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 \equiv 1, b^2 \equiv 1 \pmod{3} \quad \dots (*)$$

$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$ より, 法 3 に関して

$$f(1) = a^2 + 2b^2 + 3 \equiv 1 + 2 \cdot 1 + 3 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$f(2) = 4a^2 + 4b^2 + 17 \equiv 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 17 \equiv 1 \pmod{3}$$

よって, $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りはそれぞれ 0 と 1

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x が m であるとき

$$2m^3 + a^2m^2 + 2b^2m + 1 = 0$$

$$\text{したがって} \quad m(2m^2 + a^2m + 2b^2) = -1$$

上式より, 次の (i), (ii) の場合分けができる.

(i) $m = 1, 2m^2 + a^2m + 2b^2 = -1$ のとき,

第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 + a^2 + 2b^2 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 2b^2 = -3$$

$a^2 + 2b^2 \geq 0$ であるから, 不適.

(ii) $m = -1, 2m^2 + a^2m + 2b^2 = 1$ のとき,

第 1 式を第 2 式を代入すると

$$2 - a^2 + 2b^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad -a^2 + 2b^2 = -1$$

(*) より, $-a^2 + 2b^2 \equiv 1 \pmod{3}$ であるから, 不適.

(i), (ii) より, $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しない.

補足 x を整数とすると $x + 3 \equiv x \pmod{3}$

n を自然数とすると $(x + 3)^n \equiv x^n \pmod{3}$

ゆえに $f(x + 3) \equiv f(x) \pmod{3}$

これと (1) の結果および $f(0) = 1$ から, $x \equiv 1 \pmod{3}$ が $f(x) = 0$ を満たす x であるための必要条件である. したがって, (2) は, (ii) の $m = 1$ の場合についてのみ調べればよい.

- (3) $f(x) = 0$ を満たす x は負である. (2) の結果に注意すると, $f(x) = 0$ を満たす有理数 x は整数ではないから, x を $\frac{p}{q}$ とすると (p, q は互いに素である整数, $p < 0, q > 1$)

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{p}{q}\right)^3 + a^2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2b^2\frac{p}{q} + 1 &= 0 \\ 2p^3 + a^2p^2q + 2b^2pq^2 + q^3 &= 0 \\ \frac{2p^3}{q} + a^2p^2 + 2b^2pq + q^2 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

上式の $a^2p^2 + 2b^2pq + q^2$ が整数であるから, $\frac{2p^3}{q}$ は整数である. このとき, p と q は互いに素であるから ($q > 1$), $q = 2$. これを ① に代入すると

$$p^3 + a^2p^2 + 4b^2p + 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p^2 + a^2p + 4b^2) = -4 \quad \dots \textcircled{2}$$

負の整数 p は -4 の約数で, $q (= 2)$ と互いに素であるから $p = -1$
 $p = -1$ を ② に代入すると

$$-(1 - a^2 + 4b^2) = -4 \quad \text{ゆえに} \quad |a|^2 - 4|b|^2 = -3$$

$$\text{したがって} \quad (|a| + 2|b|)(|a| - 2|b|) = -3$$

a, b は 3 の倍数でない整数であるから, $|a| + 2|b| \geq 3$ に注意すると

$$\begin{cases} |a| + 2|b| = 3 \\ |a| - 2|b| = -1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad |a| = |b| = 1$$

よって $(a, b) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ ■

$$\boxed{5} \quad \alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\bar{z} = 0 \text{ より}$$

$$\frac{\alpha}{2|\alpha|^2 + 1} + \frac{\bar{z}i}{|z|^2 + 2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\bar{z}}{|z|^2 + 2} = \frac{\alpha i}{2|\alpha|^2 + 1}$$

$$\text{上の第2式の共役複素数は} \quad \frac{z}{|z|^2 + 2} = \frac{-\bar{\alpha}i}{2|\alpha|^2 + 1} \quad \cdots (*)$$

$$(i) \quad \alpha = 0 \text{ のとき, } (*) \text{ より} \quad z = 0$$

$$(ii) \quad \alpha \neq 0 \text{ のとき, } (*) \text{ より, } \frac{z}{-\bar{\alpha}i} = \frac{|z|^2 + 2}{2|\alpha|^2 + 1} = k \text{ とおくと } (k > 0)$$

$$|z| = k|\alpha| \text{ であるから, これを } \frac{|z|^2 + 2}{2|\alpha|^2 + 1} = k \text{ に代入すると}$$

$$\frac{k^2|\alpha|^2 + 2}{2|\alpha|^2 + 1} = k \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^2 k^2 - (2|\alpha|^2 + 1)k + 2 = 0$$

$$\text{したがって} \quad (k - 2)(|\alpha|^2 k - 1) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = 2, \frac{1}{|\alpha|^2}$$

$$\frac{z}{-\bar{\alpha}i} = k \text{ であるから} \quad z = -2\bar{\alpha}i, \quad -\frac{\bar{\alpha}i}{|\alpha|^2}$$

$$(i), (ii) \text{ より} \quad \alpha = 0 \text{ のとき} \quad z = 0$$

$$\alpha \neq 0 \text{ のとき} \quad z = -2\bar{\alpha}i, \quad -\frac{\bar{\alpha}i}{|\alpha|^2}$$



2.5 2019 年度

1 まず, 次の定積分を計算する.

研

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin^2 2n\pi t \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 4n\pi t) \, dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{4n\pi} \sin 4n\pi t \right]_0^1 = \frac{1}{2}, \\ \int_0^1 t \sin 2n\pi t \, dt &= \left[-\frac{t}{2n\pi} \cos 2n\pi t + \frac{1}{4n^2\pi^2} \sin 2n\pi t \right]_0^1 = -\frac{1}{2n\pi}, \\ \int_0^1 \sin 2n\pi t \, dt &= -\frac{1}{2n\pi} \left[\cos 2n\pi t \right]_0^1 = 0, \\ \int_0^1 t^2 \, dt &= \frac{1}{3}, \quad \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 dt = 1\end{aligned}$$

上の結果により

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 \, dt &= \int_0^1 \sin^2 2n\pi t \, dt + x^2 \int_0^1 t^2 \, dt + y^2 \int_0^1 dt \\ &\quad - 2x \int_0^1 t \sin 2n\pi t \, dt - 2y \int_0^1 \sin 2n\pi t \, dt + 2xy \int_0^1 t \, dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 - 2x \left(-\frac{1}{2n\pi} \right) - 2y \cdot 0 + 2xy \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 + \frac{x}{n\pi} + xy \\ &= \left(y + \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{x^2}{12} + \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2} \\ &= \left(y + \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(x + \frac{6}{n\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} \quad \dots (*)\end{aligned}$$

したがって $x = -\frac{6}{n\pi}$, $y = \frac{3}{n\pi}$ のとき, (*) は最小値 $I_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2}$ をとる.

よって
$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2}$$

別解 $\int_0^1 dt = 1$, $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ より, $f(t) = t - \frac{1}{2}$ とおくと

$$\int_0^1 f(t) dt = 0, \quad \int_0^1 f(t)^2 dt = \frac{1}{3} \left[\left(t - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$\int_0^1 \sin 2n\pi t dt = 0, \quad \int_0^1 t \sin 2n\pi t dt = -\frac{1}{2n\pi} \text{ より}$$

$$\int_0^1 f(t) \sin 2n\pi t dt = -\frac{1}{2n\pi} = -\frac{6}{n\pi} \cdot \frac{1}{12} = -\frac{6}{n\pi} \int_0^1 f(t)^2 dt$$

したがって $\int_0^1 f(t) \left\{ \sin 2n\pi t + \frac{6}{n\pi} f(t) \right\} dt = 0$

$g(t) = \sin 2n\pi t + \frac{6}{n\pi} f(t)$ とおくと $\int_0^1 f(t)g(t) dt = 0$

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 \sin 2n\pi t dt + \frac{6}{n\pi} \int_0^1 f(t) dt = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t)^2 dt &= \int_0^1 \sin^2 2n\pi t dt + \frac{12}{n\pi} \int_0^1 f(t) \sin 2n\pi t dt + \frac{36}{n^2\pi^2} \int_0^1 f(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{12}{n\pi} \left(-\frac{1}{2n\pi} \right) + \frac{36}{n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

$\sin 2n\pi t = -\frac{6}{n\pi} f(t) + g(t)$, $t = f(t) + \frac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \sin 2n\pi t - xt - y &= -\frac{6}{n\pi} f(t) + g(t) - x \left(f(t) + \frac{1}{2} \right) - y \\ &= -\left(x + \frac{6}{n\pi} \right) f(t) + g(t) - \left(\frac{x}{2} + y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sin 2n\pi t - xt - y)^2 dt &= \left(x + \frac{6}{n\pi} \right)^2 \int_0^1 f(t)^2 dt + \int_0^1 g(t)^2 dt + \left(\frac{x}{2} + y \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \left(x + \frac{6}{n\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} + \left(\frac{x}{2} + y \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} = I_n \end{aligned}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2}$

2 (1) 2つの整式 $f(x)$, $g(x)$ が満たす恒等式

$$(*) \begin{cases} f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7 \\ g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

により, $f(x)$, $g(x)$ の次数をそれぞれ m , n とすると

$$\begin{cases} 2m = 2 + n & \cdots \textcircled{1} \\ 3n = \max(4 + m, 2 + n) & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(i) $4 + m \geq 2 + n$ のとき, $\textcircled{2}$ より $3n = 4 + m$ ゆえに $m = 3n - 4$
これと $\textcircled{1}$ を条件に注意して解くと $m = n = 2$

(ii) $4 + m < 2 + n$ のとき, $\textcircled{2}$ より $3n = 2 + n$ ゆえに $n = 1$
これを $\textcircled{1}$ に代入すると, $m = \frac{3}{2}$ となり, 不適.

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから, 題意は成立する.

(2) $(*)$ の第 1 式において, x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(-x) + 7$$

これと $(*)$ の第 1 式により $g(-x) = g(x) \cdots \textcircled{3}$

また, $(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(-x) - 6x^2 - 2$$

$\textcircled{3}$ より, $g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

これと $(*)$ の第 2 式より $f(-x) = f(x)$

また, $(*)$ に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 2g(0) + 7, \quad g(0) = -2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 3$$

以上の結果から, $f(x) = ax^2 + 3$, $g(x) = px^2 - 2$ とおくと, $(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4 + 3 = (x^2 + 2)(px^2 - 2) + 7 \\ px^6 - 2 = x^4(ax^2 + 3) - 3x^2(px^2 - 2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

整理すると
$$\begin{cases} ax^4 = px^4 + 2(p-1)x^2 \\ px^6 = ax^6 - 3(p-1)x^4 \end{cases}$$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = p, \quad p - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = p = 1$$

よって $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x^2 - 2$

- 3** (1) 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \cdots (*)$ の解 z_1, z_2 が $z_1 = z_2$, すなわち, 2次方程式 $(*)$ が重解をもつ確率である. 係数について, $b^2 - 4ac = 0$ であるから, $b^2 = 4ac$ より

$$b = 2 \text{ のとき, } ac = 1 \text{ より } (a, c) = (1, 1)$$

$$b = 4 \text{ のとき, } ac = 4 \text{ より } (a, c) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$$

$$b = 6 \text{ のとき, } ac = 9 \text{ より } (a, c) = (3, 3)$$

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{1+3+1}{6^3} = \frac{5}{216}$$

- (2) (i) 2次方程式 $(*)$ が単位円周上に実数解をもつとき, その解は1ではないから, $(*)$ は -1 を重解にもち, その方程式は

$$a(x+1)^2 = 0 \quad \text{ゆえに } b = 2a, \quad c = a$$

これを満たす (a, b, c) の組は, 次の3組である.

$$(a, b, c) = (1, 2, 1), (2, 4, 2), (3, 6, 3)$$

- (ii) 2次方程式 $(*)$ が単位円周上に虚数解をもつとき $b^2 - 4ac < 0 \cdots \textcircled{1}$

$(*)$ の解と係数の関係および $z_2 = \bar{z}_1, |z_1| = 1$ に注意して

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \quad \text{ゆえに } |z_1|^2 = \frac{c}{a} \quad \text{すなわち } c = a \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して } b^2 - 4a^2 < 0 \quad \text{ゆえに } \frac{b}{2} < a = c$$

$$b = 1 \text{ のとき } \quad a = c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$b = 2, 3 \text{ のとき } \quad a = c = 2, 3, 4, 5, 6$$

$$b = 4, 5 \text{ のとき } \quad a = c = 3, 4, 5, 6$$

$$b = 6 \text{ のとき } \quad a = c = 4, 5, 6$$

これらの (a, b, c) の組の総数は $6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 = 27$ 組

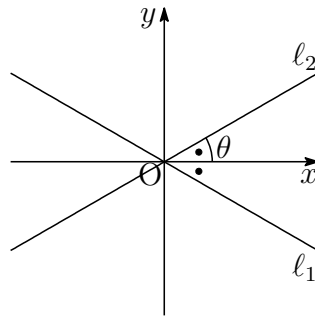
$$\text{よって, 求める確率は } \frac{3+27}{6^3} = \frac{5}{36}$$

(3) 条件を満たす z_1, z_2 は虚数であるから

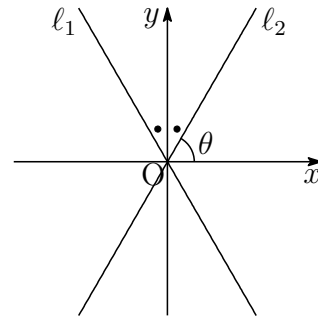
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$$

$$l_2 \text{ の偏角を } \theta \text{ とすると } \tan \theta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{b}$$

$$(i) \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$(ii) \tan \theta = \sqrt{3}$$



$$(i) \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき, } \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より}$$

$$\sqrt{3(4ac - b^2)} = b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = 3ac$$

$$b = 3 \text{ のとき, } ac = 3 \text{ より } (a, c) = (1, 3), (3, 1)$$

$$b = 6 \text{ のとき, } ac = 12 \text{ より } (a, c) = (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$$

これらの (a, b, c) の組の総数は $2 + 4 = 6$ 組

$$(ii) \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき, } \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{b} = \sqrt{3} \text{ より}$$

$$\sqrt{4ac - b^2} = \sqrt{3}b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = ac$$

$$b = 1 \text{ のとき, } ac = 1 \text{ より } (a, c) = (1, 1)$$

$$b = 2 \text{ のとき, } ac = 4 \text{ より } (a, c) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$$

$$b = 3 \text{ のとき, } ac = 9 \text{ より } (a, c) = (3, 3)$$

$$b = 4 \text{ のとき, } ac = 16 \text{ より } (a, c) = (4, 4)$$

$$b = 5 \text{ のとき, } ac = 25 \text{ より } (a, c) = (5, 5)$$

$$b = 6 \text{ のとき, } ac = 36 \text{ より } (a, c) = (6, 6)$$

これらの (a, b, c) の組の総数は $5 \cdot 1 + 3 = 8$ 組

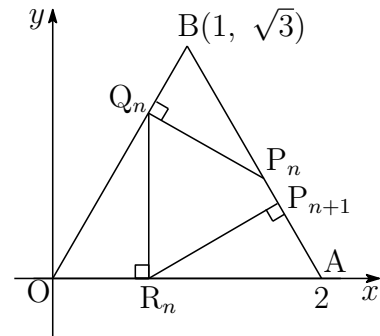
$$\text{よって, 求める確率は } \frac{6 + 8}{6^3} = \frac{7}{108}$$

4 点 $P_n(x_n, y_n)$ を通り、直線 OB に垂直な直線は

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$

これと直線 $OB: y = \sqrt{3}x$ の交点の x 座標は

$$\sqrt{3}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_n) + y_n$$



これを解くことにより、点 Q_n の x 座標は $x = \frac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$

次に、点 $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ を通り、直線 AB に垂直な直線の方程式は

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - x_{n+1}) + y_{n+1}$$

これを解くことにより、点 R_n の x 座標は $x = x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1}$

点 Q_n と点 R_n の x 座標は等しいから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}y_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{3}y_n}{4}$$

2点 P_n, P_{n+1} は直線 $AB: y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 上の点であるから

$$x_{n+1} - \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_{n+1} + 2\sqrt{3}) = \frac{x_n + \sqrt{3}(-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3})}{4}$$

整理すると $x_{n+1} = -\frac{1}{8}x_n + \frac{15}{8}$ ゆえに $x_{n+1} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{8}\left(x_n - \frac{5}{3}\right)$

数列 $\left\{x_n - \frac{5}{3}\right\}$ は初項 $x_1 - \frac{5}{3}$ 、公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$x_n - \frac{5}{3} = \left(x_1 - \frac{5}{3}\right) \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{5}{3}$$

また $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{3}x_n + 2\sqrt{3}) = -\sqrt{3} \cdot \frac{5}{3} + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

よって、求める点の座標は $\left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

5

$$C: w = \frac{az + b}{cz + 1} \quad \dots (*)$$

研

条件(ア)により $i = \frac{ai + b}{ci + 1}, \quad -i = \frac{a(-i) + b}{c(-i) + 1}$

ゆえに $b + c + (a - 1)i = 0, \quad b + c - (a - 1)i = 0$

上の2式から $a = 1, \quad b = -c$

これを(*)に代入すると $w = \frac{z - c}{cz + 1} \dots \textcircled{1}$ ゆえに $z = -\frac{w + c}{cw - 1}$

点 z は虚軸全体を動くから, $z + \bar{z} = 0$ より $-\frac{w + c}{cw - 1} - \frac{\bar{w} - \bar{c}}{\bar{c}\bar{w} - 1} = 0$

整理すると $(c + \bar{c})|w|^2 + (|c|^2 - 1)(w + \bar{w}) - (c + \bar{c}) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$

条件(イ)に注意すると, $\textcircled{1}$ により $c \neq 0$

さらに, c は純虚数ではないから $c + \bar{c} \neq 0$

$k = \frac{|c|^2 - 1}{c + \bar{c}} \dots \textcircled{3}$ とおいて (k は実数), $\textcircled{2}$ に適用すると

$$|w|^2 + k(w + \bar{w}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |w + k|^2 = k^2 + 1$$

条件(イ)により $k^2 + 1 = 1$ ゆえに $k = 0$ よって $|w| = 1 \quad \dots (**)$

また, $\textcircled{3}$ により $|c|^2 - 1 = 0$ ゆえに $c = \pm 1$

(i) $c = 1$ のとき, $\textcircled{1}$ により

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{ゆえに} \quad w + 1 = \frac{2z}{z + 1}$$

$z = 0$ のとき, $w = -1$ となり, 条件(ウ)に反する.

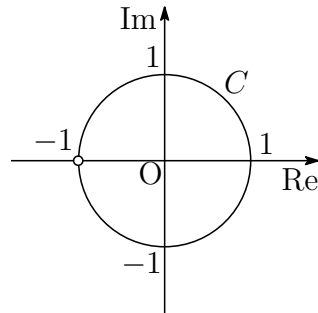
(ii) $c = -1$ のとき, $\textcircled{1}$ により

$$w = \frac{z + 1}{-z + 1} \quad \text{ゆえに} \quad w + 1 = \frac{2}{-z + 1} \neq 0$$

これは, 条件(ウ)を満たす.

よって $a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1$

(**) および $w \neq -1$ により, C の概形は右の図のようになる.



第 3 章 一般前期研究

九州大学の入試問題 (数学) の特徴として, 毎年出題される「確率」「微積分」がある. 旧課程の数学 A の分野に期待値 (確率変数の平均) があり, これをテーマとする九大 (経済工学部) らしい問題が多岐にわたり出題されていた. 現行課程では, 期待値が数学 B の「確率分布と統計」の分野で扱うことになり, 同分野が九州大学の出題の範囲外であるため, 「確率」の出題内容がかなり限られてきた印象を持つ.

近年の確率の出題内容を見ると, 大学で扱う確率論で扱う反射壁・吸収壁, 破産問題¹などの分野から入試問題として整えた変数の推移 (2015 年) をテーマとする問題が出題された. 2015 年の問題で簡単に説明すると, 青玉の個数を変数 X を縦軸に, 横軸を試行回数とすると, $X = 0, 1, 2, 3$ の値で推移し, $X = 0, X = 3$ を反射壁としている. 仮に本題が $X = 0$ または $X = 3$ になった時点で試行が終了するとき, $X = 0, X = 3$ はその吸収壁という. また, 青玉 1 個を 1 万円としてゲームに参加し, 3 万円または 0 円になったときにゲームが終了するといった破産問題でもある.

折れ線グラフを用いる問題は, 2002 年 (1 次元ランダムウォーク) にも出題され, 九大らしい工夫がなされた良問である.

確率分野からの出題内容が狭くなったため, 2016 年から 2018 年はマルコフ連鎖・確率漸化式を中心とする出題になってしまった.

最後に「微積分」の求積問題は, 受験生にとって明暗を分けることが多い. 確かに, 時間が掛かっても膨大な計算の末, 正解に至る受験生もいるが, 試験時間は限られている. 問題の核心を捉え, 簡潔な解答を目指す必要がある. そのための学習が何よりも重要であり, 本書はこれに対する編者の解答である.

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2014.pdf [4]

3.1 2015年度

3.1.1 4番(3)研究

操作を n 回繰り返す中で袋の中の玉が3個とも青玉になることなしに、青玉の個数が1個である確率を p_n とする。 問 解

(i) n が奇数のとき

(2) で示したように奇数回目に青玉が1個になることはないから $p_n = 0$

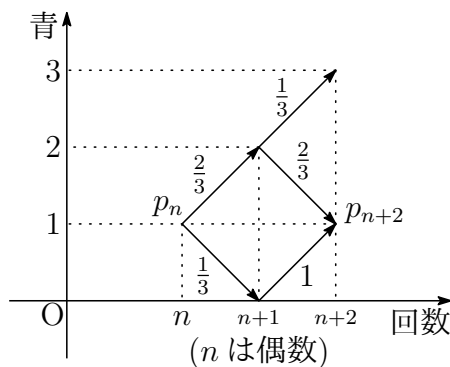
(ii) n が偶数のとき $p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{7}{9} p_n$$

ゆえに
$$p_n = \left(\frac{7}{9} \right)^{\frac{n}{2}}$$

n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2} \times \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$



東大理科 2008 年

白黒2種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき、次の操作 (A) を考える。

(A) 手持ちの k 枚の中から1枚を、等確率 $\frac{1}{k}$ で選び出し、それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問 (1), (2) に答えよ。

(1) 最初に白2枚、黒2枚、合計4枚のカードをもっているとき、操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて、4枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 最初に白3枚、黒3枚、合計6枚のカードをもっているとき、操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて、6枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

解答 (1) 操作(A)を n 回繰り返す中で4枚とも同じ色になることなしに、白と黒のカードが2枚ずつである確率を p_n とする.

(i) n が奇数のとき

奇数回目に4枚とも同じ色になることはないので、求める確率は 0

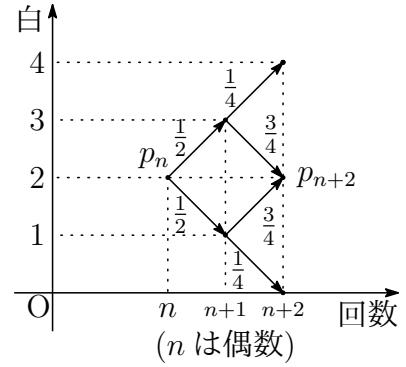
(ii) n が偶数のとき $p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4} p_n$$

ゆえに $p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

求める確率は

$$p_{n-2} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$



(2) 操作(A)を n 回繰り返す中で6枚とも同じ色になることなしに、白のカードが2枚である確率を q_n とすると、対称性により白のカードが4枚である確率も q_n である.

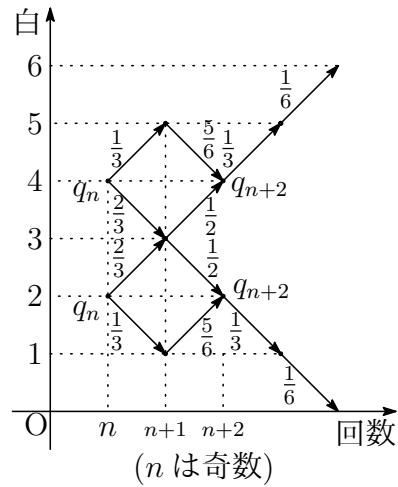
(i) n が奇数のとき $q_1 = \frac{1}{2}$

$$q_{n+2} = q_n \times \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + q_n \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{18} q_n$$

ゆえに $q_n = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

求める確率は、3以上の奇数のとき

$$q_{n-2} \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{18} \left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}$$



(ii) n が1または偶数のとき

6枚とも同じ色になることはないので、求める確率は 0

3.1.2 5番(2) ユークリッドの互除法

n が m で割り切れること(m が n の約数)を $m|n$ と表記し, 整数 x, y の最大公約数を (x, y) と表記すると 問 解

$$(x, y) | x, \quad (x, y) | y$$

が成り立つ.

ユークリッドの互除法

2整数 a, b について($a > b > 0$), a を b で割ったときの商を q , 余りを c とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \quad (a, b) = (b, c)$$

$$c = 0 \text{ のとき} \quad (a, b) = b$$

証明 $c \neq 0$ のとき, $a = bq + c$ より $(b, c) | a$ また, $(b, c) | b$ であるから, (b, c) は a と b の公約数, したがって

$$(b, c) | (a, b) \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様に, $c = a - bq$ より $(a, b) | c$ また, $(a, b) | b$ であるから, (a, b) は b と c の公約数, したがって

$$(a, b) | (b, c) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad (a, b) = (b, c)$$

$c = 0$ のとき, 自明.

証終

補足 さらに, b を c で割った余りが d であるとき $(b, c) = (c, d)$

$$\text{すなわち} \quad (a, b) = (b, c) = (c, d)$$

2つの整数 a_1, a_2 について($a_1 > a_2 > 0$), a_1 を a_2 で割った余りを a_3 , さらに, a_2 を a_3 で割った余りを a_4 , 順次, a_k を a_{k+1} で割った余りを a_{k+2} とすると

$$(a_1, a_2) = (a_2, a_3) = (a_3, a_4) = \cdots = (a_k, a_{k+1}) = (a_{k+1}, a_{k+2}) = \cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列であるから, 互除法を繰り返すことにより, a_1 と a_2 の最小公倍数を求めることができる.

3.2 2016 年度

3.2.1 2 番 (4) 外積 (ベクトル積)

$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおくと

問 解

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}}{2+1} = \frac{\vec{b} + 2 \cdot \frac{3}{4}\vec{c}}{3} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{AP} &= k\overrightarrow{AE} = \frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\}\end{aligned}$$

CR : RD = 3(1 - t) : 2t であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{2t\overrightarrow{AC} + 3(1-t)\overrightarrow{AD}}{3(1-t) + 2t} = \frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b} + 2t\vec{c}\}$$

したがって $\overrightarrow{QP} = \frac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b} - 3\vec{c})$, $\overrightarrow{QR} = \frac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b} - 3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え、外積の性質を用いると²

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} = -\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b} \times \vec{c}$$

よって $\triangle PQR : \triangle ABC = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)} : 1$

外積は高校数学の範囲外であるから、2次試験では使えないが、センター試験では、非常に有効な計算法である。なお、外積 (ベクトル積) の演算について、次式が成り立つことに注意したい。

$$\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b}$$

また、これに $\vec{c} = \vec{b}$ を代入すると $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$

²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

3.2.2 3番 マルコフ連鎖

$P_i(n+1)$ は $P_j(n)$ によって決定する確率過程 (マルコフ連鎖) である. 問 解

$$P_0(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n)\}$$

$$P_1(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + 2P_5(n)\}$$

$$P_2(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_3(n) + 2P_4(n) + P_5(n)\}$$

$$P_3(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n) + P_5(n)\}$$

$$P_4(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + P_1(n) + 2P_2(n) + P_3(n) + P_5(n)\}$$

$$P_5(n+1) = \frac{1}{6}\{P_0(n) + 2P_1(n) + P_2(n) + P_3(n) + P_4(n)\}$$

したがって $P_0(n) = P_3(n) = \frac{1}{6}$,

$$P_1(n+1) - P_5(n+1) = -\frac{1}{3}\{P_1(n) - P_5(n)\},$$

$$P_2(n+1) - P_4(n+1) = -\frac{1}{3}\{P_2(n) - P_4(n)\}$$

$P_1(1) = P_2(1) = P_4(1) = P_5(1) = \frac{1}{6}$ より $P_1(n) = P_5(n)$, $P_2(n) = P_4(n)$

これらの結果から $P_1(n+1) = P_2(n+1) = \frac{1}{3}\left\{P_1(n) + P_2(n) + \frac{1}{6}\right\}$

ゆえに $P_1(n+1) = \frac{2}{3}P_1(n) + \frac{1}{18}$

$P_1(1) = \frac{1}{6}$ であるから $P_1(n) = \frac{1}{6}$ よって $P_i(n) = \frac{1}{6}$ ($i = 0, 1, \dots, 5$)

3.2.3 5 番 (3) 発展

$\theta = \frac{\pi}{n}$, $\alpha = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ とおくと

問 解

$$z^n - 1 = (z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \alpha^k)$$

また $z^n - 1 = (z - 1) \sum_{k=1}^n z^{n-k}$ ゆえに $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \alpha^k) = \sum_{k=1}^n z^{n-k} \dots (*)$

(*) は、 z に関する恒等式であるから、 $z = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \cos 2k\theta - i \sin 2k\theta) = \prod_{k=1}^{n-1} (2 \sin^2 k\theta - 2i \sin k\theta \cos k\theta) \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1} (\sin k\theta - i \cos k\theta) \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} - k\theta \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - k\theta \right) \right\} \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \times (\cos 0 - i \sin 0) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k\theta \end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = n$$

よって $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

たとえば、 $n = 9$ のとき $\prod_{k=1}^8 \sin \frac{k\pi}{9} = \frac{9}{256}$

したがって $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16} \dots \textcircled{1}$

同様に、 $n = 18$ のとき $\prod_{k=1}^{17} \sin \frac{k\pi}{18} = \frac{9}{2^{16}}$

したがって $\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \dots \sin 80^\circ = \frac{3}{256} \dots \textcircled{2}$

さらに、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$

3.3 2017年度

3.3.1 3番(2)(3) 別解

(2) $a_n = 4n - 3$ より, a_n が 7^2 の倍数であるとき

問 解

$$4n - 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 12(4n - 3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 13 \pmod{7^2}$$

n は整数 l を用いて $n = 49l + 13$

したがって, $1 \leq 49l + 13 \leq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leq l \leq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq l \leq 11$$

よって, 求める個数は **12 (個)**

(3) $a_n = 4n - 3$ より, a_n が 7^3 の倍数であるとき

$$4n - 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 86(4n - 3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 258 \pmod{7^3}$$

n は整数 m を用いて $n = 343m + 258$

したがって, $1 \leq 343m + 258 \leq 600$ を満たす整数 m は $m = 0$ の 1 個で

$$a_{258} = 4 \cdot 258 - 3 = 1029 = 3 \cdot 7^3$$

また, $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち, 7^4 で割り切れる項はない.

(1),(2) の結果から, 数列 $\{a_n\}$ のうち, 7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

これら 38 個の項をそれぞれ 7 で割ると, さらに 7 で割り切れる項が第 2 列に 6 個あり, これらをまた 7 で割ると, 最後に残った a_{258} だけが 7 で 1 回割れる.

したがって, これら 38 個の積は 7 で $38 + 6 + 1$, すなわち, 45 回割り切れる.

よって, 求める n の最小値は **$n = 265$**

3.4 2018 年度

3.4.1 1 番 双曲線の媒介変数表示

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ は, $\frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta = 1$ により,

問 解

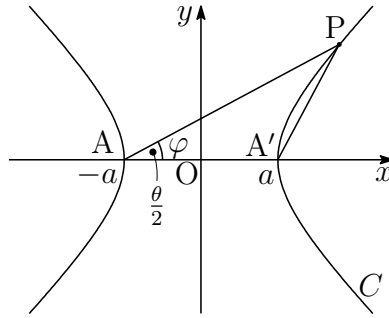
$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \frac{y}{b} = \tan \theta$$

とおくと, 双曲線上の点 $P(x, y)$ は, 次のように媒介変数表示ができる.

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases}$$

とくに, $a = b$ のとき, 直角双曲線となる.

直角双曲線 $C: x^2 - y^2 = a^2$ 上の点を $P(x, y)$, 2 頂点を $A(-a, 0)$, $A'(a, 0)$ とおく.



直線 AP の傾きを m , 直線 $A'P$ の傾きを m' とすると

$$m = \frac{y}{x+a}, \quad m' = \frac{y}{x-a} \quad \text{ゆえに} \quad mm' = \frac{y^2}{x^2 - a^2} = 1$$

P は 2 直線 $AP: y = m(x+a)$, $A'P: y = \frac{1}{m}(x-a)$ の交点であるから

$$x = \frac{1+m^2}{1-m^2}a, \quad y = \frac{2m}{1-m^2}a$$

ここで, $m = \tan \varphi$ とおくと $x = \frac{a}{\cos 2\varphi}$, $y = a \tan 2\varphi$

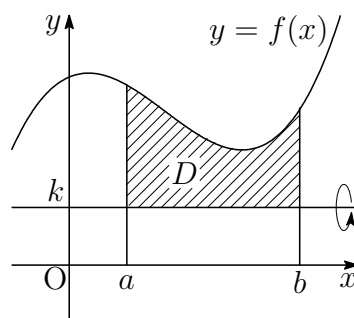
さらに, $\theta = 2\varphi$ とおくことにより $x = \frac{a}{\cos \theta}$, $y = a \tan \theta$

直角双曲線の漸近線が $y = x$ と $y = -x$ であるから, $0 \leq \theta < 2\pi$, すなわち, $0 \leq \varphi < \pi$ において, $\varphi \neq \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ である. $\varphi = \frac{\pi}{4} - 0$ のとき P は第 1 象限の無限遠点, $\varphi = \frac{\pi}{4} + 0$ のとき P は第 3 象限の無限遠点, $\varphi = \frac{3}{4}\pi - 0$ のとき P は第 2 象限の無限遠点, $\varphi = \frac{3}{4}\pi + 0$ のとき P は第 4 象限の無限遠点にある.

3.4.2 2番(3) 研究

$k > 0$ とする. 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ が, 区間 $a \leq x \leq b$ において, $f(x) \geq k$ であるとき, この区間において, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ で囲まれた領域 D を直線 $y = k$ のまわりに1回転させた回転体の体積を V とすると

問 解

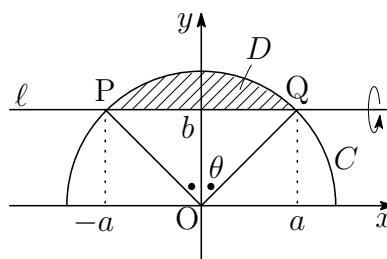


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b (y - k)^2 dy \\ &= \pi \int_a^b (y^2 - k^2) dx - 2\pi k \int_a^b (y - k) dx \end{aligned}$$

D を x 軸のまわりに1回転させた回転体の体積を V_x , D の面積を S とすると

$$V = V_x - 2\pi k S$$

半円 $C: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ($y \geq 0$) と直線 $\ell: y = b$ ($b \geq 0$) で囲まれた領域を D とする. D を ℓ のまわりに1回転させた回転体の体積を V , D を x 軸のまわりに1回転させた回転体の体積を V_x , D の面積を S とすると



$$V_x = \pi \int_{-a}^a (y^2 - b^2) dx = \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi a^3$$

とくに, V_x は C の半径 r に関係なく a の値により決定する.

C と ℓ の2つの交点 P, Q に対し, $\angle POQ = 2\theta$, $OP = OQ = r$ とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = r^2\theta - ab, \\ V &= V_x - 2\pi b S = \frac{4}{3}\pi a^3 - 2\pi b(r^2\theta - ab) \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{3}a^3 + ab^2 - br^2\theta \right) \end{aligned}$$

例えば, $C: x^2 + y^2 = 4$, $\ell: y = 1$ のとき, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ より

$$V = 2 \left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \right) \pi$$

これは, 38 ページで求めた V_2 の2倍に等しい.

前ページで示したように、領域 D を回転させた回転体の体積は、 D の面積 S を利用すると、簡単に求めることができる。

例題 次の領域 D_1 および D_2 をそれぞれ x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$$D_1 : \begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \\ y \geq 2 \end{cases} \quad D_2 : \begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

解答 D_1, D_2 の面積をそれぞれ S_1, S_2 とする。

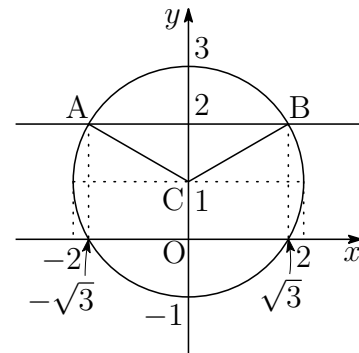
右図において、 $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_2 = \pi \cdot 2^2 - 2S_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) $\cdots (*)$ とすると

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y - 2) dx = S_1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$



D_1 および D_2 を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1, V_2 とする。(*) より、 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y^2 - 2^2) dx = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y - 2) dx + \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx \\ &= 2\pi S_1 + \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) + \frac{\pi}{6} (2\sqrt{3})^3 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

D_2 の境界を表す 2 曲線 $C_1 : y = f(x), C_2 : y = g(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{4 - x^2} & (\sqrt{3} \leq |x| \leq 2) \\ 2 & (|x| \leq \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{4 - x^2} & (\sqrt{3} \leq |x| \leq 2) \\ 0 & (|x| \leq \sqrt{3}) \end{cases}$$

とすると

$$f(x) + g(x) = 2, \quad \int_{-2}^2 \{f(x) - g(x)\} dx = S_2$$

したがって

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \pi \int_{-2}^2 \{f(x)^2 - g(x)^2\} dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 \{f(x) + g(x)\}\{f(x) - g(x)\} dx \\
 &= \pi \int_{-2}^2 2\{f(x) - g(x)\} dx = 2\pi \int_{-2}^2 \{f(x) - g(x)\} dx \\
 &= 2\pi S_2 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right)
 \end{aligned}$$

補足 D_2 の重心は $(0, 1)$ であるから、パップス・ギュルダンの定理³により

$$V_2 = 2\pi S_2 \cdot 1 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right)$$

九大理系 2012 年

円 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 求める体積は $V_1 + V_2 = 2\pi \left(\frac{8\pi}{3} + 3\sqrt{3} \right)$

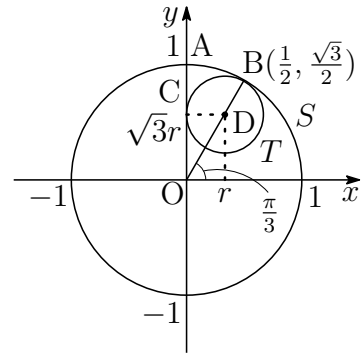
³http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 参照)

九大理系 2013 年

原点 O を中心とし、点 $A(0, 1)$ を通る円を S とする。点 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が、点 C で y 軸に接しているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。
- (2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 \widehat{AB} ，円 T の短い方の弧 \widehat{BC} ，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 (1) OB の x 軸の正の方向となす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから、 T の半径を r とすると、 D の座標は $(r, \sqrt{3}r)$ ， $OD = 2r$ である。
右の図より、 $OD + DB = 1$ であるから

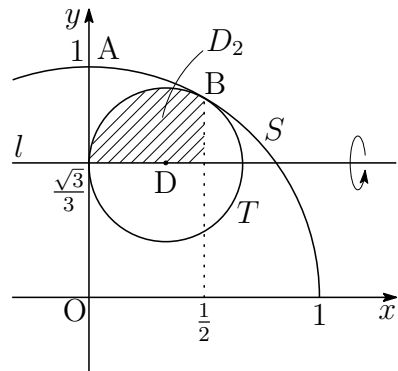
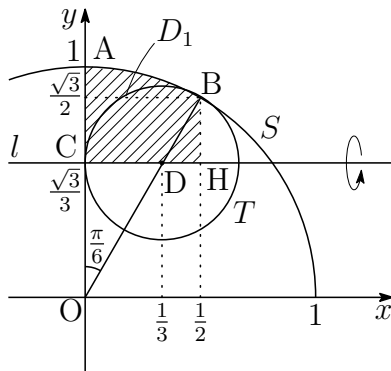


$$2r + r = 1 \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{1}{3}$$

よって $D\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，半径 $\frac{1}{3}$

- (2) $y = \sqrt{1-x^2}$ とすると、 S と y 軸， l ，直線 $x = \frac{1}{2}$ で囲まれた領域 D_1 の面積は、左下の図から

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) dx &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \triangle OCD + \triangle BDH \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{24} \quad \dots (*) \end{aligned}$$



D_1 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると, $x^2 + y^2 = 1$ および (*) に注意して

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} - x^2 \right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} - x^2 \right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{24} \right) \end{aligned}$$

D_2 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると,

$$\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

に注意して

$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}x - x^2 \right) dx$$

求める体積 V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \frac{V_1}{\pi} - \frac{V_2}{\pi} = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{24} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{18} \pi + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{18} \pi \end{aligned}$$

よって
$$V = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{18} \pi \right)$$

3.5 2019 年度

3.5.1 1 番 関数の内積

原点 O , $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ とし $(\vec{a} \perp \vec{b})$, 平面 OAB 上にない点 $P(\vec{p})$ をとる. m, n を実数とするととき 問 解

$$\begin{aligned} |\vec{p} - m\vec{a} - n\vec{b}|^2 &= |\vec{p}|^2 + m^2|\vec{a}|^2 + n^2|\vec{b}|^2 - 2m\vec{a} \cdot \vec{p} - 2n\vec{b} \cdot \vec{p} \\ &= |\vec{a}|^2 \left(m - \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{|\vec{a}|^2} \right)^2 + |\vec{b}|^2 \left(n - \frac{\vec{b} \cdot \vec{p}}{|\vec{b}|^2} \right)^2 + |\vec{p}|^2 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{p})^2}{|\vec{a}|^2} - \frac{(\vec{b} \cdot \vec{p})^2}{|\vec{b}|^2} \\ &\geq |\vec{p}|^2 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{p})^2}{|\vec{a}|^2} - \frac{(\vec{b} \cdot \vec{p})^2}{|\vec{b}|^2} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

ここで, 2つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ の内積

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

を定義すると, ベクトルの内積と同様に

$$\begin{aligned} \langle f(t), g(t) \rangle &= \langle g(t), f(t) \rangle \\ k \langle f(t), g(t) \rangle &= \langle kf(t), g(t) \rangle = \langle f(t), kg(t) \rangle \quad (k \text{ は定数}) \\ \langle f(t), g(t) + h(t) \rangle &= \langle f(t), g(t) \rangle + \langle f(t), h(t) \rangle \\ |f(t)|^2 &= \langle f(t), f(t) \rangle \end{aligned}$$

が成立する. 例えば,

$$\begin{aligned} \left\langle 1, t - \frac{1}{2} \right\rangle &= \int_0^1 1 \left(t - \frac{1}{2} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} \right]_0^1 = 0, \\ \left| t - \frac{1}{2} \right|^2 &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \left[\frac{1}{3} \left(t - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}, \\ \langle 1, \sin 2n\pi t \rangle &= \int_0^1 \sin 2n\pi t dt = -\frac{1}{2n\pi} \left[\cos 2n\pi t \right]_0^1 = 0, \\ \left\langle t - \frac{1}{2}, \sin 2n\pi t \right\rangle &= \langle t, \sin 2n\pi t \rangle - \frac{1}{2} \langle 1, \sin 2n\pi t \rangle = \langle t, \sin 2n\pi t \rangle \\ &= \int_0^1 t \sin 2n\pi t dt = \left[-\frac{t}{2n\pi} \cos 2n\pi t + \frac{1}{4n^2\pi^2} \sin 2n\pi t \right]_0^1 = -\frac{1}{2n\pi}, \\ |\sin 2n\pi t|^2 &= \int_0^1 \sin^2 2n\pi t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 4n\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{4n\pi} \sin 4n\pi t \right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$f(t) - \frac{\langle e(t), f(t) \rangle}{|e(t)|^2} e(t)$ は $e(t)$ と直交するから, $t - \frac{1}{2}$ は 1 と直交することに注意して

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt &= |\sin 2n\pi t - xt - y|^2 \\ &= \left| \sin 2n\pi t - x \left(t - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{x}{2} + y \right) \right|^2 \end{aligned}$$

ここで, $p(t) = \sin 2n\pi t$, $f(t) = t - \frac{1}{2}$, $e(t) = 1$ とすると, (*) により

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt &= \left| p(t) - xf(t) - \left(\frac{x}{2} + y \right) e(t) \right|^2 \\ &\geq |p(t)|^2 - \frac{\langle f(t), p(t) \rangle^2}{|f(t)|^2} - \frac{\langle e(t), p(t) \rangle^2}{|e(t)|^2} \end{aligned}$$

(*) および前ページの結果から

$$x = \frac{\langle f(t), p(t) \rangle}{|f(t)|^2} = \frac{-\frac{1}{2n\pi}}{\frac{1}{12}}, \quad \frac{x}{2} + y = \frac{\langle e(t), p(t) \rangle}{|e(t)|^2} = 0$$

すなわち, $x = -\frac{6}{n\pi}$, $y = \frac{3}{n\pi}$ のとき, 最小値

$$|p(t)|^2 - \frac{\langle f(t), p(t) \rangle^2}{|f(t)|^2} - \frac{\langle e(t), p(t) \rangle^2}{|e(t)|^2} = \frac{1}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2n\pi}\right)^2}{\frac{1}{12}} - 0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2}$$

をとる.

原点 O , $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ とし $(\vec{a} \perp \vec{b})$, 平面 OAB 上にない点 $P(\vec{p})$ について, ベクトル

$$\vec{h} = \vec{p} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{p})}{|\vec{a}|^2} \vec{a} - \frac{(\vec{b} \cdot \vec{p})}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

が \vec{a} および \vec{b} と垂直で, $|\vec{p} - m\vec{a} - n\vec{b}|^2$ は $m = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{p})}{|\vec{a}|^2}$, $n = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{p})}{|\vec{b}|^2}$ のとき, 最小となる.

同様に, $e(t)$ と $f(t)$ が直交するから, 関数 (直交関数)

$$h(t) = p(t) - \frac{\langle f(t), p(t) \rangle}{|f(t)|^2} f(t) - \frac{\langle e(t), p(t) \rangle}{|e(t)|^2} e(t)$$

は, $e(t)$ および $f(t)$ と直交する. このとき, $|p(t) - xt - y|^2$ の最小値を与える.

3.5.2 5 番 メビウス変換

補足 $z = i \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ を $w = \frac{z+1}{-z+1}$ に代入すると 問 解

$$w = \frac{i \tan \theta + 1}{-i \tan \theta + 1} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$-\pi < 2\theta < \pi$ より, w は点 -1 を除く原点 O を中心とする単位円周上にある.

解説 一般に, 1 次分数式変換 (メビウス変換)

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \text{ は複素数, } ad - bc \neq 0)$$

は, 拡大縮小 (回転) kz , 平行移動 $z + \alpha$, 反転 $\frac{1}{z}$ の合成変換である.
特に反転に関して, 次の性質がある⁴.

- 原点を通らない円は, 原点を通らない円に移る.
- 原点を通る円は, 原点を通らない直線に移る.
- 原点を通らない直線は, 原点を通る円から原点を除いた図形に移る.
- 原点を通る直線は, 原点を通る直線から原点を除いた図形に移る.

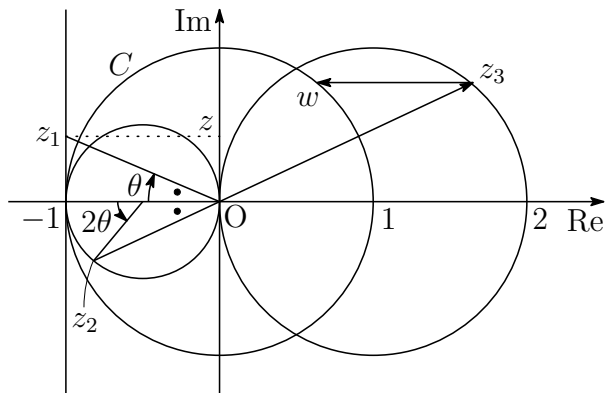
次の変換 (平行移動, 反転, 拡大縮小, 平行移動)

$$f_1(z) = z - 1, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = -2z, \quad f_4(z) = z - 1$$

について, 合成変換 $f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ は $f(z) = \frac{z+1}{-z+1}$

$z = i \tan \theta, z_1 = f_1(z), z_2 = f_2(z_1), z_3 = f_3(z_2), w = f_4(z_3)$ とすると

$$\begin{aligned} z_2 = f_2 \circ f_1(z) &= \frac{1}{i \tan \theta - 1} = \frac{-\cos \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} \\ &= -\cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \end{aligned}$$



⁴http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri.2017.pdf [3] の解説を参照.