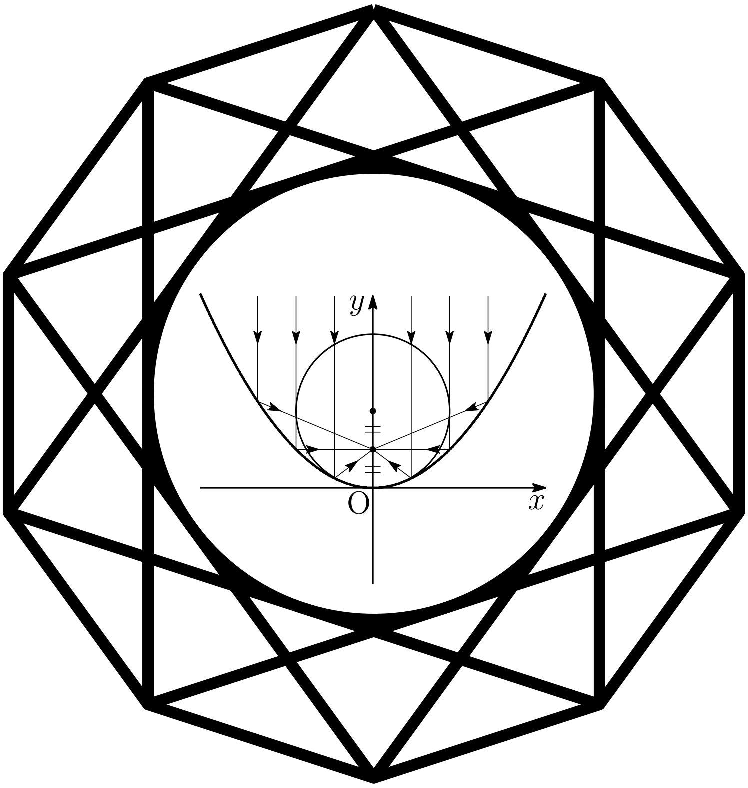
入試の軌跡

九州大学　理系

2001 − 2014

数学



2021 年 12 月 22 日

Typed by LaTeX 2_ε

序

本書は，九州大学経済学部 (経済工)・理学部・医学部 (保健 [看護] を除く)・歯学部・薬学部・工学部・芸術工学部・農学部受験者のための入試問題集である．

本書には，平成 13 年 (2001 年) 度から平成 26 年 (2014 年) 度までの 2 次試験前期日程の数学問題をすべて掲載した．第 1 章には問題を掲載し，第 2 章には解答，第 3 章には解説を付けた．

また，年度ごとの問題および解答については，次のサイトに掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/plan/

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．
2. 本書は，電子文書 (PDF) での利用を想定し，ハイパーリンクを施した．利用する際には，全画面表示 (Ctrl+L) および描画領域に合わせる (Ctrl+3) と見やすくなる．ページスクロールには，(Ctrl+▲，Ctrl+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る (Alt+◀)，進む (Alt+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するにはESC.
3. 本書の最新版は，次のサイトにある．

http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf

平成 26 年 3 月　編者

目 次

第 1 章　一般前期問題

2003 年度以前の入試は，必答問題 3 題と，選択問題 3 題を 1 グループとした 2 グループから 1 題ずつ選んで 150 分で解答する形式であった．2004 年度入試以降は選択問題はなくなり，必答問題 5 題を 150 分で解答する現在の形式になった．

九大入試の特徴として，教科書にある公式の証明問題，教科書の典型的な問題についても確かな理解と応用力を問う問題が出題される．一方で，大学数学で扱う基本的な概念に因んだ問題が出題されることがあり，理学部数学教室や経済学部経済工学科らしさ (確率論) が随所に見られる．2009 年度入試においては，5 題中 2 題が微分幾何学の基本的な概念に由来するものであった．

2005 年度まで出題されていた複素数平面が 2015 年度から復活することになり，当時の頻出問題であったと比較的難易度が高かったことにも注意しておきたい．とくに，2014 年度入試においては，来年度からの新課程を意識した整数問題が出題されている．ユークリッドの互除法や合同式についても学習しておく必要があるようだ．

出題分野

2001 年度 (1〜3 必答，4〜6 から 1 題選択，7〜9 から 1 題選択)

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	微分法	関数の単調増加
2	標準	数学 III	微分法	3 次関数の対称性
3	標準	数学 III	積分法	円柱と正四角柱の共通部分の体積
4	標準	旧課程	複素数平面	複素数平面上の軌跡
5	標準	数学 III	極限	はさみうちの原理
		数学 C	確率分布	期待値の加法定理
6	やや易	数学 B	コンピュータ	自然数を 2 で割り続けるアルゴリズム
7	やや難	数学 III	微分法	曲線の媒介変数表示
			積分法	弧長
8	やや難	数学 III	積分法	区分求積法とその収束性
9	標準	数学 C	行列	係数行列と整数問題

2002 年度 (1〜3 必答，4〜6 から 1 題選択，7〜9 から 1 題選択)

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 III	微分法	媒介変数表示
			積分法	面積
2	難	数学 I	実数	整数問題
3	標準	数学 III	微分法	関数の最小値
			積分法	定積分の大小関係
4	やや難	数学 B	空間のベクトル	三角形の面積
5	やや難	旧課程	複素数平面	三角形の垂心
6	やや難	数学 A	確率	1 次元ランダム・ウォーク
7	標準	数学 III	微分法	楕円と点の位置関係
8	標準	数学 III	微分法	ニュートン法
9	標準	数学 C	行列	べき等行列

2003 年度 (1〜3 必答，4〜6 から 1 題選択，7〜9 から 1 題選択)

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	やや難	数学 III	積分法	媒介変数表示された曲線と回転体の体積
2	標準	数学 II	図形と領域	絶対値のついた不等式の表す領域
3	やや難	数学 III	極限	はさみうちの原理
			積分法	格子点と面積
4	標準	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの空間図形への応用
5	標準	旧課程	複素数平面	直線と曲線の共有点の個数
6	標準	数学 C	確率分布	二項分布
7	標準	数学 C	行列	対称行列による 1 次変換
8	標準	数学 II	微分法	放物線の 2 接線
9	標準	数学 III	積分法	面積による不等式の証明

2004 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	やや難	数学 III	極限	数列の極限
			積分法	定積分
2	やや易	数学 C	行列	行列の n 乗
3	標準	数学 III	微分法	関数の増減
			積分法	面積
4	標準	数学 B	空間のベクトル	四面体の体積
5	標準	数学 A	確率	余事象の確率
		数学 C	確率分布	2 項分布 (旧課程では数学 B)

2005 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	易	数学 III	微分法	接線の方程式
			積分法	回転体の体積
2	標準	数学 C	行列	行列の n 乗
3	標準	数学 II	複素数と方程式	2 次方程式の虚数解
		旧課程	複素数平面	極形式
4	やや難	数学 II	三角関数	三角不等式
			指数関数と対数関数	対数不等式
5	やや易	数学 III	微分法	グラフの概形，中間値の定理
			積分法	面積

2006 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 III	極限	はさみうちの原理
			微分法	方程式の解と関数のグラフ
2	やや易	数学 B	平面上のベクトル	位置ベクトル，内積
3	やや難	数学 B	数列	数学的帰納法，背理法
4	標準	数学 II	三角関数	三角関数のグラフ
		数学 III	積分法	三角関数の積分
5	やや難	数学 III	関数	ロジスティック写像

2007 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 III	微分法	接線の方程式，関数の増減
			積分法	面積
2	標準	数学 C	行列	行列の漸化式
3	標準	数学 B	空間のベクトル	四面体の体積の最大値
4	標準	数学 A	確率	さいころの目を係数とする 2 次方程式
5	難	数学 II	三角関数	三角関数の基本周期

2008 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 III	関数	逆関数
			極限	極限値
2	標準	数学 A	確率	カードの得点の確率とその期待値
3	標準	数学 B	平面上のベクトル	面積比と線分の比
4	標準	数学 III	微分法	2 曲線の共通接線
			積分法	面積
5	やや難	数学 II	三角関数	円に外接する半径の異なる円の個数

2009 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	易	数学 B	平面上のベクトル	定点と半直線上の点との距離の最小値
2	標準	数学 A	確率	n 枚のカード和が偶数となる確率
3	標準	数学 III	微分法	法線群の包絡線
			積分法	面積
4	難	数学 C	行列	単位ベクトルの1次変換
5	やや難	数学 III	微分法	曲線上の動点の速度 (加速度) ベクトル

2010 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	やや易	数学 I	三角比	余弦定理
2	やや難	数学 A	確率	さいころを振ったときの得点の期待値
3	標準	数学 III	極限	無限等比級数
			微分法	接線の方程式
4	標準	数学 III	積分法	サイクロイド，面積，弧長
5	難	数学 C	行列	1次変換
			2次曲線	2次曲線の分類

2011 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 III	積分法	無理関数と面積
2	標準	数学 III	微分法	関数のグラフと方程式の解の個数
3	標準	数学 B	数列	周期関数とフェルマーの小定理
4	やや易	数学 B	空間のベクトル	点と平面の距離，四面体の体積
5	標準	数学 A	確率	カードの並べ替えの確率と期待値

2012 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 III	積分法	回転体の体積
2	標準	数学 C	行列	A，B の積に関する循環群
3	標準	数学 I	2次関数	関数のグラフと方程式の解
		数学 III	極限	数列の上限と下限
4	標準	数学 III	極限	無理数を解とする有理方程式
5	やや難	数学 A	確率	マルコフ連鎖

2013 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 III	極限	極限値
			積分法	面積
2	標準	数学 B	空間のベクトル	平面に垂直なベクトル
3	標準	数学 A	確率	確率，期待値
4	標準	数学 III	積分法	回転体の体積
5	やや難	数学 C	行列	ハミルトン・ケリーの定理

2014 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	やや易	数学 III	微分法	接線の方程式
			積分法	回転体の体積
2	標準	数学 A	論理と集合	無限降下法
3	標準	数学 II	図形と方程式	最大・最小
		数学 C	2 次曲線	楕円と直線の共有点
4	標準	数学 A	場合の数と確率	期待値
5	やや難	数学 III	微分法	ロルの定理

出題分野 (2004-2014)

		04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
I	方程式と不等式											
	2 次関数									3		
	図形と計量							1				
II	式と証明											
	複素数と方程式		3									
	図形と方程式											3
	三角関数		4	4	5	5						
	指数関数と対数関数		4									
	微分法と積分法											
III	関数			5		1						
	極限	1		1		1		3		3 4	1	
	微分法	3	1 5	1	1	4	3 5	3	2			1 5
	積分法	1 3	1 5	4	1	4	3	4	1	1	1 4	1
A	場合の数と確率	5			4	2	2	2	5	5	3	4
	論理と集合											2
	平面図形											
B	平面上のベクトル			2		3						
	空間のベクトル	4			3		1		4		2	
	数列			3					3			
	複素数平面 (旧課程)		3	×	×	×	×	×	×	×	×	×
C	行列	2	2		2		4	5		2	5	
	2 次曲線							5				3
	確率分布											

1〜5 は問題番号

1.1　2001 年度

$\boxed{1}$〜$\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$〜$\boxed{6}$ から 1 題選択，$\boxed{7}$〜$\boxed{9}$ から 1 題選択

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = \dfrac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a = 0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$ 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) 直線 $mx + ny = 0$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。ただし m，n は共には 0 でないとする。

(4) G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

$\boxed{3}$ 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は一辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。$0 < r \leqq \sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

(1) 高さが $z = t\ (-r \leqq t \leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2) K の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3) $0 < r \leqq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。

4 複素数平面上の点 z を考える。

(1) 実数 a，c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p，q に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q}) = \overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか。

5 サイコロを n 回振って，出た目を小さい方から順に並べ，第 i 番目を X_i $(i = 1, \cdots, n)$ とする。

(1) $n = 7$ のとき，3 の目が 3 回，5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。

(2) 一般の n に対して，$X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ。

(3) 一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(E(X_1) - 1)$ を求めよ。ここで log は自然対数を表す。

(5) 一般の n に対して，期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ。

6 m，n を自然数とする。次の算法を考える。

(a) $i = m$，$j = n$，$k = 0$.

(b) $i = 1$ ならば $\mathrm{Ans} = k + j$ として終了する.

(c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする.

(d) $i = [i/2]$.　(e) $j = 2 * j$.　(f) (b) にもどる.

(ここで，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。)

(1) $m = 100$ のとき，3 周目と 4 週目の (b) における i，j，k の値を求めよ。たとえば 1 周目では $i = 100$，$j = n$，$k = 0$ である。

(2) 一般の m に対して，(b) における i，j，k の値について $i * j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。

(3) 一般の m に対して，Ans を求めよ。

(4) l を自然数とする。$m = 3{\cdot}2^l$ のとき，終了するまでに何回 (d) を実行するか。

7 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし，関数 $y = f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。

ただし，$\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2} < \theta(t) < \dfrac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする。また，点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2) $\alpha(t)$，$\beta(t)$ を求めよ。

(3) t が a から b $(a < b)$ まで変化するとき，点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1，L_2 とする。$L_2 - L_1$ を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。

8 (1) e を自然対数の底とし，$f(x) = e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2}x^2\right)$ とおく。

$0 < x < 1$ においては $0 < f(x) < x^3$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ を示せ。

必要であれば $e < 3$ を使ってよい。

(2) 関数 $g(x) = e^x$ を考える。区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 個の小区間に等分して，各小区間を底辺，小区間の左端の点における関数 $g(x)$ の値を高さとする長方形の面積の和を K_n とする。$n \to \infty$ のとき

$$n^k \left| \int_0^1 g(x)\,dx - K_n \right|$$

が有限の値に収束するような最大の自然数 k とそのときの極限値を求めよ。

9 p，q を整数とし，x，y を未知数とする連立 1 次方程式 $\begin{cases} 4x + 9y = p \\ 2x + 6y = q \end{cases}$ を考える。

(1) この方程式を行列を用いて表し，係数行列の逆行列を求めよ。

(2) 上の連立方程式の解 x，y が共に整数であるような組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。ただし $0 \leqq p \leqq 5$，$0 \leqq q \leqq 5$ とする。

(3) 正の整数 d で，「d のどんな倍数 p，q に対しても上の連立方程式の解 x，y が整数になる」ものが存在することを示せ。

(4) (3) における d のうちで最小のものを求めよ。

1.2　2002年度

$\boxed{1}$〜$\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$〜$\boxed{6}$ から1題選択，$\boxed{7}$〜$\boxed{9}$ から1題選択

$\boxed{1}$ 平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}$$

で表されている。ただし，e は自然対数の底である。原点を O，点 $(0,\ 1)$ を M とする。t が $t \geqq 0$ の範囲で変化したとき点 P が描く曲線を C とする。時刻 t において，曲線 C，線分 OM，および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し，曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 x，y に対して y を x を用いて表せ。

(2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ。

(3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ。

$\boxed{2}$ 正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。たとえば $f(1) = 1$ であり，$a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15) = 24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$ が成り立つことを示せ。

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする。このとき $f(a) \geqq (p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3) 正の偶数 a，b は，ある整数 m，n とある奇数 r，s を用いて $a = 2^m r$，$b = 2^n s$ のように表すことができる。このとき a，b が

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$$

をみたせば，r，s は素数であり，かつ $r = 2^{n+1} - 1$，$s = 2^{m+1} - 1$ となることを示せ。

3 次の問いに答えよ。

(1) すべての正の実数 x，y に対して，不等式

$$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2) a，b は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ をみたす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) a，b は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とする。不等式

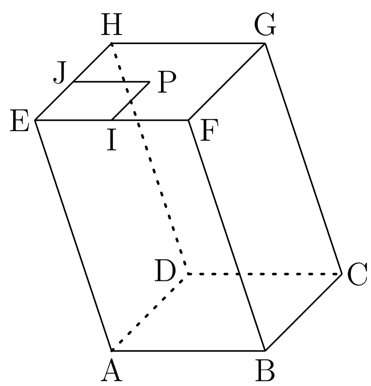
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。

4 空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) 右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = 2$ とし，$\angle\mathrm{FBC} = \angle\mathrm{BCD} = \dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{EAB} = \theta$ とする。ここで θ は $0 < \theta < \pi$ なる定数とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x = |\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y = |\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，$\triangle$ACP の面積を θ，x，y を用いて表せ。



(平行六面体 ABCD-EFGH)

(3) (2) で点 P が面 EFGH 上を動くとき，$\triangle$ACP の面積の最小値を求めよ。

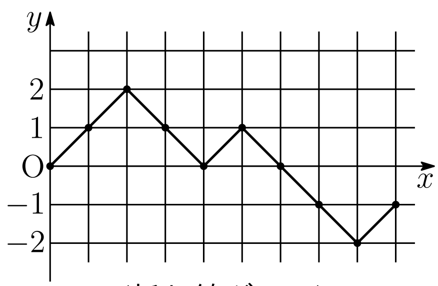
5 複素数平面上の原点を中心とする半径1の円 C 上に相異なる3点 z_1，z_2，z_3 をとる．次の問いに答えよ。

(1) $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は3点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで三角形の**垂心**とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした3本の垂線の交点のことであり，これら3本の垂線は1点で交わることが知られている。

(2) $w_2 = -\overline{z}_1 z_2 z_3$ とおく。$w_2 \neq z_1$ のとき，2点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで $\overline{z}_1$ は z_1 に共役な複素数である。

(3) 2点 z_2，z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点は，点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点であることを示せ。ただし，$w_1 = w_2$ のときは，w_1 と w_2 の中点は w_1 と解釈する。

6 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という。与えられた格子点を第1番目とし，この点から右斜め45°，または右斜め $-45°$ の方向にもっとも近い第2番目の格子点をとり，この2点を線分で結ぶ。同様にして第2番目の格子点から第3番目の格子点をとり，第2番目と第3番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする。右図に原点Oと格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す。次の問いに答えよ。



(折れ線グラフ)

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする。原点Oと格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n+k$ が偶数であることを示せ。また，この必要十分条件がみたされているとき，原点Oと格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。

(2) n は2以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq n-2$ なる整数で，$n+k$ は偶数とする。原点Oと格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも1つを通る折れ線グラフの数は，原点Oと格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の2倍に等しいことを示せ。

(3) コインを9回投げる。1回から i 回までの試行において，表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i,\ T_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, 9$，を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる。ただし，$T_0 = 0$ とする。$T_9 = 3$ が起きたとき，どの T_i $(i = 1, 2, \cdots, 7)$ も3にならない条件つき確率を求めよ。

$\boxed{7}$ 平面上の点 P の x 座標と y 座標が，変数 θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2}+\dfrac{1}{2}$ を用いて $\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$ と表されている。θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で変化したとき，点 P が描く曲線を C とする。点 P を $\mathrm{P}(\theta)$ で表し，$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}(0)$，$\mathrm{P}_2=\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{P}_3=\mathrm{P}(\pi)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする。このとき，点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる (ただし，楕円の上にない) ための必要十分条件を α のみを用いて表せ。

(2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする。l の方程式を求めよ。

(3) 次の条件 (i)，(ii)，(iii) をみたす楕円 D を考える。

(i) D の軸の一つは x 軸上にある。

(ii) D は点 P_1，P_2 を通る。

(iii) 点 P_2 における D の接線は l である。

このとき，点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ。

$\boxed{8}$ 正の実数 a の 3 乗根 $\sqrt[3]{a}$ を近似することを考える。与えられた 2 以上の整数 p に対して関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x)=x^p-ax^{p-3} \\ g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

とする。ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。次の問いに答えよ。

(1) $g(x)-\sqrt[3]{a}$ は

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^2\times\frac{x\text{ の 2 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(2) $p=2$ とする。このとき，$g(x)-\sqrt[3]{a}$ は

$$g(x)-\sqrt[3]{a}=(x-\sqrt[3]{a})^3\times\frac{x\text{ の 1 次式}}{x\text{ の 3 次式}}$$

の形で表されることを示せ。

(3) $a=9$，$p=2$ とする。$2<\sqrt[3]{9}<2.1$ に注意して，不等式

$$0<\sqrt[3]{9}-g(2)<\frac{1}{1000}$$

が成り立つことを示せ。また，$\sqrt[3]{9}$ を小数第 3 位まで求めよ (すなわち，小数第 4 位以下を切り捨てよ)。

$\boxed{\mathbf{9}}$ 2次の正方行列 A が零行列でなく $A^2 = A$ をみたすとき，**べき等行列**という。次の問いに答えよ。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ はべき等行列であり，かつ $ad - bc \neq 0$ とする。このとき，A を求めよ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad - bc = 0$ をみたすとする。このとき，A がべき等行列であるための必要十分条件を a と d のみを用いて表せ。

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ はともにべき等行列とする。$A + B$ がべき等行列になるとき，$A + B$ を求めよ。また，そのような A，B の組を一つあげよ。

1.3 2003 年度

$\boxed{1}$〜$\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$〜$\boxed{6}$ から 1 題選択，$\boxed{7}$〜$\boxed{9}$ から 1 題選択

$\boxed{1}$ xy 平面上で，　$x = r(t)\cos t,\quad y = r(t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$

で表される曲線を C とする。

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき，x の最小値と y の最大値を求め，C の概形を図示せよ。

(2) 一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right) dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3) (1) で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積は $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t\,dt$ と表せることを示せ。

$\boxed{2}$ 座標平面上で，不等式　$2|x-4| + |y-5| \leqq 3,\quad 2\Big||x|-4\Big| + \Big||y|-5\Big| \leqq 3$

が表す領域を，それぞれ A，B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x |y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形 (周は含まない) を単位正方形と呼ぶことにする。p，n を自然数とし，領域

$$D_n = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x,\ x^p \leqq y \leqq n\}$$

を考え，その面積を S_n とする。L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1) グラフ $y = x^p$ $(0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}})$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また，面積 S_n を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ。

4 空間内に四面体 OABC があり，∠AOB，∠BOC，∠COA はすべて 90° であるとする。辺 OA，OB，OC の長さを，それぞれ a，b，c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) ∠OGA，∠OGB，∠OGC がすべて 90° であるための条件を a，b，c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を 1 : 2 に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

5 $0 < a < 1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を ℓ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が ℓ 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2) 直線 ℓ を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。

6 座標平面上に (0, 0)，(1, 0)，(1, 1)，(0, 1) を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて，$y \leqq x(a-x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし，$0 < a \leqq 2$ とする。

(1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。

(2) 1 回目は $a = \dfrac{1}{2}$，2 回目は $a = \dfrac{3}{2}$ として，ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。

(3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であり，当たりの数の期待値が $\dfrac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。

7 座標平面上に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ があり，P は $|a| \leqq \dfrac{1}{2}$，$|b| \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動く。また，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標は連立 1 次方程式 $AX = B$ の解になっている。

ただし，　$A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}$　である。

(1) 点 P が原点 O にあるときの点 Q の位置を点 R とする。$\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ のとき，$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}$ の最大値を求め，その最大値を与える点 P の全体を図示せよ。

(2) OQ の最小値と，その最小値を与える点 P の座標を求めよ。

8 θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2 > 4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ に引いた二つの接線の接点を Q，R とし，接線 PQ，PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle\mathrm{QPR} = \theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1) $m_1 < 0 < m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2) G を数式で表せ。

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。

9 n を 2 以上の自然数とする。数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}$ で与えられている。

(1) 不等式　$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$　が成り立つことを示せ。

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して，$\Delta c_k = c_{k+1} - c_k\ (k = 1, 2, \cdots)$ とおく。数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}\Delta a_k$$

が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right)p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ。

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log_n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ。

1.4 2004 年度

1 $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$I_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx$$

とおく。ただし，$0! = 1$ とする。

(1) I_0 の値を求め，$n = 1, 2, \cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また，これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ に対して $e^x \leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx \leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。

2 2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ。ただし，a，b は定数とする。

(1) $(a+b)^4$，$(a-b)^4$ を展開せよ。

(2) A^4 を $(a+b)^4$，$(a-b)^4$ を用いて表せ。

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ。

(4) $0 < a < 1$ とし $b = 1 - a$ としたときの A^n の $(1,\ 1)$ 成分を x_n とする。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

3 座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x(t) = \cos\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases} \qquad (0 \leqq t < 2\pi)$$

で与えられているとし，この点の軌跡を C とする。

(1) P が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。

(2) C が x 軸，y 軸に関して対称であることを示せ。

(3) C の概形を描け。

(4) C が囲む図形の面積を求めよ。

4 座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad x \geqq y, \quad 0 \leqq z \leqq 1$$

を考え，その xy 平面内の面を S，xz 平面内の面を T とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし，点 A，B は原点 O とは異なるとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。ただし，点 O，A，B，C は同一平面上にないとする。

(3) 点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする。このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A，B の位置をすべて求めよ。

5 n を 3 以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる。これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れたあと，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1) 赤青 $\cdots$ 青，赤赤青 $\cdots$ 青，$\cdots$ のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3) 色の変化がちょうど m 回 $(0 \leqq m \leqq n-1)$ 起きる確率を求めよ。

(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

1.5　2005年度

1 直線 $\ell : y = x + a$ が曲線 $C : y = 2\sin x$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ に接しているとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq 0$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた図形の $y \geqq 0$ の範囲にある部分を，x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。

2 行列 A と列ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，列ベクトル $\vec{p}_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を

$$\vec{p}_1 = \vec{a},\quad \vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n + \vec{b}\quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ を満たす列ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

(2) $\vec{q}_n = \vec{p}_n - \vec{p}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおく。$\vec{q}_{n+1}$ と $\vec{q}_n$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) $n = 1, 2, \cdots$ に対して A^n を求めよ。

(4) $\vec{p}_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ。

3 t を実数とするとき，2次方程式

$$z^2 + tz + t = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この2次方程式が異なる2つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1) の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が (1) で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3) 複素数平面上で，点 z が (2) の図形 C 上を動くとき，

$$w = \frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が動く図形を求め，図示せよ。

$\boxed{4}$ 実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば，$\left[\frac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0<\theta<\pi$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ 実数 t が $t\geqq 0$ の範囲を動くとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}(t^2,\ e^{-t})$ が描く曲線を C とする。a を正の実数とし，曲線 C と x 軸，y 軸および直線 $x=a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) $a>0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}ae^{-a}=0$ であることを用いてよい。

(3) $S(a)=1.35$ となる a が $2<a<3$ の範囲に存在することを示せ。ただし，必要なら $2.5<e<3$ であることを用いてよい。

1.6 2006 年度

1 次の問いに答えよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい。

(1) 自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1) の 2 つの実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，

$$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\quad ne<\beta_n$$

が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ。

2 △OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点を P とする。ただし，$0<\alpha<1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし，Q を通り，線分 AM に垂直な直線が，辺 OA またはその延長と交わる点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および α を用いて表せ。

(2) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ で $\cos\theta=\dfrac{1}{6}$ とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と α を用いて表せ。

(3) (2) の条件のもとで，点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ。

3 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，$a_1=b_1=1$ および，関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n$$
$$b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$$

をみたすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

4 関数

$$f(x) = \left| \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right|$$

を考える。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。さらに，$0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，

$$F(a) = \int_0^a f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) $F(a)$ を求めよ。

5 区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは，

$$a \leqq x \leqq b \text{ ならば，} \quad a \leqq f(x) \leqq b$$

が成り立つこととする。$f(x) = 4x(1-x)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。

(2) $0 < a < b < 1$ とする。このとき，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。

1.7 2007年度

1 $f(x) = xe^x$ とおく。また p を $p \geqq 0$ を満たす数とし，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) L を正の数とする。曲線 $y = f(x)$，接線 $y = g(x)$，および 2 直線 $x = 0$，$x = L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき，$p \geqq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。

2 p を $0 < p < 1$ を満たす数とし，行列 A，B，C をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに，行列 A_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$A_1 = A,\quad A_{n+1} = A_nB - BA_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A_2，A_3 を求めよ。

(2) $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$，$\Delta_n = a_nd_n - b_nc_n$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Delta_n$ を求めよ。

3 a，b を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a, -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a, -b)$ を考える。A，B，C を通る平面を α，原点 O を中心とし A，B，C を通る球面を S とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。

4 さいころを 3 回続けて投げて出た目を順に a，b，c とする。これらの数 a，b，c に対して 2 次方程式

$$(*) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

を考える。ただし，さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの実数の解をもつとき，積 ac の取りうる値を求め，積 ac の各値ごとに可能な a と c の組 $(a,\ c)$ がそれぞれ何通りあるかを求めよ。

(2) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし，一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい。

5 関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して，つねに $f(x+p) = f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい，p を周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば，関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y = |\sin x|$ のグラフをかき，関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ。

(2) 自然数 m，n に対して関数 $f(x)$ を $f(x) = |\sin mx| \sin nx$ とおく。p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f\left(\dfrac{p}{2}\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = 0$ が成り立つことを示せ。また，このとき mp は π の整数倍であり，np は 2π の整数倍であることを示せ。

(3) m，n は 1 以外の公約数をもたない自然数とする。(2) の結果を用いて関数 $|\sin mx| \sin nx$ の基本周期を求めよ。

1.8 2008年度

1 $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ。

2 1から10までの番号が1つずつ書かれた10枚のカードがある。k を2から9までの整数の1つとする。よくきった10枚のカードから1枚を抜き取り，そのカードの番号が k より大きいなら，抜き取ったカードの番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら，そのカードを戻さずに，残りの9枚の中から1枚を抜き取り，2回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 得点が1である確率と10である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 2以上9以下の整数 n に対して，得点が n である確率を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。

3 △OABにおいて，辺AB上に点Qをとり，直線OQ上に点Pをとる。ただし，点Pは点Qに関して点Oと反対側にあるとする。3つの三角形△OAP，△OBP，△ABPの面積をそれぞれ a，b，c とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a，b を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a，b，c を用いて表せ。

(3) 3辺OA，OB，ABの長さはそれぞれ3，5，6であるとする。点Pを中心とし，3直線OA，OB，ABに接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

4 $a>0$ に対して，$f(x)=a+\log x\ (x>0)$，$g(x)=\sqrt{x-1}\ (x\geqq 1)$ とおく。2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点で共通の接線 l を持つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ。

(2) 2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ。

(3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

5 いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ，互いに交わらないように配置する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。このとき，$\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。

1.9 2009年度

1 座標平面に3点O(0, 0)，A(2, 6)，B(3, 4)をとり，点Oから直線ABに垂線OCを下ろす。また，実数sとtに対し，点Pを

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点Cの座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$を$s$と$t$を用いて表せ。

(2) sを定数として，tを$t \geqq 0$の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$の最小値を求めよ。

2 kは2以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが1枚,「2」と書かれたカードが2枚，$\cdots$,「k」と書かれたカードがk枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数をM，奇数が書かれたカードの枚数をNで表す。この$(M+N)$枚のカードをよくきって1枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作をn回繰り返す。記録されたn個の数の和が偶数となる確率をp_nとする。次の問いに答えよ。

(1) p_1とp_2をM，Nで表せ。

(2) p_{n+1}をp_n，M，Nで表せ。

(3) $\dfrac{M-N}{M+N}$をkで表せ。

(4) p_nをnとkで表せ。

3 曲線$C_1 : y = \dfrac{x^2}{2}$の点$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$における法線と点$\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$における法線の交点をRとする。ただし，$b \neq a$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) bがaに限りなく近づくとき，Rはある点Aに限りなく近づく。Aの座標をaで表せ。

(2) 点Pが曲線C_1上を動くとき，(1)で求めた点Aが描く軌跡をC_2とする。曲線C_1と軌跡C_2の概形を描き，C_1とC_2の交点の座標を求めよ。

(3) 曲線C_1と軌跡C_2で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 2 次の列ベクトル X，Y，Z は大きさが 1 であり，$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ $Y \neq X$ とする。ただし，一般に 2 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2 + y^2}$ で定義される。また，2 次の正方行列 A が

$$AX = Y, \qquad AY = Z, \qquad AZ = X$$

をみたすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $Y \neq -X$ を示せ。

(2) Z は $Z = sX + tY$（s，t は実数）の形にただ一通りに表せることを示せ。

(3) $X + Y + Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を示せ。

(4) 行列 A を求めよ。

5 曲線 $y = e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}| = 1$ かつ $\dfrac{dx}{dt} > 0$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1) P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ。

(2) P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。

(3) P が曲線全体を動くとき，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。

1.10　2010年度

$\boxed{1}$ 三角形ABCの3辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t \geqq 0$ を与えたとき，Aを始点としBを通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点Pをとる。次の問いに答えよ。

(1) CP^2 を a，b，c，t を用いて表せ。

(2) 点Pが $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき，t を求めよ。

(3) (2)の条件を満たす点Pが辺AB上にちょうど2つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ。

$\boxed{2}$ 次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし，出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ，もう1回サイコロを振って，2つの目の合計を得点とすることができる。ただし，合計が7以上になった場合は0点とする。この取り決めによって，2回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

(1) 競技者が常にサイコロを2回振るとすると，得点の期待値はいくらか。

(2) 競技者が最初の目が6のときだけ2回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか。

(3) 得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに2回目を振るとよいか。

$\boxed{3}$ xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第1象限内の部分を C_1，第2象限内の部分を C_2 と呼ぶ。C_1 上の点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする。以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき，次の問い に答えよ。

(1) 点 Q_1 の座標を求めよ。

(2) 三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3) 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の面積 S_n を求めよ。

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

$\boxed{4}$ 中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ。

(2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) (2) の曲線 C の長さを求めよ。

$\boxed{5}$ 実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q が放物線 $9X = 2Y^2$ 全体の上を動くという。このとき，行列 A を求めよ。

(2) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q は常に円 $X^2 + (Y-1)^2 = 1$ の上にあるという。このとき，行列 A を求めよ。

(3) P が放物線 $y = x^2$ 全体の上を動くとき，Q がある直線 L 全体の上を動くための a，b，c，d についての条件を求めよ。また，その条件が成り立っているとき，直線 L の方程式を求めよ。

1.11 2011年度

1 曲線 $y = \sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t > 1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) $x \geqq 1$ の範囲において，曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(3) 曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 = S_2$ であるとき，t の値を求めよ。

2 a を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。

(2) $x \geqq 3$ のとき，不等式 $x^3 e^{-x} \leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに，極限値

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$$

を求めよ。

(3) k を定数とする。$y = x^2 + 2x + 2$ のグラフと $y = ke^x + a^2$ のグラフが異なる3点で交わるための必要十分条件を，a と k を用いて表せ。

3 数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 - {a_n}^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

をみたしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，一般項 a_n を求めよ。

(2) $\tan \dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1 = \tan \dfrac{\pi}{20}$ とするとき，

$$a_{n+k} = a_n, \quad n = 3, 4, 5, \cdots$$

をみたす最小の自然数 k を求めよ。

4 空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(0,\ 2,\ 3),\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 3),\ \mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$$

を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 4 点 O，A，B，C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。

(2) 3 点 A，B，C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

5 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1，2，3，4 と並べ，上の操作を n 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1) $n = 2$ のとき，カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶ確率を求めよ。

(2) $n = 2$ のとき，カードが左から順に 4，3，2，1 と並ぶ確率を求めよ。

(3) $n = 2$ のとき，左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

(4) $n = 3$ のとき，左端のカードの数字の期待値を求めよ。

1.12 2012 年度

1 円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

2 2 次の正方行列 A，B はそれぞれ

$$A\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix},$$

$$B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix},\qquad B\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$$

をみたすものとする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，E は 2 次の単位行列を表すものとする。

(1) 行列 A，B，A^2，B^2 を求めよ。

(2) $(AB)^3=E$ であることを示せ。

(3) 行列 A から始めて，B と A を交互に右から掛けて得られる行列

$$A,\quad AB,\quad ABA,\quad ABAB,\quad \cdots\cdots,$$

および行列 B から始めて，A と B を交互に右から掛けて得られる行列

$$B,\quad BA,\quad BAB,\quad BABA,\quad \cdots\cdots$$

を考える。これらの行列の内で，相異なるものをすべて成分を用いて表せ。

3 実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) この方程式が実数解を持つような a の範囲を，n を用いて表せ。

(2) この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解を持つような a の範囲を求めよ。

4 p と q はともに整数であるとする。2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 α，β を持ち，条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$ をみたしているとする。

このとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=(\alpha^n-1)(\beta^n-1) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3 は整数であることを示せ。

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき，p と q の値をすべて求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

5 いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，
箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,2,3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2) 試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,2,3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3) 試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

1.13 2013年度

1 $a>1$とし，2つの曲線

$$y=\sqrt{x} \qquad (x \geqq 0),$$
$$y=\frac{a^3}{x} \qquad (x>0)$$

を順にC_1，C_2とする。また，C_1とC_2の交点PにおけるC_1の接線をl_1とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線C_1とy軸および直線l_1で囲まれた部分の面積をaを用いて表せ。

(2) 点PにおけるC_2の接線と直線l_1のなす角を$\theta(a)$とする$\left(0<\theta(a)<\dfrac{\pi}{2}\right)$。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$を求めよ。

2 一辺の長さが1の正方形OABCを底面とし，点Pを頂点とする四角錐POABCがある。ただし，点Pは内積に関する条件$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}$，および$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}$をみたす。辺APを2 : 1に内分する点をMとし，辺CPの中点をNとする。さらに，点Pと直線BC上の点Qを通る直線PQは，平面OMNに垂直であるとする。このとき，長さの比BQ : QC，および線分OPの長さを求めよ。

3 横一列に並んだ6枚の硬貨に対して，以下の操作Lと操作Rを考える。

L: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表　と並んだ状態で操作Lを行うときに，3の目が出た場合は，裏裏表表裏表　となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が6枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作Lを2回続けて行うとき，表が1枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態からL，Rの順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態からL，R，Lの順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

4 原点 O を中心とし，点 A(0, 1) を通る円を S とする。点 B$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，円 T の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

5 実数 x，y，t に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える。$(AB)^2$ が対角行列，すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする。

(1) 命題「$3x-3y-2t \neq 0 \implies A = tB$」を証明せよ。

以下 (2)，(3)，(4) では，さらに $A^2 \neq E$ かつ $A^4 = E$ であるとする。ただし，E は単位行列を表す。

(2) $3x-3y-2t=0$ を示せ。

(3) x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(4) x，y，t が整数のとき，行列 A を求めよ。

1.14　2014年度

1 関数 $f(x)=x-\sin x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを ℓ とする。

(1) ℓ の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) a は (1) で求めたものとする。曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a，b，c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a，b，c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は存在しないことを証明せよ。

3 座標平面上の楕円

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \quad \cdots ①$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 楕円 ① と直線 $y=x+a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ。

(2) $|x|+|y|=1$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体がなす図形の概形をかけ。

(3) 点 $(x,\ y)$ が楕円 ① 上を動くとき，$|x|+|y|$ の最大値，最小値とそれを与える $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。

4 A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨を 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1) A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

5 2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する。$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。

第 2 章　一般前期解答

問題冊子 (B5 で 12 ページ) は，見開きで問題が偶数ページ，下書き (計算スペース) が奇数ページに配置されており，問題ページの下側の余白を含め十分な計算スペースがある．解答用紙は，$\boxed{\mathbf{13}}$～$\boxed{\mathbf{17}}$の番号が書かれた 5 枚の B4 用紙がはさみ込まれており，問題$\boxed{\mathbf{1}}$～$\boxed{\mathbf{5}}$を順次指定された解答用紙に答えるようになっている (2004 年度以降の必答 5 題の出題形式)．

設問ごとに解答欄が仕切られているため，十分な解答スペースではなく，途中の計算などを書いていくスペースはない (解答用紙の裏面の使用は不可)．そのため，問題用紙の下書き欄で計算した結果を整理して「理由と計算結果・結論」を明示する必要がある．なお，問題冊子は，試験終了後に持ち帰ることができる．

出題者は受験生に簡潔な表現力を要求したものと考えられる．理学部数学科の採点担当者からも，定積分の途中計算などを細かく書く必要はないと聞いた．

対策

1. 標準的な問題を中心に 3 題とやや難の 2 題が例年の出題傾向である．配点はすべて 50 点ずつの計 250 点であるので 150 分で効率的に問題を解いていく必要がある．なお，経済学部経済工学科は 350 点満点に換算される．

2. 完答が難しい問題についても，前半の設問はどれも基本または標準的な問題が配置されているので，確実に部分点を狙っていく必要がある．しかしながら，近年の傾向として，2012 年度の$\boxed{1}$や 2014 年度の$\boxed{5}$といった合否を分ける大問が出題されていることに注意したい．

3. 採点者が読みやすい簡潔な答案の作成を普段から練習しておく．

2.1　2001 年度

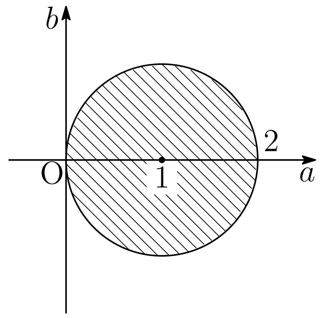
1 (1) $f(x)$ を微分すると，$f'(x) = 2ax^2 + 2(a+b)x + b + 1 \qquad \cdots (*)$

$a \neq 0$ のとき，すべての自然数 x に対して，$f'(x) \geqq 0$ となるための条件は

$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると　　$2a > 0,\ \ D \leqq 0$

$D/4 = (a+b)^2 - 2a(b+1) = a^2 + b^2 - 2a \cdots ①$ により

$$a > 0,\ \ (a-1)^2 + b^2 \leqq 1$$



$a = 0$ のとき　$f(x) = bx^2 + (b+1)x$ となる．

これがつねに増加するためには　$b = 0$

すなわち $f(x) = x$ となり，条件を満たす．

よって　$a > 0$ のとき　$(a-1)^2 + b^2 \leqq 1$

　　　　$a = 0$ のとき　$b = 0$

したがって　$(a-1)^2 + b^2 \leqq 1$

よって，右の図のような円 $(a-1)^2 + b^2 = 1$ の内部で，境界線を含む．

(2) $a = 0$ のとき　$f(x) = bx^2 + (b+1)x$

$b \geqq 0$ は，$x > -1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$f(x)$ を微分すると　　$f'(x) = 2bx + b + 1$

$b > 0$ のとき，$f'(-1) \geqq 0$ であることが条件であるから

$$b > 0,\ \ 2b(-1) + b + 1 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < b \leqq 1$$

$b = 0$ のとき　$f(x) = x$ となり，これは条件を満たす．

よって　　　　$\boldsymbol{0 \leqq b \leqq 1}$

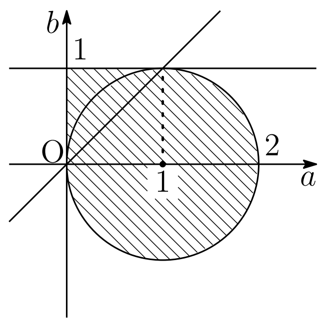
(3) $a \geqq 0$ は，$x > -1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$a = 0$ の場合が (2) であり，$a > 0$，$D \leqq 0$ の場合が (1) である．

したがって，$a > 0$，$D > 0$ の場合を求める．

$(*)$ より

$$f'(x) = 2a\left(x + \frac{a+b}{2a}\right)^2 - \frac{a^2 + b^2 - 2a}{2a}$$



ゆえに　$-\dfrac{a+b}{2a} \leqq -1$，$f'(-1) = -b + 1 \geqq 0$

$D > 0$ であるから，① より　$a^2 + b^2 - 2a > 0$

これを解いて　$a > 0$，$b \geqq a$，$b \leqq 1$，$(a-1)^2 + b^2 > 1$

求める領域は，右の図のように (1)，(2) の結果および上式をまとめた領域で，境界線を含む．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると $\dfrac{x+X}{2}=p$，$\dfrac{y+Y}{2}=q$

よって，求める点の座標は　$\boldsymbol{(2p-X,\ 2q-Y)}$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおくと，任意の定数 p に対して

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+(x-p)^3 \quad \cdots ①$$

が成り立つ．G の点 $(p,\ f(p))$ に関して $y=f(x)$ と対称なグラフは

$$2f(p)-y=f(2p-x) \quad \text{ゆえに} \quad y=2f(p)-f(2p-x) \quad \cdots ②$$

② のグラフは ① より

$$\begin{aligned} y &= 2f(p)-\Big\{f(p)+f'(p)(2p-x-p) \\ &\qquad\qquad +\frac{1}{2}f''(p)(2p-x-p)^2+(2p-x-p)^3\Big\} \\ &= f(p)+f'(p)(x-p)-\frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2+(x-p)^3 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

$f''(p)=0$，すなわち $p=-\dfrac{a}{3}$ とすると，①，③ は一致する．
したがって，G は変曲点に関して対称である．

(3) 直線 $mx+ny=0$ の法線ベクトル $\vec{n}$，方向ベクトル $\vec{d}$ を

$$\vec{n}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix},\quad \vec{d}=\begin{pmatrix} -n \\ m \end{pmatrix}$$

とすると，座標平面上の任意の位置ベクトル

$$s\vec{n}+t\vec{d} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$

は，この直線に関する対称移動により

$$-s\vec{n}+t\vec{d}$$

に移る．この対称移動を表す行列を A とすると

$$A(s\vec{n}+t\vec{d})=-s\vec{n}+t\vec{d} \quad \text{ゆえに} \quad sA\vec{n}+tA\vec{d}=s(-\vec{n})+t\vec{d}$$

上式は，s，t に関する恒等式であるから

$$A\vec{n}=-\vec{n},\quad A\vec{d}=\vec{d} \quad \text{ゆえに} \quad A\begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -m & -n \\ -n & m \end{pmatrix}$$

$m^2+n^2 \neq 0$ であるから　$A = \dfrac{1}{m^2+n^2}\begin{pmatrix} -m^2+n^2 & -2mn \\ -2mn & m^2-n^2 \end{pmatrix}$

求める点は A による $(X,\ Y)$ の像であるから

$$A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{m^2+n^2}\begin{pmatrix} -m^2+n^2 & -2mn \\ -2mn & m^2-n^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

よって　$\boldsymbol{\left(\dfrac{-(m^2-n^2)X-2mnY}{m^2+n^2},\ \dfrac{-2mnX+(m^2-n^2)Y}{m^2+n^2}\right)}$

(4) (3) の直線を ℓ とし，$p = -\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$，$q = -\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ とおく．ℓ に関して，$(x,\ y)$ と対称な点を $(X,\ Y)$ とすると

$$X = px+qy,\quad Y = qx-py$$

$(X,\ Y)$ が G 上にあるとき

$$qx-py = (px+qy)^3 + a(px+qy)^2 + b(px+qy) + c$$

これが，$y = x^3+ax^2+bx+c$ に一致するから　$q = 0$

このとき，ℓ の方程式から　　$p \neq 0$

したがって　　$-py = p^3x^3 + ap^2x^2 + bpx + c$

$p \neq 0$ より　　$y = -p^2x^3 - apx^2 - bx - \dfrac{c}{p}$

x^3 の係数を比較して　$-p^2 = 1$

これをみたす実数 p は存在しない．

よって，G は原点を通るどんな直線に関しても線対称ではない．

3　(1) 平面 $z=t\ (-r \leqq t \leqq r)$，円柱 $y^2+z^2 \leqq r^2$，正四角柱 $|x|+|y| \leqq \dfrac{2}{r}$ で囲まれた領域は

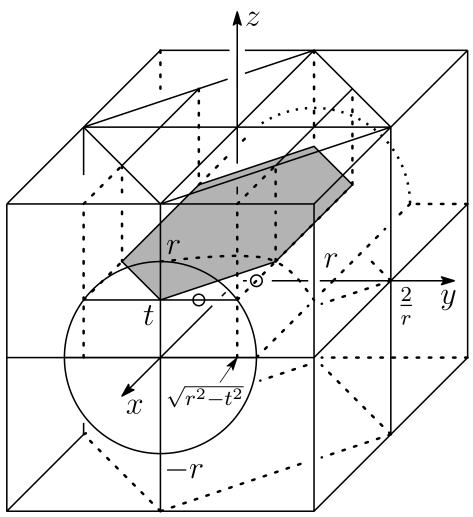
$$z=t,\quad -\sqrt{r^2-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-t^2},\quad -\left(\frac{2}{r}-|y|\right) \leqq x \leqq \frac{2}{r}-|y|$$

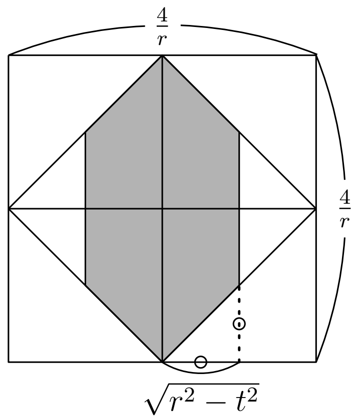
よって，求める面積を $S(t)$ とすると

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{-\sqrt{r^2-t^2}}^{\sqrt{r^2-t^2}} 2\left(\frac{2}{r}-|y|\right)dy = 4\int_0^{\sqrt{r^2-t^2}}\left(\frac{2}{r}-|y|\right)dy \\ &= 4\int_0^{\sqrt{r^2-t^2}}\left(\frac{2}{r}-y\right)dy = 4\left[\frac{2y}{r}-\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{r^2-t^2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}-2(r^2-t^2)} \end{aligned}$$

別解　K を $z=t$ で切った断面は下の図のようになる．

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{4}{r}\times 2\sqrt{r^2-t^2} - 4\times\frac{1}{2}(\sqrt{r^2-t^2})^2 \\ &= \frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}-2(r^2-t^2) \end{aligned}$$





(2) (1) の結果から，$V(r)$ は

$$
\begin{aligned}
V(r) &= \int_{-r}^{r} S(t)\,dt \\
&= \int_{-r}^{r} \left\{ \frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2} - 2(r^2-t^2) \right\} dt \\
&= \frac{16}{r}\int_0^r \sqrt{r^2-t^2}\,dt - 4\int_0^r (r^2-t^2)\,dt \\
&= \frac{16}{r}\cdot\frac{\pi r^2}{4} - 4\left[\, r^2 t - \frac{t^3}{3} \,\right]_0^r \\
&= \boldsymbol{4\pi r - \frac{8}{3}r^3}
\end{aligned}
$$

(3) $V(r) = 4\pi r - \dfrac{8}{3}r^3 \ (0 < r \leqq \sqrt{2})$ より

$$V'(r) = 4\pi - 8r^2 = -8\left(r + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\left(r - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

増減表は，次のようなる．

r	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める最大値は

$$V\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi^{\frac{3}{2}}}$$

$\boxed{4}$ (1) $az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ (a，c は実数) より

$$a^2z\overline{z}+a(\overline{b}z+b\overline{z})+b\overline{b}=b\overline{b}-ac$$

ゆえに　$(az+b)(a\overline{z}+\overline{b})=|b|^2-ac$

したがって　$|az+b|^2=|b|^2-ac$

$|b|^2-ac>0$ より　$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$

よって，z は中心 $\boldsymbol{-\dfrac{b}{a}}$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}}$ の円を描く．

(2) $d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$ より

$$i(d-\overline{d})z\overline{z}+i(\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q})z+i(\overline{d}q-dp)\overline{z}+i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)=0 \quad \cdots①$$

i) $d\neq\overline{d}$ のとき (d は虚数)

$$a=i(d-\overline{d}),\quad b=i(\overline{d}q-dp),\quad c=i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)$$

とおくと，a，c は実数であり，① から　$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$
したがって，(1) の結果により

$$\begin{aligned}|b|^2-ac&=b\overline{b}-ac\\&=i(\overline{d}q-dp)\cdot(-i)(d\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p})-i(d-\overline{d})\cdot i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)\\&=|d|^2(|p|^2-p\overline{q}-\overline{p}q+|q|^2)\\&=|d(p-q)|^2\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}=\left|\frac{d(p-q)}{d-\overline{d}}\right|,\quad -\frac{b}{a}=-\frac{i(\overline{d}q-dp)}{i(d-\overline{d})}=\frac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}$$

よって，z は中心 $\boldsymbol{\dfrac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}}$，半径 $\boldsymbol{\left|\dfrac{d(p-q)}{d-\overline{d}}\right|}$ の円を描く．

ii) $d=\overline{d}$ のとき (d は実数)

$d=\overline{d}\neq0$ より　$(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$

したがって　$\dfrac{z-p}{z-q}=\overline{\left(\dfrac{z-p}{z-q}\right)}$　ゆえに，$\dfrac{z-p}{z-q}$ は実数である．

よって，z は **2 点 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ を通る直線を描く．**

$\boxed{5}$ (1) 次の 6 通りに分類できる．

$$\begin{array}{ll}
X_1\,X_2\,3\,3\,3\,5\,5 \text{ のとき} & X_4 = 3 \\
X_1\,3\,3\,3\,X_5\,5\,5 \text{ のとき} & X_4 = 3 \\
X_1\,3\,3\,3\,5\,5\,X_7 \text{ のとき} & X_4 = 3 \\
3\,3\,3\,X_4\,X_5\,5\,5 \text{ のとき} & X_4 = 3, 4, 5 \\
3\,3\,3\,X_4\,5\,5\,X_7 \text{ のとき} & X_4 = 3, 4, 5 \\
3\,3\,3\,5\,5\,X_6\,X_7 \text{ のとき} & X_4 = 5
\end{array}$$

よって，X_4 のとりうる値は　$\mathbf{3, 4, 5}$

(2) $P(X_1 = 2) = P(X_1 \geqq 2) - P(X_1 \geqq 3) = \boldsymbol{\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

(3) $1 \leqq k \leqq 6$ のとき　$P(X_1 = k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n$

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \sum_{k=1}^{6} kP(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{6-k}{6}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{5}(k+1)\left(\frac{6-k}{6}\right)^n - \sum_{k=0}^{5} k\left(\frac{6-k}{6}\right)^n \\
&= \frac{1}{6^n}\sum_{k=0}^{5}(6-k)^n \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n)}
\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から　$E(X_1) - 1 = \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n)$

したがって　$\left(\frac{5}{6}\right)^n < E(X_1) - 1 < 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$n\log\frac{5}{6} < \log(E(X_1) - 1) < \log 5 + n\log\frac{5}{6}$$

ゆえに　$\log\frac{5}{6} < \frac{1}{n}\log(E(X_1) - 1) < \frac{1}{n}\log 5 + \log\frac{5}{6}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log 5 + \log\frac{5}{6}\right) = \log\frac{5}{6}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(E(X_1) - 1) = \log\frac{5}{6}}$$

(5) $2 \leqq k \leqq 6$ のとき

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(X_n \leqq k) - P(X_n \leqq k-1) \\ &= \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

$P(X_n = 1) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ であるから，上式は $k = 1$ のときも成り立つ．

ゆえに，$1 \leqq k \leqq 6$ のとき　$P(X_n = k) = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{6}\right)^n$

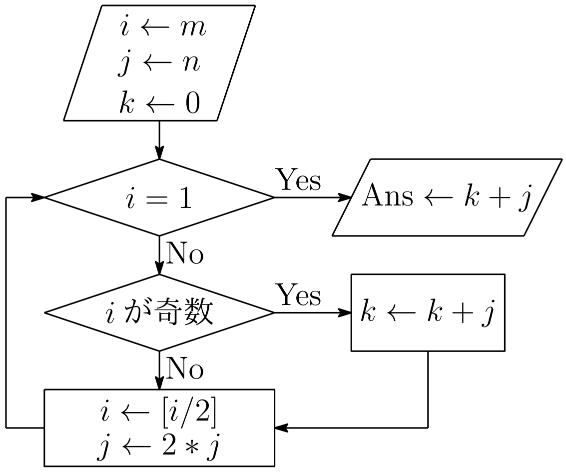
$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k-1}{6}\right)^n \\ &= 6 + \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{5}(k+1)\left(\frac{k}{6}\right)^n \\ &= 6 - \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{k}{6}\right)^n \\ &= 6 - \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \end{aligned}$$

よって，上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_n) &= E(X_1) + E(X_n) \\ &= \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n) \\ &\qquad\qquad + 6 - \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \\ &= \mathbf{7} \end{aligned}$$

6 (1) 右のフローチャートから

	i	j	k
1 周目	100	n	0
2 周目	50	$2n$	0
3 周目	**25**	$\boldsymbol{4n}$	**0**
4 周目	**12**	$\boldsymbol{8n}$	$\boldsymbol{4n}$



(2) i) i が奇数のとき，$[i/2] = \dfrac{i-1}{2}$ であるから

$k \leftarrow k + j$，$i \leftarrow \dfrac{i-1}{2}$，$j \leftarrow 2 * j$ より

$$i * j + k = \frac{i-1}{2} * (2 * j) + (j + k) = i * j + k$$

ii) i が偶数のとき，$[i/2] = \dfrac{i}{2}$ であるから

$i \leftarrow \dfrac{i}{2}$，$j \leftarrow 2 * j$ より

$$i * j + k = \frac{i}{2} * (2 * j) + k = i * j + k$$

i)，ii) より，$i * j + k$ は一定である．

(3) 1 周目の $i * j + k$ は　$m \times n + 0 = mn$

この値は i の値に関係なく不変であり，$i = 1$ のとき $k + j$ となる．

したがって，求める Ans は　$\boldsymbol{mn}$

(4) フローチャートから，与えられた自然数 m を 2 で割り続けるアルゴリズムである．よって，$3{\cdot}2^l = 2^{l+1} + 2^l$ であるから，(d) を $\boldsymbol{l+1}$ **回**実行する．

$\boxed{7}$ (1) $\theta=\theta(t)$ とすると　　$f'(t)=\tan\theta$

これを t で微分すると　$f''(t)=\dfrac{\theta'}{\cos^2\theta}$

$f''(t)>0$ であるから　$\theta'>0$　よって，$\theta(t)$ は増加関数である．

(2) P における G の下側の向きの単位法ベクトルは　$\vec{n}=(\sin\theta,-\cos\theta)$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}},\quad \sin\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

したがって　　$\vec{n}=\left(\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},-\dfrac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\vec{n}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(t+\frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},\ f(t)-\frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha(t)=t+\frac{f'(t)}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}},\ \beta(t)=f(t)-\frac{1}{\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}}}$$

(3) $L_1=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\tan^2\theta}\,dt=\int_a^b\frac{dt}{\cos\theta}$

$\alpha(t)=t+\sin\theta$，$\beta(t)=f(t)-\cos\theta$ であるから，これを微分して

$$\alpha'(t)=1+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\beta'(t)=f'(t)+\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\tan\theta+\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\tan\theta\left(1+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\{\alpha'(t)\}^2+\{\beta'(t)\}^2=(1+\tan^2\theta)\left(1+\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$L_2=\int_a^b\sqrt{\{\alpha'(t)\}^2+\{\beta'(t)\}^2}\,dt=\int_a^b\frac{dt}{\cos\theta}+\int_{\theta(a)}^{\theta(b)}d\theta$$

よって　　$L_2-L_1=\displaystyle\int_{\theta(a)}^{\theta(b)}d\theta=\Big[\ \theta\ \Big]_{\theta(a)}^{\theta(b)}=\boldsymbol{\theta(b)-\theta(a)}$

補足 単位法ベクトルの向きは，単位接ベクトルを反時計周りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させるのが一般的である．関連問題が 2009 年九州大学 (理系) 前期 $\boxed{\mathbf{3}}$ に出題されている．

$\boxed{8}$ (1) $0 < x < 1$ のとき

$$0 < \int_0^x e^t\,dt < \int_0^x 6\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0 < e^x - 1 < 6x$$

これから

$$0 < \int_0^x (e^t - 1)dt < \int_0^x 6t\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0 < e^x - 1 - x < 3x^2$$

さらに

$$0 < \int_0^x (e^t - 1 - t)dt < \int_0^x 3t^2\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0 < e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} < x^3$$

よって，$0 < x < 1$ において，$0 < f(x) < x^3$ が成り立つ．

$n > 1$ のとき，$0 < \dfrac{1}{n} < 1$ であるから，上式により

$$0 < f\left(\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1}{n}\right)^3 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

(2) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = \Big[\,e^x\,\Big]_0^1 = e - 1$，$\displaystyle K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \times \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,dx - K_n &= (e-1)\left\{1 - \frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)}\right\} \\ &= (e-1) \times \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\left\{n(e^{\frac{1}{n}} - 1) - 1\right\}\end{aligned}$$

$f\left(\dfrac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} - 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}$ より，$n(e^{\frac{1}{n}} - 1) - 1 = nf\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{2n}$ から

$$n\left\{\int_0^1 g(x)\,dx - K_n\right\} = (e-1) \times \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \times \left\{n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\right\}$$

よって，求める最大の自然数 k は $\boldsymbol{k = 1}$ であり，そのときの極限値は

$$\lim_{n\to\infty} n\left|\int_0^1 g(x)\,dx - K_n\right| = (e-1) \times 1 \times \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{e-1}{2}}$$

$\boxed{9}$ (1) 方程式を行列を用いて表すと $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$

係数行列の逆行列は $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

(2) (1) の結果から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \cdots(*)$

ゆえに　$x = p - \dfrac{3}{2}q \cdots ①$，$y = -\dfrac{1}{3}p + \dfrac{2}{3}q \cdots ②$

① より，整数 m を用いて　$q = 2m \quad \cdots ③$

これを ② に代入すると

$$y = -\frac{1}{3}p + \frac{2}{3}\cdot 2m = m - \frac{p-m}{3}$$

上式より，整数 n を用いて

$$p - m = 3n \quad \text{すなわち} \quad p = m + 3n \quad \cdots ④$$

$0 \leqq p \leqq 5$，$0 \leqq q \leqq 5$ をみたす $(m,\ n)$ の組は，③，④ より

$$(m,\ n) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1)$$

これらの組に対して，$(p,\ q)$ は

$$\boldsymbol{(p,\ q) = (0,\ 0),\ (3,\ 0),\ (1,\ 2),\ (4,\ 2),\ (2,\ 4),\ (5,\ 4)}$$

(3) $(*)$ から，d が 6 の倍数のとき，整数解 $(x,\ y)$ が存在する．

(4) (3) における d で最小のものを d' とする．このとき，任意の整数 p'，q' に対して，$p = d'p'$，$q = d'q'$ が整数解 $(x,\ y)$ をもつので，$(*)$ より

$$x = \frac{d'(2p' - 3q')}{2},\quad y = \frac{d'(-p' + 2q')}{3}$$

$p' = 2$，$q' = 1$ とすると，第 1 式から　$x = \dfrac{d'}{2}$

$p' = 1$，$q' = 1$ とすると，第 2 式から　$y = \dfrac{d'}{3}$

上の 2 式から，d' は 2 の倍数かつ 3 の倍数でなければならない．

よって，求める最小の d の値は　**6**

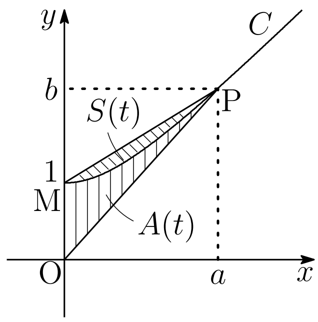
2.2　2002 年度

1　(1) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$，$y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ より　$y + x = e^t$，$y - x = e^{-t}$

ゆえに　$(y+x)(y-x) = e^t \cdot e^{-t}$　したがって　$y^2 - x^2 = 1$

$y > 0$ であるから　$\boldsymbol{y = \sqrt{x^2+1}}$

(2) $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，区間 $[0,\ a]$ における曲線 C および直線 $\mathrm{OP} : y = \dfrac{b}{a}x$ について，(1) の結果から，$b = \sqrt{a^2+1}$ であるから



$$\sqrt{x^2+1} - \frac{b}{a}x = \frac{a\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{a^2+1}}{a}$$
$$= \frac{(a^2 - x^2)}{a(a\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{a^2+1})} \geqq 0$$

したがって

$$A(t) = \int_0^a \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{b}{a}x\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\, x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \frac{b}{a}x^2 \,\right]_0^a$$
$$= \frac{1}{2}\left\{a\sqrt{a^2+1} + \log(a + \sqrt{a^2+1}) - ab\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{ab + \log(a+b) - ab\right\} = \frac{1}{2}\log(a+b)$$
$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{t}{2}}$$

$A(t) + S(t) = \dfrac{1}{2}a$ であるから　$S(t) = \dfrac{1}{2}a - A(t) = \boldsymbol{\dfrac{e^t - e^{-t}}{4} - \dfrac{t}{2}}$

(3) $f(t) = A(t) - S(t)$ とおくと　$f(t) = t - \dfrac{e^t - e^{-t}}{4}$

ゆえに　$f'(t) = 1 - \dfrac{e^t + e^{-t}}{4} = -\dfrac{e^{-t}}{4}(e^{2t} - 4e^t + 1)$

$f'(t) = 0$ を解くと $(t \geqq 0)$

$t = \log(2 + \sqrt{3})$

t	0	$\cdots$	$\log(2+\sqrt{3})$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	極大	↘

よって，右の増減表により

$\boldsymbol{t = \log(2 + \sqrt{3})}$ **で最大**

$\boxed{2}$ (1) 正の奇数 b を，3 以上の素数 p_k と自然数 i_k を用いて

$$b = {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n} \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(b) &= (1 + p_1 + {p_1}^2 + \cdots + {p_1}^{i_1})(1 + p_2 + {p_2}^2 + \cdots + {p_2}^{i_2}) \\ &\qquad \cdots(1 + p_n + {p_n}^2 + \cdots + {p_n}^{i_n}) \\ &= \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \end{aligned}$$

$a = 2^m b$ より，$a = 2^m {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n}$ であるから，上の結果を利用して

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \\ &= (2^{m+1} - 1)f(b) \end{aligned}$$

(2) $p \geqq 2$ より，a は少なくとも pq，q の 2 個の約数にもつから

$$f(a) \geqq pq + q = (p + 1)q$$

等号が成り立つのは，a の約数が pq，q の 2 個，すなわち，pq は素数，$q = 1$ のときである．よって，等号は p が素数，$q = 1$ のときに限り成り立つ．

(3) $a = 2^m r$，$b = 2^n s$ を (1) の結果に適用すると

$$f(a) = (2^{m+1} - 1)f(r), \quad f(b) = (2^{n+1} - 1)f(s)$$

$f(a) = 2b$，$f(b) = 2a$ をみたすとき

$$(2^{m+1} - 1)f(r) = 2{\cdot}2^n s, \quad (2^{n+1} - 1)f(s) = 2{\cdot}2^m r$$

ゆえに　$(2^{m+1} - 1)f(r) = 2^{n+1}s, \quad (2^{n+1} - 1)f(s) = 2^{m+1}r \quad \cdots①$

① において $2^{m+1} - 1$ および $2^{n+1} - 1$ は 2 と互いに素であるから

$$s = (2^{m+1} - 1)s', \quad r = (2^{n+1} - 1)r' \quad (s', r' \text{は自然数}) \quad \cdots②$$

とおける．② を ① に代入すると

$$f(r) = 2^{n+1}s' \cdots ③, \quad f(s) = 2^{m+1}r' \cdots ④$$

② を (2) の結果に適用すると

$$\begin{aligned} f(s) &\geqq \{(2^{m+1} - 1) + 1\}s' = 2^{m+1}s' \quad \cdots⑤ \\ f(r) &\geqq \{(2^{n+1} - 1) + 1\}r' = 2^{n+1}r' \quad \cdots⑥ \end{aligned}$$

③，⑥ より $s' \geqq r'$ となり，④，⑤ より $r' \geqq s'$ となるから　$r' = s'$

このとき，⑤，⑥ において等号が成り立つ．

ゆえに，(2) の結論から，$2^{m+1} - 1$，$2^{n+1} - 1$ は素数，$r' = s' = 1$ である．

よって，② より，r，s は素数であり，$r = 2^{n+1} - 1$，$s = 2^{m+1} - 1$ となる．

3 (1) y を固定して，$h(x) = x\log x - (\log y + 1)x + y$ とおくと

$$h'(x) = \log x + 1 - (\log y + 1) = \log x - \log y$$

x	0	$\cdots$	y	$\cdots$
$h'(x)$	／	$-$	0	$+$
$h(x)$	／	↘	0	↗

$h'(x) = 0$ とすると　$x = y$

$h(x)$ の増減表は，右のようになる．

$h(x) \geqq 0$ であるから　$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$

また，等号が成り立つのは，$x = y$ のときに限る．

(2) 閉区間 $[a,\ b]$ で $f(x) > 0$，$g(x) > 0$ であるから，(1) の結果より

$$f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x) \geqq 0$$

したがって

$$\int_a^b \{f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x)\}\,dx \geqq 0$$

条件より，$\displaystyle\int_a^b \{-f(x) + g(x)\}\,dx = 0$ を上式に代入すると

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つ．

(3) $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ より　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b M\,dx$

したがって，(2) の結果に $g(x) = M$ を代入して成り立ち，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log M\,dx = \log M\int_a^b f(x)\,dx$$

上式の両辺を $b - a > 0$ で割ると

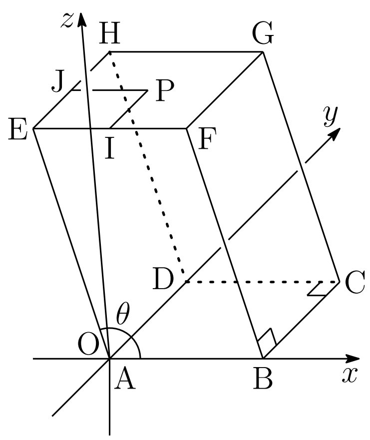
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \log M \times \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = M\log M$$

が成り立つ．

4 (1) $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とすると，$0 < \theta < \pi$ より，$\sin\theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\end{aligned}$$

(2) $\angle\mathrm{BCD} = \frac{\pi}{2}$ より，四角形 ABCD は正方形であり，$\angle\mathrm{FBC} = \frac{\pi}{2}$ より，四角形 FBCD は長方形である．したがって，面 $\mathrm{ABFE} \perp \mathrm{BC}$．空間内で点 A，B，D，E の座標を $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{E}(2\cos\theta,\ 0,\ 2\sin\theta)$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x + 2\cos\theta,\ y,\ 2\sin\theta)$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 2, \quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = (x+2\cos\theta)^2 + y^2 + 4\sin^2\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x + 2\cos\theta + y$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACP} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(y - x - 2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta}}\end{aligned}$$

(3) $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ より，$-1 \leqq y - x \leqq 1$ であるから，(2) の結果から

i) $1 < 2\cos\theta$　すなわち　$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ のとき

$y - x = 1$ で $\triangle\mathrm{ACP}$ は，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\cos\theta - 4\cos^2\theta}}$ をとる．

ii) $-1 \leqq 2\cos\theta \leqq 1$　すなわち　$\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{3}$ のとき

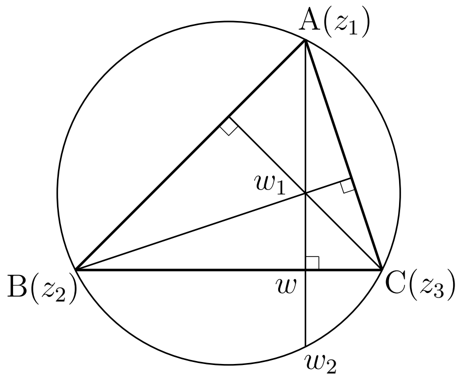
$y - x = 2\cos\theta$ で $\triangle\mathrm{ACP}$ は，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\theta}$ をとる．

iii) $2\cos\theta < -1$　すなわち　$\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ のとき

$y - x = -1$ で $\triangle\mathrm{ACP}$ は，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{9 + 4\cos\theta - 4\cos^2\theta}}$ をとる．

5　(1) A(z_1)，B(z_2)，C(z_3) とおく．

点 A を通り，BC に垂直な直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数であるから，その直線の方程式は



$$\frac{z-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right)}=0 \quad \cdots ①$$

$w_1=z_1+z_2+z_3$，$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ であることから，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}\right)} &=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}\right)}\\ &=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\overline{z}_2+\overline{z}_3}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\ &=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

したがって，w_1 は直線 ① 上にある．

同様にして，w_1 が点 B を通り直線 CA に垂直な直線な直線上の点，および点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点であることを示すことができる．

よって，w_1 は △ABC の垂心である．

(2) 円 C の方程式は　　$|z|=1$

$w_2=-\overline{z}_1z_2z_3$ より，$|w_2|=|\overline{z}_1||z_2||z_3|=1$

したがって，w_2 は円 C 上の点である．また，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}\right)} &=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\overline{z}_2\overline{z}_3-\overline{z}_1}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\ &=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}-\overline{z}_1}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

よって，w_2 は，直線 ① と円 C の交点である．

(3) 2 点 B，C を通る直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_2}{z_3-z_2}$ は実数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_2}{z_3-z_2}-\overline{\left(\frac{z-z_2}{z_3-z_2}\right)}=0$$

w_1 と w_2 の中点を w とすると　$w=\dfrac{z_1+z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2}$

このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{w-z_2}{z_3-z_2}-\overline{\left(\frac{w-z_2}{z_3-z_2}\right)}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\overline{\left\{\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}\right\}}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\frac{\overline{z}_1-\overline{z}_2+\overline{z}_3-z_1\overline{z}_2\overline{z}_3}{2(\overline{z}_3-\overline{z}_2)}\\
=&\frac{z_1-z_2+z_3-\overline{z}_1z_2z_3}{2(z_3-z_2)}-\frac{\overline{z}_1-\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}}{2\left(\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}\right)}=0
\end{aligned}$$

よって，w_1 と w_2 の中点 w は，直線 BC 上の点である．

解説

3 点 A(z_1)，B(z_2)，C(z_3) について，△ABC の外心 O，垂心 $z_1+z_2+z_3$，重心 $\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$ が同一直線上にあることがわかる．この直線を**オイラー線**という．

w_1 と z_1 の中点，z_2 と z_3 の中点，z_1 から BC に下ろした垂線の足 w の 3 点を通る円は，$\dfrac{w_1+z_1}{2}$ と $\dfrac{z_2+z_3}{2}$ を直径の両端とする円で，中心は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w_1+z_1}{2}+\frac{z_2+z_3}{2}\right)=\frac{z_1+z_2+z_3}{2}$$

同時に，$\dfrac{w_1+z_2}{2}$ と $\dfrac{z_3+z_1}{2}$，および $\dfrac{w_1+z_3}{2}$ と $\dfrac{z_1+z_2}{2}$ を直径の両端とする円でもある．この方程式は

$$\left|z-\frac{z_1+z_2+z_3}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

であり，この円を **9 点円**という．その中心もオイラー線上にあり，外心と垂心の中点である．また，その半径は外接円の半径の $\frac{1}{2}$ である．

$\boxed{6}$ (1) 原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，右斜め $45°$ の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め $-45°$ の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．

$$\frac{n-k}{2}=\frac{n+k}{2}-k$$

であるから，$\dfrac{n+k}{2}$ が整数であればよい．したがって $n+k$ は偶数である．逆に $n+k$ が偶数，すなわち $n+k=2m$ をみたす整数 m が存在するとき，折れ線グラフは，右斜め $45°$ の方向に m 回，右斜め $-45°$ の方向に $m-k$ 回 (または $n-m$ 回) 進む．

また，原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は　$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}}$

(2) 原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，最初に直線 $y=k$ と交わる格子点を $\mathrm{A}(a,\ k)$ とする $(0 \leqq a \leqq n-2)$．A と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数，A と格子点 $(n-1,\ k-1)$ を通る数は，直線 $y=k$ に関する対称性によりその数は等しくともに N とおく．また，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数はそれらの和で

$$N+N=2N$$

である．したがって，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数の 2 倍に等しい．

(3) 2 つの事象 A，B を $A: T_9=3$，B : すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ とすると

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap\overline{B})}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}$$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数は，(1) の結果より　${}_9\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A)=\dfrac{{}_9\mathrm{C}_6}{2^9}$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフで，少なくとも $(1,\ 3)$，$(2,\ 3)$，$\cdots$，$(7,3)$ を通る数は，(2) の結果から，O と $(8,\ 4)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍であるから，(1) の結果より　$2\times{}_8\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A\cap\overline{B})=\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{2^9}$

よって　　$P_A(B)=1-\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{{}_9\mathrm{C}_6}=1-\dfrac{2\times 8\cdot 7}{2\cdot 1}\times\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{9\cdot 8\cdot 7}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

7 (1) $f(0)=1$ より $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$，$f(\pi)=\dfrac{1}{2}$ より $\mathrm{P}_3\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

P_1 は C 上にあるから　$\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}=1$

P_3 は C の内部にあるから　$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}<1$

上の 2 式から　$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}<\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}$

ゆえに　$\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2<(1-\alpha)^2$　よって　$\boldsymbol{\alpha<\dfrac{1}{4}}$

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{8}$ より $\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$，$f'(\theta)=\dfrac{\theta-\pi}{\pi^2}$ であるから $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2\pi}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$ より

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\dfrac{dx}{d\theta}=-\dfrac{5}{8}$，$\dfrac{dy}{d\theta}=-\dfrac{1}{2\pi}$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^{-1}=\dfrac{4}{5\pi}$

よって，l の方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{4}{5\pi}x+\dfrac{5}{8}}$

(3) D の軸の一つは x 軸上にあるから，その中心を $(k,\ 0)$ とする．また，D は P_1 を通るから，楕円 D を $\dfrac{(x-k)^2}{(1-k)^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおく．

また，D は P_2 を通るから　$\dfrac{k^2}{(1-k)^2}+\dfrac{25}{64b^2}=1$　$\cdots$①

P_2 における D の接線の方程式は　$\dfrac{(0-k)(x-k)}{(1-k)^2}+\dfrac{5y}{8b^2}=1$

この接線の傾き $\dfrac{8b^2k}{5(1-k)^2}$ が l の傾きと等しいので

$$\frac{4}{5\pi}=\frac{8b^2k}{5(1-k)^2}\quad \text{すなわち}\quad \frac{1}{b^2}=\frac{2\pi k}{(1-k)^2}\qquad\cdots②$$

② を ① に代入し，整理すると

$$\frac{k^2}{(1-k)^2}+\frac{25\pi k}{32(1-k)^2}=1\quad \text{すなわち}\quad (25\pi+64)k=32$$

ゆえに　$k=\dfrac{32}{25\pi+64}<\dfrac{32}{64+64}=\dfrac{1}{4}$

よって，(1) の結果により，P_3 は D の内部にある．

補足　頂点 $(2k-1,\ 0)$ により $2k-1<-\dfrac{1}{2}$ を示してもよい

8　(1) $\alpha = \sqrt[3]{a}$ とおくと，$f(x) = x^p - \alpha^3 x^{p-3}$ より

$$\begin{aligned} g(x) - \alpha &= x - \frac{x^p - \alpha^3 x^{p-3}}{px^{p-1} - (p-3)\alpha^3 x^{p-4}} - \alpha \\ &= x - \alpha - \frac{x(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{px^3-(p-3)\alpha^3} \\ &= (x-\alpha) \times \frac{px^3-(p-3)\alpha^3 - x(x^2+\alpha x+\alpha^2)}{px^3-(p-3)\alpha^3} \\ &= (x-\alpha)^2 \times \frac{(p-1)x^2+(p-2)\alpha x+(p-3)\alpha^2}{px^3-(p-3)\alpha^3} \end{aligned}$$

よって，次式が成り立ち，$p \geqq 2$，$p-1 \geqq 1$ より，題意をみたす．

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{(p-1)x^2 + (p-2)\sqrt[3]{a}\,x + (p-3)\sqrt[3]{a^2}}{px^3 - (p-3)a}$$

(2) (1) の結果に $p = 2$ を代入すると，次式が成り立ち，題意をみたす．

$$g(x) - \sqrt[3]{a} = (x - \sqrt[3]{a})^2 \times \frac{x^2 - \sqrt[3]{a^2}}{2x^3 + a} = (x - \sqrt[3]{a})^3 \times \frac{x + \sqrt[3]{a}}{2x^3 + a}$$

(3) (2) の結果から　$\sqrt[3]{a} - g(x) = (\sqrt[3]{a} - x)^3 \times \dfrac{x + \sqrt[3]{a}}{2x^3 + a}$

これに $x = 2$，$a = 9$ を代入すると

$$\sqrt[3]{9} - g(2) = (\sqrt[3]{9} - 2)^3 \times \frac{2^2 + \sqrt[3]{2}}{2 \cdot 2^3 + 9}$$

$2 < \sqrt[3]{9} < 2.1$ より

$$0 < (\sqrt[3]{9} - 2)^3 \times \frac{2^2 + \sqrt[3]{2}}{2 \cdot 2^3 + 9} < (2.1 - 2)^3 \times \frac{2^2 + 2.1}{2 \cdot 2^3 + 9} < \frac{1}{1000}$$

したがって　$0 < \sqrt[3]{9} - g(2) < \dfrac{1}{1000}$　ゆえに　$g(2) < \sqrt[3]{9} < g(2) + 0.001$

このとき，$f(x) = x^2 - \dfrac{9}{x}$，$f'(x) = 2x + \dfrac{9}{x^2}$ より

$$f(2) = 2^2 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}, \quad f'(2) = 2 \cdot 2 + \frac{9}{2^2} = \frac{25}{4}$$

ゆえに　$g(2) = 2 - \dfrac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) \div \dfrac{25}{4} = 2.08$

したがって　　$2.08 < \sqrt[3]{9} < 2.081$

よって，$\sqrt[3]{9}$ の小数第 4 位を切り捨てると　**2.080**

9　(1) $\det A = ad - bc \neq 0$ より，A は正則である．
よって，$A^2 = A$ の両辺に A^{-1} を掛けると　$\boldsymbol{A = E}$

(2) ハミルトン・ケリーの公式により

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \quad \cdots (*)$$

これに $A^2 = A$，$ad - bc = 0$ を代入すると　$(a+d-1)A = O$
$A \neq O$ であるから，$a + d - 1 = 0$　ゆえに　$a + d = 1$
逆に，$a + d = 1$ のとき，$ad - bc = 0$ であるから，これを $(*)$ に代入すると，$A^2 = A$ が成り立つ．
よって，$ad - bc = 0$ のとき，A がべき等行列であるための必要十分条件は

$$\boldsymbol{a + d = 1}$$

(3) (1),(2) の結果から，次のことが分かる．
べき等行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$\mathrm{tr}\, A = a + d$ とすると

$$\begin{aligned} &\det A \neq 0 \text{ のとき} \quad \mathrm{tr}\, A = 2 \qquad (A = E \text{ より}) \\ &\det A = 0 \text{ のとき} \quad \mathrm{tr}\, A = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ．
一般に，$\mathrm{tr}\,(A+B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$ が成り立つ．
したがって，A，B，$A + B$ がべき等行列であるとき，上式より

$$\mathrm{tr}\, A = 1, \quad \mathrm{tr}\, B = 1, \quad \mathrm{tr}(A+B) = 2$$

である．よって　　$\boldsymbol{A + B = E}$

これを満たす A，B の組の一つは

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

補足　(3) は一般には，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$．
ただし，$a(1-a) - bc = 0$．

2.3　2003 年度

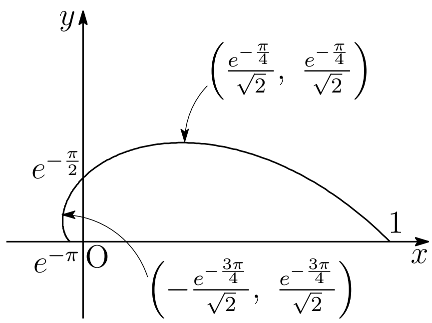
1　(1) $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$ を t で微分すると

$$x' = -e^{-t}(\sin t+\cos t) = -\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$y' = -e^{-t}(\sin t-\cos t) = -\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

x，y の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
x'		$-$	0	$+$	
x	1	$\searrow$	$-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$-e^{-\pi}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0



x は $t=\dfrac{3\pi}{4}$ で最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$ をとり，y は $t=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}$ をとる．

したがって，C の概形は右の図のようになる．

(2)
$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt &= \frac{1}{3}\int_0^\pi \{(r(t))^3\}'\sin^2 t\cos t\,dt \\
&= \frac{1}{3}\Big[\ \{r(t)\}^3\sin^2 t\cos t\ \Big]_0^\pi \\
&\qquad -\frac{1}{3}\int_0^\pi \{r(t)\}^3(\sin^2 t\cos t)'\,dt \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \{r(t)\}^3(2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t)\,dt \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \{r(t)\}^3\{2\sin t(1-\sin^2 t)-\sin^3 t\}\,dt \\
&= \int_0^\pi \{r(t)\}^3\left(\sin^3 t-\frac{2}{3}\sin t\right)dt
\end{aligned}$$

(3) $y_1 = e^{-t}\sin t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{3\pi}{4}\right)$，$y_2 = e^{-t}\sin t \quad \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq t \leqq \pi\right)$，

$\alpha = -\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$，$\beta = e^{-\pi}$ とおくと

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_\alpha^1 {y_1}^2\,dx - \pi\int_\alpha^\beta {y_2}^2\,dx \\
&= \pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^0 y^2\frac{dx}{dt}\cdot dt - \pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^\pi y^2\frac{dx}{dt}\cdot dt \\
&= -\pi\int_0^\pi y^2\frac{dx}{dt}dt = -\int_0^\pi (r(t)\sin t)^2\{r(t)\cos t\}'dt \\
&= -\pi\int_0^\pi (r(t))^2\sin^2 t\cdot\{r'(t)\cos t - r(t)\sin t\}\,dt \\
&= -\pi\int_0^\pi (r(t))^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt + \pi\int_0^\pi (r(t))^3\sin^3 t\,dt
\end{aligned}$$

これに (2) の等式を適用すると

$$\begin{aligned}
V &= -\pi\int_0^\pi (r(t))^3\left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right)dt + \pi\int_0^\pi (r(t))^3\sin^3 t\,dt \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi (r(t))^3\sin t\,dt = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi e^{-3t}\sin t\,dt
\end{aligned}$$

極方程式による曲線の回転体の体積

極方程式 $r = r(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線を x 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

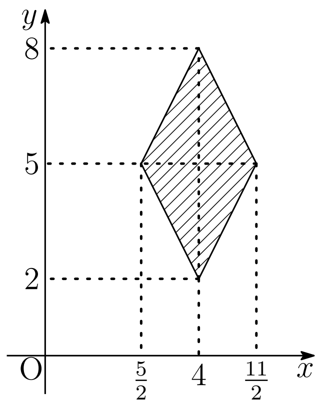
$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi \{r(\theta)\}^3\sin\theta\,d\theta}$$

2009 京都大学 (理系) 前期

xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式 $r = 2+\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ により表される曲線を C とする．C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

解答 $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^\pi (2+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \dfrac{2\pi}{3}\left[\,-\dfrac{1}{4}(2+\cos\theta)^4\,\right]_0^\pi = \dfrac{40}{3}\pi$

2 (1) 不等式 $2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域は，4 点 $(\frac{3}{2},\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(-\frac{3}{2},\ 0)$，$(0, -3)$ を頂点とする四角形の周およびその内部である．
不等式 $2|x-4|+|y-5| \leqq 3$ の表す領域 A は，$2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものであるから，A の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



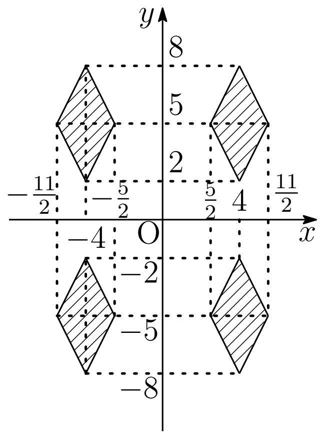
(2) $f(x,\ y)=2|x-4|+|y-5|$，$g(x,\ y)=2\Big||x|-4\Big|+\Big||y|-5\Big|$ とおく．
$f(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域 A の点 $(x_1,\ y_1)$ は，(1) の結果から $x_1>0$，$y_1>0$ であり，$g(x,\ y)=f(|x|,\ |y|)$ が成り立つから

$$g(\pm x_1, \pm y_1)=f(x_1,\ y_1) \leqq 3$$

$g(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域は B であるから

$$(x_1,\ y_1) \in A \quad \Longrightarrow \quad (\pm x_1, \pm y_1) \in B$$

したがって，B の表す領域は，A および A を x 軸，y 軸，原点に関して対称移動したものである．よって，B の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



(3) x，$|y|$ は正の整数であるから，領域 B 内の点において，これを満たす $(x,\ |y|)$ の組は，次のとおりである．

$(x,\ |y|)=(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),$
$(4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7),\ (4,\ 8),$
$(5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6)$

$\log_x |y| = \dfrac{m}{n}$ (m，n は整数) とおくと

$$x^{\frac{m}{n}}=|y| \quad \text{ゆえに} \quad x^m=|y|^n \quad \cdots ①$$

素因数分解の一意性により，① を満たすものは

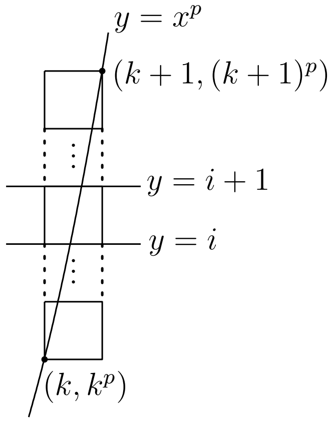
$$(x,\ |y|)=(4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 8),\ (5,\ 5)$$

よって，求める $(x,\ y)$ の組は次の 8 組である．

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(4, \pm 2),\ (4, \pm 4),\ (4, \pm 8),\ (5, \pm 5)}$$

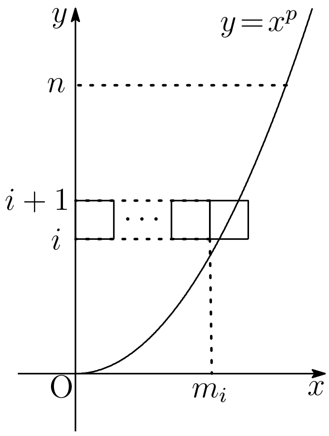
3 (1) 右の図は，$k \leqq x \leqq k+1$ において，$y=x^p$ と交わる単位正方形を図示したものである．$y=x^p$ は単調増加であり，$x=k$ および $x=k+1$ において格子点を通る．
ゆえに，$i \leqq y \leqq i+1$ で $y=x^p$ と交わる単位正方形は 1 個である $(k^p \leqq i < (k+1)^p)$．
したがって，$0 \leqq y \leqq n$ で $y=x^p$ と交わる単位正方形の個数は

$$n \text{ (個)}$$



(2) 右の図のように $y=x^p$ と y 軸，直線 $y=i$，$y=i+1$ で囲まれた領域の面積を S_i，この領域内の単位正方形の個数を m_i とすると $(0 \leqq i \leqq n-1)$

$$m_i < S_i < m_i+1$$



ゆえに　$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} m_i < \sum_{i=0}^{n-1} S_i < \sum_{i=0}^{n-1}(m_i+1)$

よって　$M_n < S_n < M_n+n \quad \cdots ①$

また　$\displaystyle S_n = \int_0^n x\,dy = \int_0^n y^{\frac{1}{p}}\,dy = \boldsymbol{\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}}$

(3) 直線 $y=i$ $(i=0,1,\cdots n-1)$ 上にある格子点は，次の m_i+1 個である．

$$(0,\ i),\ (1,\ i),\ (2,\ i),\ \cdots,\ (m_i,\ i)$$

また，直線 $y=n$ 上にある格子点は，次の $[n^{\frac{1}{p}}]+1$ 個である．

$$(0,\ n),\ (1,\ n),\ (2,\ n),\ \cdots,\ ([n^{\frac{1}{p}}],\ n)$$

したがって，D_n 内にある格子点の個数 L_n は

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1}(m_i+1) + ([n^{\frac{1}{p}}]+1) = M_n+n+[n^{\frac{1}{p}}]+1$$

$n^{\frac{1}{p}}-1 < [n^{\frac{1}{p}}] \leqq n^{\frac{1}{p}}$ であるから

$$M_n+n+n^{\frac{1}{p}} < L_n \leqq M_n+n+n^{\frac{1}{p}}+1 \quad \cdots ②$$

①，② より　　$S_n + n^{\frac{1}{p}} < L_n < S_n + n + n^{\frac{1}{p}} + 1$

これに (2) の結果を代入すると

$$\frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n^{\frac{1}{p}} < L_n < \frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n + n^{\frac{1}{p}} + 1$$

したがって

$$\frac{p}{p+1} + n^{-1} < n^{-\frac{p+1}{p}} L_n < \frac{p}{p+1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-1} + n^{-\frac{p+1}{p}}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{p}{p+1} + n^{-1} \right) = \frac{p}{p+1},$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{p}{p+1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-1} + n^{-\frac{p+1}{p}} \right) = \frac{p}{p+1}$$

よって，はさみうちの原理により　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n = \frac{p}{p+1}}$

別解

(3) 領域 D_n の直線 $y = i$ $(0 \leqq i \leqq n)$ 上にある格子点の個数は　$[i^{\frac{1}{p}}] + 1$ (個)

したがって　　$L_n = \sum_{i=0}^{n} ([i^{\frac{1}{p}}] + 1)$

$i^{\frac{1}{p}} - 1 < [i^{\frac{1}{p}}] \leqq i^{\frac{1}{p}}$ であるから

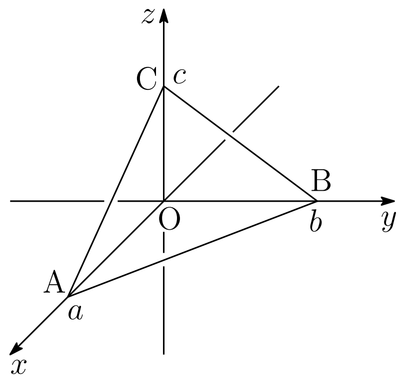
$$\sum_{i=0}^{n} i^{\frac{1}{p}} < L_n \leqq \sum_{i=0}^{n} (i^{\frac{1}{p}} + 1)$$
$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} \right)^{\frac{1}{p}} < n^{-\frac{p+1}{p}} L_n \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} \right)^{\frac{1}{p}} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}$$

ここで　　$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = \int_0^1 x^{\frac{1}{p}}\, dx = \frac{p}{p+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}} \right) = 0$$

よって，はさみうちの原理により　　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n = \frac{p}{p+1}}$

4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$$

第 1 式から　$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)\cdot(-a,\ b,\ 0)=0$

ゆえに　$a^2=b^2$

第 2 式から　$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)\cdot(0,-b,\ c)=0$

ゆえに　$b^2=c^2$

よって，$a>0,\ b>0,\ c>0$ より

$$\boldsymbol{a=b=c}$$

(2) D は線分 BC を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P は直線 AD 上の A 以外の点であるから $(t\neq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

△APQ の重心が G であるから

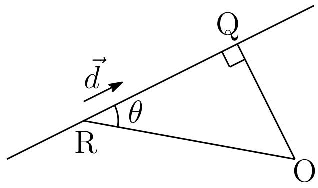
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\quad\text{すなわち}\quad\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=(-a,\ b,\ c)+\frac{t}{3}(3a,-2b,-c)\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-a,\ b,\ c)$，$\vec{d}=(3a,-2b,-c)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{t}{3}\vec{d}\quad\cdots①$$



$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\vec{d}$ のベクトルのなす角を θ とすると $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$，OQ が最小となるとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2|\vec{d}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d})^2}}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\vec{d}|}$$

上の 2 式から　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2|\vec{d}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d})^2}}{|\vec{d}|}$　$\cdots$②

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\vec{d}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{d} = 0$ であるから，① をこれに代入して

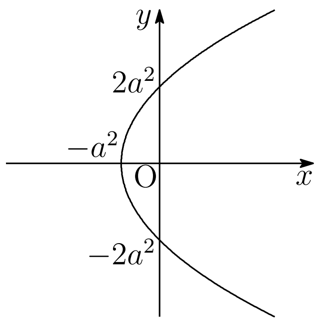
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d} + \frac{t}{3}|\vec{d}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{3(\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d})}{|\vec{d}|^2}$$

したがって　$t = \dfrac{3(3a^2+2b^2+c^2)}{9a^2+4b^2+c^2} \neq 0$

$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2|\vec{d}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d})^2 = b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2$ であるから，② より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{\sqrt{b^2c^2+4c^2a^2+a^2b^2}}{\sqrt{9a^2+4b^2+c^2}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{b^2c^2+4c^2a^2+a^2b^2}{9a^2+4b^2+c^2}}}$$

5 (1) $z = t + ai$ より



$$z^2 = (t+ai)^2 = (t^2 - a^2) + 2ati$$

$x = t^2 - a^2$，$y = 2at$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x = \frac{y^2}{4a^2} - a^2$$

ゆえに　$\boldsymbol{4a^2(x + a^2) = y^2}$　$\cdots$①

よって，求める軌跡は右の図のようになる．

(2) m は ℓ を原点を中心に θ だけ回転させたものであるから

$$\begin{aligned} z(\cos\theta + i\sin\theta) &= (t+ai)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (t\cos\theta - a\sin\theta) + i(t\sin\theta + a\cos\theta) \end{aligned}$$

$x = t\cos\theta - a\sin\theta$，$y = t\sin\theta + a\cos\theta$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x\sin\theta - y\cos\theta + a = 0 \quad \cdots ②$$

i) $\sin\theta = 0$ のとき
②は $y = \pm a$ の直線であり，①，②の共有点は 1 個

ii) $\sin\theta \neq 0$ のとき
①，②から x を消去して整理すると

$$(\sin\theta)y^2 - (4a^2\cos\theta)y - 4a^3(a\sin\theta - 1) = 0 \quad \cdots (*)$$

これは y に関する 2 次方程式であるから，その係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= 4a^4\cos^2\theta + 4a^3\sin\theta(a\sin\theta - 1) \\ &= 4a^3(a - \sin\theta) \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ に注意して

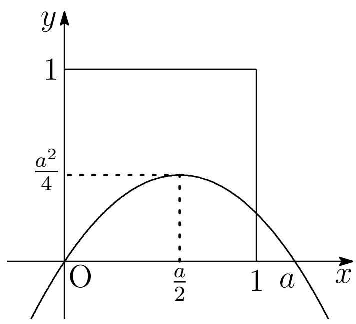
$-1 \leqq \sin\theta < a$ のとき	$(*)$ の実数解は 2 個
$\sin\theta = a$ のとき	$(*)$ の実数解は 1 個
$a < \sin\theta \leqq 1$ のとき	$(*)$ の実数解は 0 個

i)，ii) より，①，②の共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta < 0,\ 0 < \sin\theta < a} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{\sin\theta = 0,\ a} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a < \sin\theta \leqq 1} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

6 (1) 正方形の面積は　1

正方形の周および内部と放物線 $y = x(a-x)$ で囲まれた部分の面積を S とし，求める確率を $P(a)$ とすると　$P(a) = \dfrac{S}{1} = S$



i) $0 < a \leqq 1$ のとき

$$P(a) = \int_0^a x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a^3}{6}}$$

ii) $1 < a \leqq 2$ のとき

$$P(a) = \int_0^1 x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a}{2} - \frac{1}{3}}$$

(2) 求める確率は

$$P\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - P\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \left(1 - P\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot P\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{48}\left(1 - \frac{5}{12}\right) + \left(1 - \frac{1}{48}\right) \times \frac{5}{12} = \boldsymbol{\frac{121}{288}}$$

(3) 3回ともはずれる確率は　$(1-P(a))^3$ である．

少なくとも1回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であるから

$$1 - (1-P(a))^3 \geqq \frac{19}{27} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \geqq \frac{1}{3} \quad \cdots ①$$

当たりの数の期待値 E は

$$E = \sum_{k=0}^{3} k\cdot{}_3\mathrm{C}_k(P(a))^k(1-P(a))^{3-k} = 3P(a)$$

この期待値 E が $\dfrac{3}{2}$ 以下であるから

$$3P(a) \leqq \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

①，② から　$\dfrac{1}{3} \leqq P(a) \leqq \dfrac{1}{2}$

これを満たす a は (1) の ii) の場合について調べればよいので

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \leqq \frac{1}{2} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{\frac{4}{3} \leqq a \leqq \frac{5}{3}}$$

$\boxed{7}$ (1) $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ より $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ である．$AX=B$ より

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b+1 \\ a+2b-1 \end{pmatrix}$$

したがって，$\mathrm{Q}(2a+b+1,\ a+2b-1)$，$\mathrm{R}(1,-1)$ となり

$$\frac{\mathrm{RQ}^2}{\mathrm{OP}^2}=\frac{(2a+b)^2+(a+2b)^2}{a^2+b^2}=9-\frac{4(a-b)^2}{a^2+b^2}\leqq 9$$

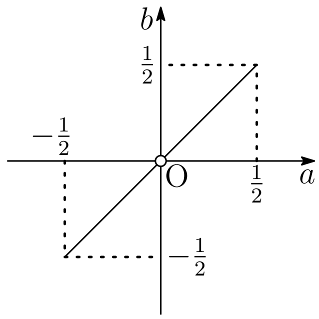
ゆえに　$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}\leqq 3$

等号が成り立つのは $a=b$ のときである．

ゆえに，$\dfrac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{OP}}$ の最大値は　$\mathbf{3}$

最大値を与える点 P の方程式は，$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ および a，b の範囲に注意して

$$\boldsymbol{a=b}\ \left(\mathbf{0}<|\boldsymbol{a}|\leqq\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$$



よって，P の表す図形は右の図のようになる．

(2) A^{-1} の固有方程式は　$\lambda^2-4\lambda+3=0$

$\lambda=3,\ 1$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

とおくと，$B=\dfrac{a+b}{2}\vec{u}+\dfrac{a-b+2}{2}\vec{v}$ であるから

$$A^{-1}B=\frac{a+b}{2}A^{-1}\vec{u}+\frac{a-b+2}{2}A^{-1}\vec{v}=\frac{3(a+b)}{2}\vec{u}+\frac{a-b+2}{2}\vec{v}$$

したがって

$$\mathrm{OQ}^2=\frac{9(a+b)^2}{4}|\vec{u}|^2+\frac{(a-b+2)^2}{4}|\vec{v}|^2=\frac{9}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b+2)^2$$

$|a|\leqq\dfrac{1}{2}$，$|b|\leqq\dfrac{1}{2}$ より　$-1\leqq a+b\leqq 1$，$1\leqq a-b+2\leqq 3$

ゆえに，OQ が最小となるとき

$$a+b=0,\ a-b+2=1\quad \text{すなわち}\quad a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$$

よって　$\mathbf{P}\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$ のとき，**最小値** $\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$ をとる

$\boxed{8}$ (1) 2直線PQ，PRがx軸の正の向きとなす角をそれぞれθ_1，θ_2とすると

$$m_1 = \tan\theta_1, \quad m_2 = \tan\theta_2$$

$m_1 < 0 < m_2$より，$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$であるから

$$\tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \boldsymbol{\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}$$

(2) $y = \dfrac{1}{4}x^2$を微分すると　$y' = \dfrac{1}{2}x$

Qの座標を$(\alpha,\ \frac{1}{4}\alpha^2)$とすると，Qにおける接線の傾きは$m_1$であるから

$$m_1 = \frac{1}{2}\alpha$$

ゆえに　$\alpha = 2m_1$　点Qの座標は　$(2m_1,\ {m_1}^2)$

Qにおける接線の方程式は

$$y - {m_1}^2 = m_1(x - 2m_1) \quad \text{すなわち} \quad y = m_1x - {m_1}^2 \quad \cdots ①$$

同様に，Rにおける接線の方程式は　$y = m_2x - {m_2}^2 \cdots ②$

①，②の交点がPであるから，$m_1 \neq m_2$に注意してこれを解くと

$$a = m_1 + m_2, \quad b = m_1m_2$$

また　$(m_1 - m_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2 = a^2 - 4b > 0$

$m_1 - m_2 < 0$より　$m_1 - m_2 = -\sqrt{a^2 - 4b}$

よって，Gの表す方程式は(1)の結果から　$\boldsymbol{\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{a^2 - 4b}}{1 + b}}$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$のとき(2)の結果より

$$1 + b = -\sqrt{a^2 - 4b} \quad \cdots ③$$

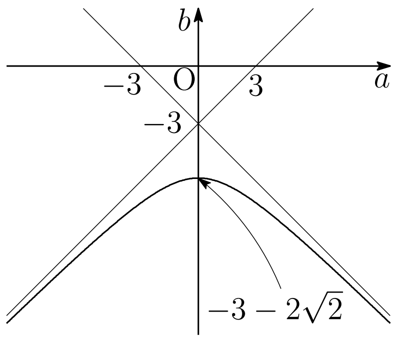
③の両辺を平方して

$$1 + 2b + b^2 = a^2 - 4b$$

上式および③から

$$\boldsymbol{(b+3)^2 - a^2 = 8,\ b < -1}$$

よって，Gの表す図形は，右の図のような双曲線の一部である．



$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $k \geqq 1$ のとき　$\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$　すなわち　$\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < S_n$

よって　$\log(n+1) < S_n \quad \cdots ①$

$k \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$

ゆえに　$\displaystyle 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$　すなわち　$\displaystyle S_n < 1 + \int_1^{n} \frac{dx}{x}$

よって　$S_n < 1 + \log n \quad \cdots ②$

①，② より　$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$

(2)
$$\begin{aligned} a_k\Delta b_k + b_{k+1}\Delta a_k &= a_k(b_{k+1} - b_k) + b_{k+1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k \end{aligned}$$

ゆえに
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(a_k\Delta b_k + b_{k+1}\Delta a_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k) \\ &= a_n b_n - a_1 b_1 \end{aligned}$$

よって
$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k\Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}\Delta a_k \quad \cdots (*)$$

$(*)$ に $a_k = S_k$，$\Delta b_k = k$ を適用すると，

$\Delta a_k = \dfrac{1}{k+1}$，$b_k = \dfrac{1}{2}k(k-1)$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} kS_k &= S_n\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - S_1\cdot 0 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k(k+1)\cdot\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)S_n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)S_n - \frac{1}{4}n(n-1) \\ &= \left(S_n - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{P(n) = \dfrac{1}{2}n(n-1)}$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k = S_n - \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n = S_n - \log n - \dfrac{1}{2} \quad \cdots ③$

(1) の結果から　$\log(n+1) - \log n - \dfrac{1}{2} < S_n - \log n - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2} < \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2} < S_n - \log n - \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} \quad \cdots ④$

③，④ より　$-\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n < \dfrac{1}{2}$

よって　$\left|\dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kS_k - \log n\right| < \dfrac{1}{2}$

補足

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

が発散することは容易に示すことができる．

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&> 1 + \frac{1}{2^1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Biggl(\overbrace{\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}^{2^{n-1}\text{個}}\Biggr) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2} = \infty
\end{aligned}$$

次式で定義される

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

をオイラーの定数 (Euler's constant) といい，$\gamma \fallingdotseq 0.577215665\cdots$ であるが (オイラー自身は小数以下 6 桁まで計算)，γ が有理数か無理数かも今でも分かっていない．

2.4　2004 年度

1　(1) $I_0 = \dfrac{(-1)^0}{0!}\displaystyle\int_0^2 x^0 e^x\,dx = \int_0^2 e^x\,dx = \Big[\, e^x \,\Big]_0^2 = \boldsymbol{e^2-1}$

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 x^n (e^x)'\,dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\Big[\, x^n e^x \,\Big]_0^2 - \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^2 (x^n)' e^x\,dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\cdot 2^n e^2 + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^2 x^{n-1} e^x\,dx = \frac{(-1)^n 2^n e^2}{n!} + I_{n-1} \end{aligned}$$

ゆえに　$\boldsymbol{I_n - I_{n-1} = \dfrac{(-1)^n 2^n e^2}{n!}}$　$\cdots(*)$

したがって　$I_3 = I_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^n 2^n e^2}{n!}$

$$= (e^2-1) + \frac{-2e^2}{1!} + \frac{4e^2}{2!} + \frac{-8e^2}{3!} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}e^2 - 1}$$

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ において，$x^n e^x \leqq x^n e^2$ であるから $(n = 1, 2, \cdots)$

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx \leqq \frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^2\,dx = \frac{e^2}{(n+1)!}\Big[\, x^{n+1} \,\Big]_0^2 = \frac{e^2 2^{n+1}}{(n+1)!} \quad \cdots ①$$

$n \geqq 2$ のとき　$\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{2\cdot 2}{1\cdot 2}\times\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdots\dfrac{2}{n+1} \leqq 2\times\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{2}{3} = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ $\cdots ②$

$n = 1$ のとき ② は等号が成り立つので，② は $n \geqq 1$ について成り立つ．

①，② より　$\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x\,dx \leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$　$(n = 1, 2, \cdots)$

(3) $(*)$ より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = e^2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$　ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{I_n - I_0}{e^2}$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!} = 1 + \frac{I_n - I_0}{e^2} = \frac{I_n}{e^2} + \frac{1}{e^2}$　$\cdots ③$

(2) の結果から　$|I_n| \leqq 2e^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　$(n = 1, 2, \cdots)$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$　$\cdots ④$

③，④ により　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2}}$

$\boxed{2}$ (1) $\boldsymbol{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$

$\boldsymbol{(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4}$

(2) A の固有方程式は　$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0$

A の固有値を $\alpha = a+b,\ \beta = a-b$ とおき，次の 2 つに場合分けをする．

i) $\alpha \neq \beta$　すなわち　$b \neq 0$ のとき

$$F = \frac{A-\beta E}{\alpha-\beta} = \frac{1}{2b}\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - (a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha} = \frac{1}{-2b}\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - (a+b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

このとき　$F^2 = F$，$G^2 = G$，$FG = GF = O$，$A = \alpha F + \beta G$　$\cdots(*)$

したがって　　$A^4 = \alpha^4 F + \beta^4 G$

よって　$A^4 = (a+b)^4\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (a-b)^4\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　$\cdots$①

ii) $\alpha = \beta$　すなわち　$b = 0$ のとき

$A = aE$ であるから　$A^4 = a^4E$

i)，ii) より，$b = 0$ のときも ① は成り立つので

$$\boldsymbol{A^4 = (a+b)^4\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (a-b)^4\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(3) $(*)$ および $b = 0$ $(A = aE)$ のとき次式が成り立つことから

$$\boldsymbol{A^n = (a+b)^n\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (a-b)^n\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(4) (3) の結果から　$x_n = \dfrac{1}{2}(a+b)^n + \dfrac{1}{2}(a-b)^n$

$b = 1-a$ より　$a+b = 1$，$a-b = 2a-1$

$0 < a < 1$ より　$-1 < 2a-1 < 1$　ゆえに　$-1 < a-b < 1$

よって　　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}}$

3　(1) P が原点を通るとき，$x(t)=0$，$y(t)=0$ より

$$\begin{cases} \cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \cos(2t)=0 \end{cases} \quad (0 \leqq t < 2\pi) \quad \text{これを解いて} \quad t=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

$x'(t)=-\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$，$y'(t)=-2\sin(2t)$ より

$$\begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1 \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2 \end{cases} \quad \text{および} \quad \begin{cases} x'\left(\frac{5}{4}\pi\right)=1 \\ y'\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-2 \end{cases}$$

求める速度ベクトルは　$\boldsymbol{t=\frac{\pi}{4}}$ **のとき** $\boldsymbol{(-1,-2)}$，$\boldsymbol{t=\frac{5}{4}\pi}$ **のとき** $\boldsymbol{(1,-2)}$

(2) $t=t_1$ $(0 \leqq t_1 < 2\pi)$ における C 上の点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ と x 軸および y 軸に関して対称な点をそれぞれ $\mathrm{Q}(x_1,-y_1)$，$\mathrm{R}(-x_1,\ y_1)$ とすると

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\left(t_1+\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left\{\left(\tfrac{3}{2}\pi-t_1\right)+\tfrac{\pi}{4}\right\} \\ -y_1 &= -\cos 2t_1=\cos 2\left(\tfrac{3}{2}\pi-t_1\right) \\ -x_1 &= -\cos\left(t_1+\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left\{(t_1+\pi)+\tfrac{\pi}{4}\right\} \\ y_1 &= \cos 2t_1=\cos 2\left(t_1+\pi\right) \end{aligned}$$

したがって，Q は $0 \leqq t_1 \leqq \frac{3}{2}\pi$ のとき, $t=\frac{3}{2}\pi-t_1$ における C 上の点であり，$\frac{3}{2}\pi < t_1 < 2\pi$ のとき $t=\frac{7}{2}\pi-t_1$ における C 上の点である．
また，R は $0 \leqq t_1 < \pi$ のとき, $t=t_1+\pi$ における C 上の点であり，$\pi \leqq t_1 < 2\pi$ のとき $t=t_1-\pi$ における C 上の点である．

(3) $x=\cos(t+\frac{\pi}{4})$，$y=\cos(2t)$ とおくと

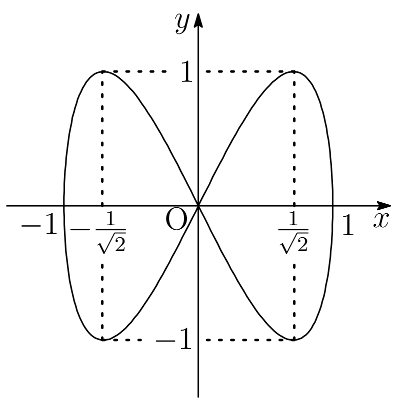
$$y=\cos 2t=\sin 2\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)=\pm 2x\sqrt{1-x^2}$$

$y=2x\sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ のとき

$$y'=\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



(2) の結果から，C の概形は右の図のようになる．

(4) 求める面積 S は　$S=4\displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx=4\left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$

補足　(2) は，$\frac{\pi}{4}$ ごとに動点 P の位置を調べると，動点 Q，R の取り方がわかる．

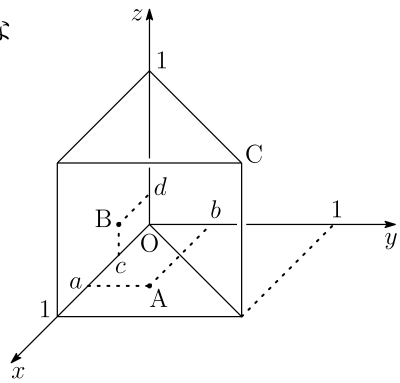
4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b,\ 0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 1,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(b, -a,\ a-b)$$

とすると

$$|\vec{n}|=\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}$$

求める単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると



$$\vec{e}=\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\pm\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}(b, -a,\ a-b)}$$

ゆえに　$\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\pm\dfrac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}$

$bc \geqq 0$，$a-b \geqq 0$，$d \geqq 0$ であるから　$|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\boldsymbol{\dfrac{bc+(a-b)d}{\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}}}$

(2) $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}$$

四面体 OABC において $\triangle\mathrm{OAC}$ を底面とすると，高さは $|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから

求める四面体の体積 V は　$V=\dfrac{1}{3}S\times|\vec{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\boldsymbol{\dfrac{bc+(a-b)d}{6}}$

(3) $0 \leqq b \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq c \leqq 1$，$0 \leqq d \leqq 1$ であるから，(2) の結果より

i) $b>0$，$a-b>0$ のとき　$V \leqq \dfrac{b\cdot1+(a-b)\cdot1}{6}=\dfrac{a}{6} \leqq \dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V \leqq \dfrac{1}{6}$　(等号は $a=1$，$0<b<1$，$c=1$，$d=1$ のとき)

ii) $b=0$ のとき　$V=\dfrac{ad}{6} \leqq \dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V \leqq \dfrac{1}{6}$　(等号は $a=1$，$0 \leqq c \leqq 1$，$d=1$ のとき)

iii) $a-b=0$ のとき　$V=\dfrac{bc}{6} \leqq \dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V \leqq \dfrac{1}{6}$　(等号は $b=c=1$，$0 \leqq d \leqq 1$ のとき)

よって，V の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ で，そのときの A，B は次の 3 組である．

A$(1,\ b,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ 1)$　$(0<b<1)$
A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(c,\ 0,\ 1)$　$(0 \leqq c \leqq 1)$
A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ d)$　$(0 \leqq d \leqq 1)$

$\boxed{5}$ 起こりうる場合の総数は　2^n (通り)

(1) 左端が赤色で，色の変化がちょうど 1 回起きる場合は，次の $n-1$ 通り．

「赤青青 $\cdots$ 青」,「赤赤青 $\cdots$ 青」,$\cdots$,「赤赤 $\cdots$ 赤青」

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{n-1}{2^n}}$

(2) 色の変化が 1 回も起きない場合は，次の 2 通り

「赤赤 $\cdots$ 赤赤」,「青青 $\cdots$ 青青」

色の変化が 1 回だけ起きる場合は，(1) の左端が赤である場合と，同様に左端が青である場合の $(n-1)\times 2$ 通りである．

したがって，色の変化が 1 回以下である確率は　$\dfrac{2+(n-1)\times 2}{2^n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$\boldsymbol{1-\dfrac{n}{2^{n-1}}}$

(3) 左端が赤色か青色の 2 通りに対して，色の変化が 2 個目，3 個目，$\cdots$，n 個目の $n-1$ 個の電球の中から変化する電球 m 個を選ぶ場合の数は

$$2\times {}_{n-1}\mathrm{C}_m \text{ (通り)}$$

求める確率を $P(m)$ とすると $(0 \leqq m \leqq n-1)$

$$P(m)=\frac{2\times {}_{n-1}\mathrm{C}_m}{2^n}=\boldsymbol{\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_m}{2^{n-1}}}$$

(4) 求める期待値を E とすると，(3) の結果から

$$E=\sum_{m=0}^{n-1} m\cdot P(m)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=0}^{n-1} m\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_m=\frac{1}{2^{n-1}}\times(n-1)\cdot 2^{n-2}=\boldsymbol{\frac{n-1}{2}}$$

補足

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot {}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=1}^{n} k\cdot {}_n\mathrm{C}_k=n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=n\cdot 2^{n-1}$$

2.5　2005 年度

1 (1) $y=2\sin x$ を微分すると　$y'=2\cos x$

$y'=1\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を解くと　$x=\pm\dfrac{\pi}{3}$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ における C の接線の方程式は

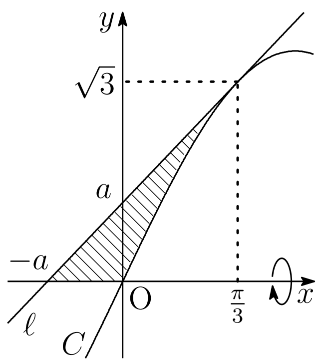
$$y-2\sin\frac{\pi}{3}=x-\frac{\pi}{3}\quad \text{すなわち}\quad y=x+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

$x=-\dfrac{\pi}{3}$ における C の接線の方程式は

$$y-2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=x+\frac{\pi}{3}\quad \text{すなわち}\quad y=x-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$$

$a>0$ であるから　$\boldsymbol{a=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}}$

(2) 求める立体の体積を V とすると



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\cdot\pi(\sqrt{3})^2\cdot\left(\frac{\pi}{3}+a\right)-\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x)^2\,dx \\ &= \sqrt{3}\pi-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2x)\,dx \\ &= \sqrt{3}\pi-2\pi\Big[\,x-\frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi-\frac{2}{3}\pi^2} \end{aligned}$$

2 (1) $\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ より　$(E - A)\vec{p} = \vec{b}$

$E - A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則であり，$(E - A)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

よって　$\vec{p} = (E - A)^{-1}\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

(2) $\vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n + \vec{b}$，$\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ より　$\vec{p}_{n+1} - \vec{p} = A(\vec{p}_n - \vec{p})$

$\vec{q}_n = \vec{p}_n - \vec{p}$ により　$\boldsymbol{\vec{q}_{n+1} = A\vec{q}_n}$

(3) $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ にハミルトン・ケーリーの定理を適用すると

$$A^2 - A + \frac{1}{4}E = O \quad \text{すなわち} \quad \left(A - \frac{1}{2}E\right)^2 = O$$

ここで，$B = A - \dfrac{1}{2}E = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと　$B^2 = O$

$A = \dfrac{1}{2}E + B$ であるから

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}E\right)^{n-k} B^k \\ &= \frac{1}{2^n}E + \frac{n}{2^{n-1}}B + B^2\sum_{k=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}E\right)^{n-k} B^{k-2} \\ &= \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{n}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(4) (2) より　$\vec{q}_n = A^{n-1}\vec{q}_1$

$\vec{q}_1 = \vec{p}_1 - \vec{p} = \vec{a} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ であるから

$$\vec{q}_n = \frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} -2n+1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よって　$\vec{p}_n = \vec{q}_n + \vec{p} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 2^n - 2n + 1 \\ 2^n - 2 \end{pmatrix}}$

$\boxed{3}$ (1) 2 次方程式 $z^2+tz+t=0\cdots$① が異なる 2 つの虚数解をもつとき，$D<0$ であるから

$$t^2-4\cdot1\cdot t<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{0<t<4}$$

このとき，方程式 ① の解は　$\boldsymbol{z=\dfrac{-t\pm\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}}$

(2) $z=z(t)$ とおくと，解と係数の関係により　$z+\overline{z}=-t$，$z\overline{z}=t$

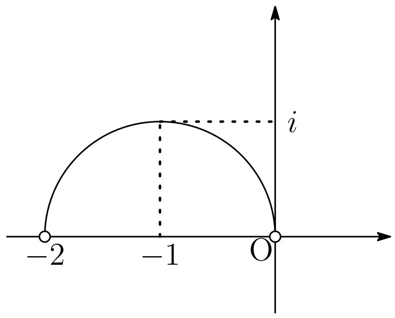
上の 2 式から t を消去すると

$$z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$
$$(z+1)(\overline{z}+1)=1$$

したがって　$|z+1|^2=1$

よって　$|z+1|=1$

ゆえに，$z(t)$ は，-1 を中心とする半径 1 の円周上で，虚部が正である点である．

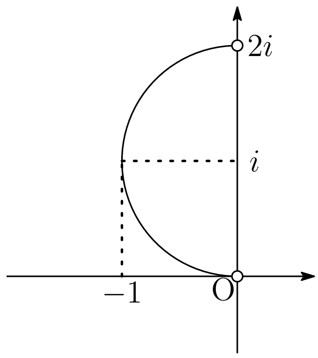


よって，$z(t)$ が描く図形 C は，右の図のようになる．

(3) (2) の結果から，$z=-1+(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(0^\circ<\theta<180^\circ)$

$$\begin{aligned} w&=\frac{iz}{z+1}=\frac{i\{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)\}}{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)+1}\\ &=\frac{-i+i(\cos\theta+i\sin\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta}\\ &=-i\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\ &=(\cos270^\circ+i\sin270^\circ)\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\ &=i+\cos(270^\circ-\theta)+i\sin(270^\circ-\theta) \qquad (90^\circ<270^\circ-\theta<270^\circ) \end{aligned}$$

よって，w が描く図形は，下の図のようになる．



4 (1) $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 1$ より　$\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 2$

したがって　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 2$

ゆえに　$\dfrac{5}{2}+\cos\theta < 3$　すなわち　$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$

$0 < \theta < \pi$ より　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < \theta < \pi}$

(2) $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right] \geqq 1$ より

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\sin\theta \geqq \log_2\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0 < \theta < \pi$ より　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi}$

(3) $\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{5}{2}+\cos\theta \leqq \dfrac{7}{2} \cdots ①$ であるから　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] = 1,\ 2,\ 3$ より

$$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right] = 0,\ 1,\ \log_2 3$$

$\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta \leqq \dfrac{3}{2} \cdots ②$ であるから　$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right] \leqq 1$

与えられた不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ から

$$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right] = 0,\ 1 \quad \text{ゆえに} \quad \left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right] = 1,\ 2$$

上式について，次の 2 つに場合分けをする．

[1] $\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] = 1$ のとき，① に注意して

$$\frac{3}{2} \leqq \frac{5}{2}+\cos\theta < 2 \quad \text{ゆえに} \quad -1 \leqq \cos\theta < -\frac{1}{2}$$

$0 < \theta < \pi$ より　$\dfrac{2}{3}\pi < \theta < \pi \quad \cdots ③$

与えられた不等式から $\quad 0 \leqq \left[\dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\right] \leqq 1$

② に注意して $\quad 0 \leqq \dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta \leqq \dfrac{3}{2}$

$$-\frac{3}{2} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq 0$$

ゆえに $\quad \log_2 \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq \log_2 1$

したがって $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq \sin\theta \leqq 1$

$0 < \theta < \pi$ より $\quad \alpha \leqq \theta \leqq \pi - \alpha \quad \cdots$④

$\sin\dfrac{2}{3}\pi > \sin(\pi - \alpha)$ であるから $\dfrac{2}{3}\pi < \pi - \alpha$ に注意して,
③, ④ の共通範囲を求めると

$$\frac{2}{3}\pi < \theta \leqq \pi - \alpha$$

[2] $\left[\dfrac{5}{2} + \cos\theta\right] = 2$ のとき

$$2 \leqq \frac{5}{2} + \cos\theta < 3 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{2} \leqq \cos\theta < \frac{1}{2}$$

$0 < \theta < \pi$ より $\quad \dfrac{\pi}{3} < \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi \quad \cdots$⑤

与えられた不等式から $\quad \left[\dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\right] = 1$

② に注意して $\quad 1 \leqq \dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta \leqq \dfrac{3}{2}$

$$-\frac{1}{2} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq 0$$

ゆえに $\quad \log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq \log_2 1$

したがって $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\theta \leqq 1$

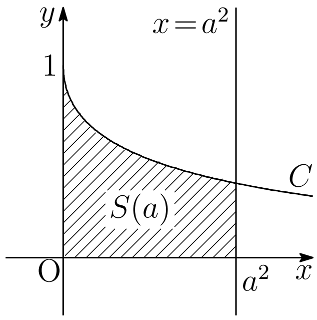
$0 < \theta < \pi$ より $\quad \dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi \quad \cdots$⑥

⑤, ⑥ の共通範囲を求めると

$$\frac{\pi}{3} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$$

求める θ の値の範囲は, [1] または [2] であるから $\quad \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < \theta \leqq \pi - \alpha}$

5 (1) $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = e^{-t} \end{cases}$ $(t \geqq 0)$ より，$y \geqq 0$ であるから

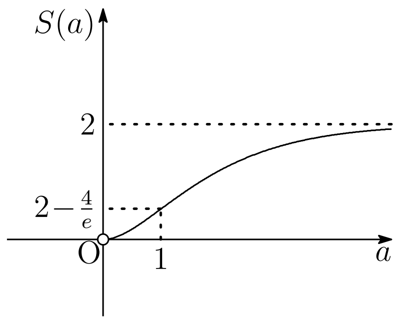


$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{a^2} y\,dx = \int_0^a e^{-t}\frac{dx}{dt}dt \\ &= \int_0^a e^{-t}\cdot 2t\,dt = 2\int_0^a te^{-t}\,dt \\ &= -2\Big[\ (t+1)e^{-t}\ \Big]_0^a \\ &= \boldsymbol{-2(a+1)e^{-a}+2} \end{aligned}$$

(2) $S'(a) = 2ae^{-a}$，$S''(a) = 2(1-a)e^{-a}$

$S(a)$ の増減，凹凸は下の表のようになる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	$+$	$+$
$S''(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$	0	⤴	変曲点	⤴



また，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(a+1)e^{-a} = 0$ であるから

$$\lim_{a\to\infty} S(a) = 2$$

よって，$S(a)$ のグラフは，右の図のようになる。

(3) $\dfrac{5}{2} < e < 3$ であるから

$$S(2) = 2(1-3e^{-2}) = 2\left(1-\frac{3}{e^2}\right) < 2\left(1-\frac{3}{3^2}\right) = \frac{4}{3} < 1.35$$

$$S(3) = 2(1-4e^{-3}) = 2\left(1-\frac{4}{e^3}\right) > 2\left\{1-4\left(\frac{2}{5}\right)^3\right\} = \frac{186}{125} > 1.35$$

したがって　　　$S(2) < 1.35 < S(3)$

よって，中間値の定理により，$S(a) = 1.35$ を満たす a が $2 < a < 3$ の範囲に存在する．

2.6　2006年度

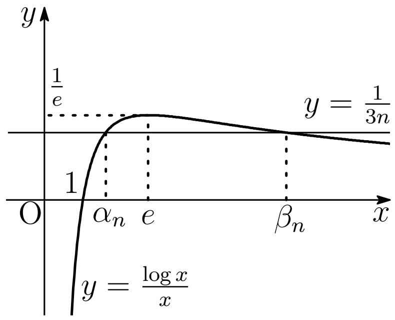
1 (1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x) = 0$ のとき　$x = e$

よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$



$\dfrac{1}{3n} \leqq \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{e}$ であるから，上のグラフより，方程式 $\dfrac{\log x}{x} = \dfrac{1}{3n}$ は $x > 0$ の範囲にちょうど2つ実数解をもつ．

(2) $n \geqq 1$ より　　$e^{\frac{1}{n}} \leqq e \leqq ne$　$\cdots$①

$f(e^{\frac{1}{n}}) = \dfrac{1}{ne^{\frac{1}{n}}} \geqq \dfrac{1}{ne} > \dfrac{1}{3n} > 0$ であるから

$$0 < \frac{1}{3n} < f(e^{\frac{1}{n}}) \quad \text{ゆえに} \quad f(1) < f(\alpha_n) < f(e^{\frac{1}{n}}) \quad \cdots ②$$

$f(ne) = \dfrac{\log ne}{ne} > \dfrac{\log e}{3n} = \dfrac{1}{3n}$ であるから

$$f(ne) > \frac{1}{3n} \quad \text{ゆえに} \quad f(ne) > f(\beta_n) \quad \cdots ③$$

$f(x)$ は，$0 < x < e$ において単調増加であり，$e < x$ において単調減少であるから，①，②，③により

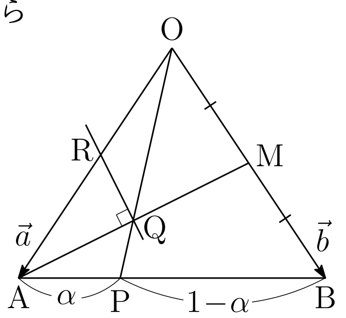
$$1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}, \quad ne < \beta_n$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \mathbf{1}$$

2 (1) P は AB を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}} \quad \cdots ①$$



Q は OP 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad \cdots ②$$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\{(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \alpha\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\} = s(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2s\alpha\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Q は，AM 上の点であるから

$$s(1-\alpha) + 2s\alpha = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{1}{1+\alpha} \quad \cdots ③$$

①，②，③ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{1+\alpha}\{(1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}\} = \boldsymbol{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t\vec{a}$ とおくと　　$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right)\vec{a} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$

また　　$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ であるから

$$\left(t - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)|\vec{a}|^2 + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}|\vec{b}|^2 = 0$$

ここで，$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2\cdot 3\cdot\frac{1}{6} = 1$ であるから

$$4\left(t - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\} + \frac{9\alpha}{2(1+\alpha)} = 0$$

したがって　$t = \dfrac{1-2\alpha}{1+\alpha}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1-2\alpha}{1+\alpha}\vec{a}}$

(3) R が OA の中点であるから

$$\frac{1-2\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{2} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{\alpha = \frac{1}{5}}$$

3 (1) 数学的帰納法により示す．

「a_n は3で割り切れるが，b_n は3で割り切れない」を (A) とする．

［1］$n=3$ のとき

$$a_2 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2, \qquad b_2 = 2 \cdot 1^2 + 1^2 = 3$$
$$a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12, \qquad b_3 = 2 \cdot 2^2 + 3^2 = 17$$

よって，$n=3$ のとき，(A) は成り立つ．

［2］$n=k$ のとき $(k \geqq 3)$，(A) が成り立つと仮定すると，
$a_k = 3M$，$b_k = 3N \pm 1$ とおけるから (M, N は整数)

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_kb_k = 2 \cdot 3M \cdot (3N \pm 1) \\ &= 3 \cdot 2M(3N \pm 1) \\ b_{k+1} &= 2{a_k}^2 + {b_k}^2 \\ &= 2(3M)^2 + (3N \pm 1)^2 \\ &= 18M^2 + (9N^2 \pm 6N + 1) \\ &= 3(6M^2 + 3N^2 \pm 2N) + 1 \end{aligned}$$

［1］，［2］から，$n \geqq 3$ について (A) が成り立つ．

(2) $b_1 = 1$，$b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$ より，b_n は奇数．以下を背理法により示す．
$a_2 = 2$，$b_2 = 3$ より，$2 \leqq n \leqq m$ のとき，a_n と b_n は互いに素であるが，
a_{m+1} と b_{m+1} は素数 p を約数にもつと仮定する $(p \geqq 3)$．
$a_{m+1} = 2a_mb_m$ より，次の2つに場合分けをする．

［1］a_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - 2{a_m}^2 = {b_m}^2$ であるから，
b_m も p で割り切れる．

［2］b_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - {b_m}^2 = 2{a_m}^2$ であるから，
a_m も p で割り切れる．

［1］，［2］より，a_m，b_m がともに p で割り切れて，仮定に反する．
よって，$n \geqq 2$ のとき，a_n，b_n は互いに素である．

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=0$ より，$\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}=0$ であるから

$$\sin x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin x=0,\ 1$$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ より　$\boldsymbol{x=-\pi,\ 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$

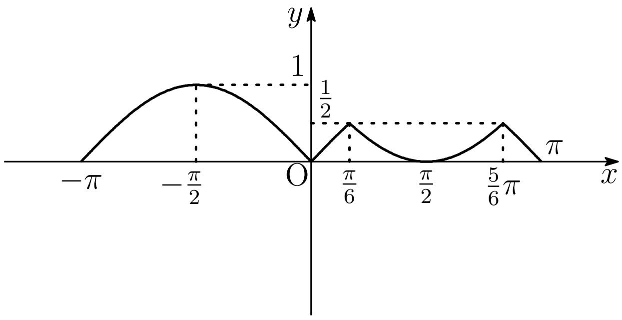
(2) i) $\sin x-\dfrac{1}{2}\geqq 0$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$f(x)=\left|\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|=|\sin x-1|=1-\sin x$$

ii) $\sin x-\dfrac{1}{2}\leqq 0$　すなわち　$-\pi\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$f(x)=\left|\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)-\frac{1}{2}\right|=|\sin x|$$

i)，ii) から，グラフの概形は，次のようになる．



(3) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x-\dfrac{\pi}{2}\leqq 0$ より，(2) の結果から

$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|=|-\cos x|=\cos x$$

上式および (2) の結果から

$$f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\sin x\cos x & (0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6})\\(1-\sin x)\cos x & (\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

したがって

$0\leqq a\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき　$F(a)=\displaystyle\int_0^a\sin x\cos x\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{4}(1-\cos 2a)}$

$\frac{\pi}{6}\leqq a\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき　$F(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^a(1-\sin x)\cos\ dx$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\cos 2a+\sin a-\frac{1}{2}}$$

5 (1) $$f(x) = -4x^2 + 4x = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

区間 $[0,\ 1]$ において，$0 \leqq f(x) \leqq 1$ であるから，
区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変である．

(2) 区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとき

$$a \leqq f(a),\quad f(b) \leqq b \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq 4a(1-a),\quad 4b(1-b) \leqq b$$

$0 < a < b < 1$ に注意して，これを解くと　$0 < a \leqq \dfrac{3}{4} \leqq b < 1$　$\cdots$①
① に注意して，次の 2 つの場合分けを行う．

i) $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\frac{1}{2} \in [a,\ b],\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \notin [a,\ b]$$

ii) $\dfrac{1}{2} < a \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき
区間 $[a,\ b]$ において，関数 $f(x)$ は単調減少であるから

$$f(a) \leqq b,\quad f(b) \geqq a \quad \text{ゆえに} \quad -4a^2 \leqq -4a + b,\quad 4b^2 \leqq -a + 4b$$

上の 2 式の辺々を加えると　$4(b+a)(b-a) \leqq 5(b-a)$
$0 < a < b < 1$ より，$b - a > 0$ であるから　$a + b \leqq \dfrac{5}{4}$
これは，$\dfrac{1}{2} < a$，$\dfrac{3}{4} \leqq b$ に反する．

i)，ii) より，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではない．

ロジスティック写像 (Logistic map)

区間 $[a,\ b]$ が出題された関数について不変であれば

$$x_{n+1} = f(x_n),\ a \leqq x_0 \leqq b$$

とおくと，$a \leqq x_n \leqq b$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ となる．$\{x_n\}$ の収束・発散などを調べて反例を示すことは，この関数の特異性から不可能である．写像

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) : 0 \leqq \lambda \leqq 4,\ 0 \leqq x_0 \leqq 1$$

をロジスティック写像といい，極めて複雑な振舞いをすることで知られている．

2.7　2007 年度

1　(1) $f(x) = xe^x$ を微分すると　$f'(x) = (x+1)e^x$
P$(p,\ pe^p)$ における接線の方程式は

$$y - pe^p = (p+1)e^p(x-p) \quad \text{ゆえに} \quad y = (p+1)e^p x - p^2e^p$$

よって　　$g(x) = (p+1)e^p x - p^2 e^p$
ここで，$h(x) = f(x) - g(x)$ $(x \geqq 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} h(x) &= xe^x - (p+1)e^p x + p^2 e^p \\ h'(x) &= (x+1)e^x - (p+1)e^p \\ h''(x) &= (x+2)e^x \end{aligned}$$

$x \geqq 0$ において $h''(x) > 0$ より，$h'(x)$ は単調増加であるから，$h(x)$ の増減は，右の表のようになる．
したがって，$x \geqq 0$ において　$h(x) \geqq 0$
よって　　$x \geqq 0$ において　$f(x) \geqq g(x)$

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

(2) (1) の結論から

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^L \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= \int_0^L xe^x\,dx - (p+1)e^p \int_0^L x\,dx + p^2e^p \int_0^L dx \\ &= \int_0^L xe^x\,dx - \frac{L^2}{2}(p+1)e^p + Lp^2e^p \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S'(p) &= -\frac{L^2}{2}(p+2)e^p + L(p^2+2p)e^p \\ &= \frac{L}{2}e^p(p+2)(2p-L) \end{aligned}$$

よって，$S(p)$ の増減は右の表のようになり，$S(p)$ は，$\boldsymbol{p = \frac{L}{2}}$ で最小値をとる．

p	0	$\cdots$	$\frac{L}{2}$	$\cdots$
$S'(p)$		$-$	0	$+$
$S(p)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

2 (1) $A_2 = A_1B - BA_1 + C$ より

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2+p \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+p & 1+p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1}+\boldsymbol{p} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$A_3 = A_2B - BA_2 + C$ より

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1+p \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+(1+p)^2 \\ -1 & -2-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -p \\ 1+p & 1+p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1}+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

(2) 行列 A_n について

$$A_{n+1} = A_nB - BA_n + C \qquad \cdots ①$$

① より $$A_{n+2} = A_{n+1}B - BA_{n+1} + C \qquad \cdots ②$$

も成り立つ．

② − ① より $$A_{n+2} - A_{n+1} = (A_{n+1} - A_n)B - B(A_{n+1} - A_n) \qquad \cdots ③$$

(1) の結果から

$$A_2 - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 0 & p^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで，$n \geqq 1$ のとき

$$A_{n+1} - A_n = \begin{pmatrix} 0 & p^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots (*)$$

と推測し，これを数学的帰納法により証明する．

［1］ $n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$A_{k+1}-A_k=\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

であると仮定すると，③ より

$$\begin{aligned}A_{k+2}-A_{k+1}&=(A_{k+1}-A_k)B-B(A_{k+1}-A_k)\\&=\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & p^k+p^{k+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & p^{k+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

$n \geqq 2$ とすると，$p \neq 1$ に注意して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(A_{k+1}-A_k)&=\sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\A_n&=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix}0 & p^k\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1-p^n}{1-p}\\ -1 & -1\end{pmatrix}\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

$(**)$ は $n=1$ のときも成り立つので，すべての自然数 n について $(**)$ は成り立つ．

したがって　　$\Delta_n=-1+\dfrac{1-p^n}{1-p}$

$0<p<1$ により　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Delta_n=-1+\frac{1}{1-p}=\boldsymbol{\frac{p}{1-p}}$

3 (1) AB の中点 D は

$$\left(\frac{a+(-a)}{2},\ \frac{-a+a}{2},\ \frac{b+b}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad (0,\ 0,\ b)$$

ゆえに
$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(a,\ a,-b)-(0,\ 0,\ b)=(a,\ a,-2b)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-a,\ a,\ b)-(a,-a,\ b)=(-2a,\ 2a,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DO}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-(0,\ 0,\ b)=(0,\ 0,-b)$$

したがって
$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=a\cdot(-2a)+a\cdot 2a+(-2b)\cdot 0=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\cdot(-2a)+0\cdot 2a+(-b)\cdot 0=0$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

DC$\perp$AB より，$a>0$ に注意して

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(-2a)^2+(2a)^2+0^2}\sqrt{a^2+a^2+(-2b)^2}\\&=\boldsymbol{2a\sqrt{a^2+2b^2}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$b>0$ に注意して

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}||\overrightarrow{\mathrm{DO}}|}=\frac{2b^2}{\sqrt{2a^2+4b^2}\times b}=\frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

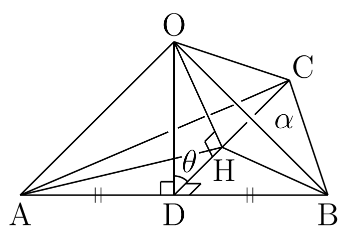
$\sin\theta\geqq 0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\boldsymbol{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}}}$

DO$\perp$AB であるから　OA $=$ OB

ゆえに　$\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OBH}$　さらに　$\triangle\mathrm{HAD}\equiv\triangle\mathrm{HBD}$

DC$\perp$AB であるから，H は直線 CD 上にある．

よって　$\mathrm{OH}=\mathrm{DO}\sin\theta=b\times\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}}=\boldsymbol{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}}$

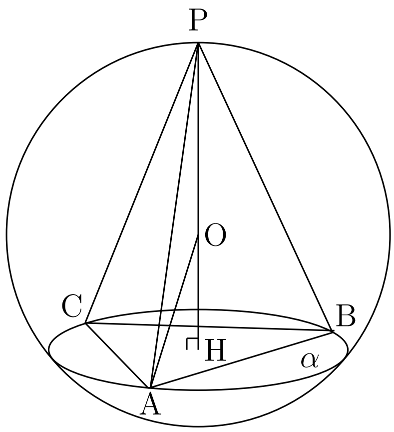


(3) 直線 OH と球面 S の交点のうち，平面 α に関して，O と同じ側にある点を P とするとき，四面体 ABCP の体積は最大となる．このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{PH} &= \mathrm{PO}+\mathrm{OH}\\ &= \mathrm{OA}+\mathrm{OH}\\ &= \sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\end{aligned}$$

よって，求める最大値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{PH} &= \frac{1}{3}\times 2a\sqrt{a^2+2b^2}\left(\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{2a}{3}\left(\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}+ab\right)}\end{aligned}$$



4　(1) 2次方程式 $(*)$ が異なる2つの実数解をもつ条件は

$$b^2-4ac>0 \quad \text{ゆえに} \quad ac<\frac{b^2}{4}$$

$\dfrac{b^2}{4}\leqq\dfrac{6^2}{4}=9$ であるから　$ac<\dfrac{b^2}{4}\leqq 9$　すなわち　$ac\leqq 8$

したがって，ac のとりうる値は　1, 2, 3, 4, 5, 6, 8

よって，ac の値とその組 $(a,\ c)$ の個数は次のとおりである．

$ac=1$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 1)$ の **1通り**

$ac=2$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ の **2通り**

$ac=3$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ の **2通り**

$ac=4$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$ の **3通り**

$ac=5$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 5),\ (5,\ 1)$ の **2通り**

$ac=6$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$ の **4通り**

$ac=8$ のとき　$(a,\ c)=(2,\ 4),\ (4,\ 2)$ の **2通り**

(2) (1) の場合において，$D=b^2-4ac$ が平方数となる b の個数を調べる．

$ac=1$ のとき　$D=b^2-4$ より　b の値はなし

$ac=2$ のとき　$D=b^2-8$ より　$b=3$ の1通り

$ac=3$ のとき　$D=b^2-12$ より　$b=4$ の1通り

$ac=4$ のとき　$D=b^2-16$ より　$b=5$ の1通り

$ac=5$ のとき　$D=b^2-20$ より　$b=6$ の1通り

$ac=6$ のとき　$D=b^2-24$ より　$b=5$ の1通り

$ac=8$ のとき　$D=b^2-32$ より　$b=6$ の1通り

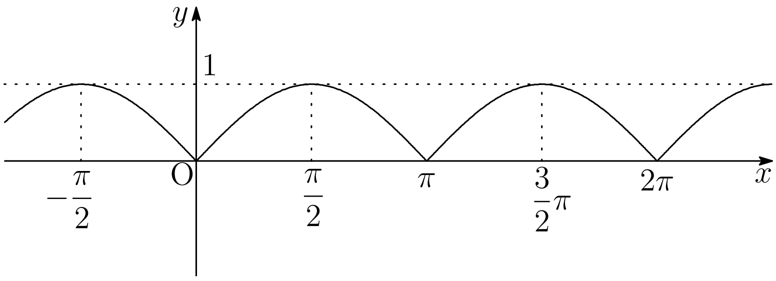
よって，求める確率は，(1) の結果に注意して

$$\frac{2\cdot1+2\cdot1+3\cdot1+2\cdot1+4\cdot1+2\cdot1}{6^3}=\frac{15}{6^3}=\boldsymbol{\frac{5}{72}}$$

5　(1) $\sin x \geqq 0$ のとき　$|\sin x| = \sin x$

$\sin x < 0$ のとき　$|\sin x| = -\sin x$

$y = |\sin x|$ のグラフは，下の図のようになる．



任意の実数 x について $|\sin(x+p)| = |\sin x|$ が成り立つので，$x = 0$ のとき

$$|\sin p| = 0$$

これを満たす最小の正の数 p は　$p = \pi$

実際，任意の実数 x について $|\sin(x+\pi)| = |\sin x|$ が成り立つ．

よって，求める基本周期は　$\boldsymbol{\pi}$

(2) 任意の x に対して　$f(x+p) = f(x)$

これに $x = -\dfrac{p}{2}$ を代入して　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = f\left(\dfrac{p}{2}\right)$　$\cdots$①

また　$f(-x) = |\sin(-mx)|\sin(-nx)$
$= -|\sin mx|\sin nx = -f(x)$

ゆえに　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = -f\left(\dfrac{p}{2}\right)$　$\cdots$②

①，② より　$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = 0$

$f\left(\dfrac{p}{2}\right) = 0$ より　$\left|\sin\dfrac{mp}{2}\right|\sin\dfrac{np}{2} = 0$

ゆえに　$\sin\dfrac{mp}{2} = 0$　または　$\sin\dfrac{np}{2} = 0$

したがって　$mp = 2k\pi$　または　$np = 2l\pi$　(k，l は整数)

i) $mp = 2k\pi$ (k は整数) のとき

$$\begin{aligned} f(x+p) &= |\sin m(x+p)|\sin n(x+p) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin(nx+np) \\ &= |\sin(mx+2k\pi)|\sin(nx+np) \\ &= |\sin mx|\sin(nx+np) \end{aligned}$$

このとき，$f(x+p) = f(x)$ が成り立つ，すなわち

$$|\sin mx|\sin(nx+np) = |\sin mx|\sin nx \quad \cdots(*)$$

任意の実数 x に対して $(*)$ が成り立つとき　$\sin(nx+np) = \sin nx$
ゆえに，np は 2π の整数倍．

ii) $np = 2l\pi$ (l は整数) のとき

$$\begin{aligned} f(x+p) &= |\sin m(x+p)|\sin n(x+p) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin(nx+np) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin(nx+2l\pi) \\ &= |\sin(mx+mp)|\sin nx \end{aligned}$$

このとき，$f(x+p) = f(x)$ が成り立つ，すなわち

$$|\sin(mx+mp)|\sin nx = |\sin mx|\sin nx \quad \cdots(**)$$

任意の実数 x に対して $(**)$ が成り立つとき

$$|\sin(mx+mp)| = |\sin mx|$$

上式に $x = 0$ を代入すると　$|\sin mp| = 0$
ゆえに，mp は π の整数倍である．
実際，mp が π の整数倍であれば，$(**)$ が成り立つ．

i)，ii) より，mp は π の整数倍であり，np は 2π の整数倍である．

(3) (2) の結果より，改めて，$mp = k\pi$，$np = 2l\pi$ とおくと (k，l は整数)

$$p = \frac{k\pi}{m} = \frac{2l\pi}{n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{kn}{m} = 2l$$

m と n は互いに素であるから，k は m の倍数.

ゆえに，$k = mk'$ とおくと (k' は整数)，$p = k'\pi \cdots$③ であるから

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x+k'\pi) \\ &= |\sin m(x+k'\pi)|\sin n(x+k'\pi) \\ &= |\sin(mx+mk'\pi)|\sin(nx+nk'\pi) \\ &= |\sin mx|(\sin nx\cos nk'\pi + \cos nx\sin nk'\pi) \\ &= (-1)^{nk'}|\sin mx|\sin nx \\ &= (-1)^{nk'}f(x) \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

i) n が偶数のとき
$k' = 1$ とすると，③，④ より　$f(x+\pi) = f(x)$
したがって，基本周期は π

ii) n が奇数のとき
$k' = 2$ とすると，③，④ より　$f(x+2\pi) = f(x)$
したがって，基本周期は 2π

よって，基本周期は，n が偶数のとき $\boldsymbol{\pi}$，n が奇数のとき $\boldsymbol{2\pi}$

2.8　2008 年度

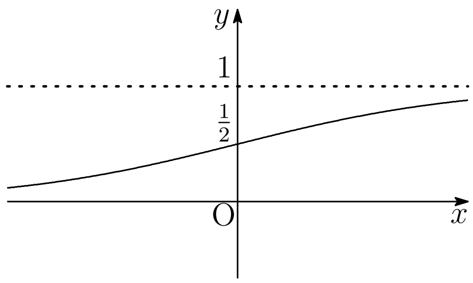
1　(1) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} = 1 - \dfrac{1}{e^x+1}$ より　$f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{e^x+1} - \dfrac{1}{(e^x+1)^2}$ であるから

$$f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} + \frac{2e^x}{(e^x+1)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

よって，増減やグラフの凹凸は左下の表のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	変曲点 $\frac{1}{2}$	$\nearrow$



また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ であるから，漸近線は $y=0$，$y=1$

以上から，この関数のグラフの概形は，右上の図のようになる．

(2) $y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおいて $(0 < y < 1)$，x について解くと

$$e^x = \frac{y}{1-y} \quad ゆえに \quad x = \log\frac{y}{1-y}$$

よって　　$\boldsymbol{f^{-1}(x) = \log\dfrac{x}{1-x}}$　$\boldsymbol{(0 < x < 1)}$

(3) $0 < \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{1}{n+1} < 1$ であるから，$f^{-1}(x) = -\log\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$ により

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) = -\log(n+2-1) = -\log(n+1)$$
$$f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\log(n+1-1) = -\log n$$

$$n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\} = -n\{\log(n+1) - \log n\} = -\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

よって　$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$
$$= -\log e = \boldsymbol{-1}$$

2 (1) 得点が 1 であるのは，1 回目に 2 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に 1 の番号を引く場合である．よって，求める確率は

$$\frac{k-1}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k-1}{90}}$$

得点が 10 であるのは，1 回目に 10 を引くか，1 回目に 1 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に 10 の番号を引く場合である．よって，求める確率は

$$\frac{1}{10}+\frac{k}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k+9}{90}}$$

(2) n の値について，次の 2 つに場合分けをする．

i) $n \leqq k$ のとき
1 回目に n 以外の 1 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に n の番号を引く場合である．よって，その確率は

$$\frac{k-1}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k-1}{90}}$$

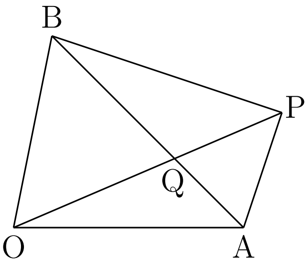
ii) $k<n$ のとき
1 回目に n を引くか，1 回目に 1 から k までのいずれかの番号を引き，2 回目に n の番号を引く場合である．よって，その確率は

$$\frac{1}{10}+\frac{k}{10}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{k+9}{90}}$$

(3) (1)，(2) より，求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{n=1}^{k} n\times\frac{k-1}{90}+\sum_{n=k+1}^{10} n\times\frac{k+9}{90}\\
&= \frac{k-1}{90}\sum_{n=1}^{k} n+\frac{k+9}{90}\sum_{n=k+1}^{10} n=\frac{k-1}{90}\sum_{n=1}^{k} n+\frac{k-1+10}{90}\sum_{n=k+1}^{10} n\\
&= \frac{k-1}{90}\sum_{n=1}^{10} n+\frac{1}{9}\sum_{n=k+1}^{10} n\\
&= \frac{k-1}{90}\times\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11+\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}(10-k)\{(k+1)+10\}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{18}(-k^2+10k+99)}
\end{aligned}$$

3　(1) AQ : QB $=\triangle$OAP : $\triangle$OBP $= a : b$

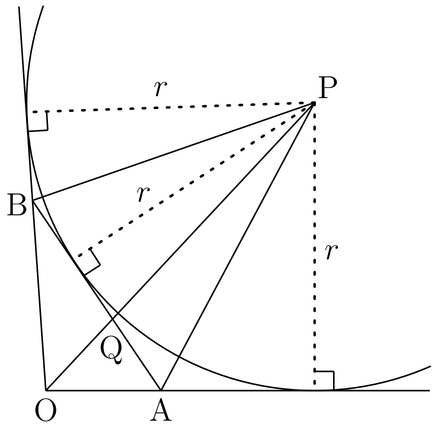


よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{\boldsymbol{b}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \boldsymbol{a}\overrightarrow{\mathbf{OB}}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$

(2)　OQ : OP
$=\triangle$OAB : $\triangle$OAP $+ \triangle$OBP
$= a+b-c : a+b$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{a+b}{a+b-c}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{\boldsymbol{b}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \boldsymbol{a}\overrightarrow{\mathbf{OB}}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}$

(3) 3 直線 OA，OB，AB に接する円の半径を r とすると



$\triangle$OAP : $\triangle$OBP : $\triangle$ABP
$=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot r : \dfrac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot r : \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot r$
$=$OA : OB : AB

したがって　$a : b : c = 3 : 5 : 6$
よって，(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+5-6} = \frac{\mathbf{5}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \mathbf{3}\overrightarrow{\mathbf{OB}}}{\mathbf{2}}$$

別解 (3)　OP は $\triangle$OAB の O の内角の二等分線であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right) = \frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

AP は $\triangle$OAB の A の外角の二等分線であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}}{6}\right)$$
$$= \left(1+\frac{t}{6}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

上の 2 式より　$\dfrac{s}{3} = 1 + \dfrac{t}{6}$，$\dfrac{s}{5} = \dfrac{t}{6}$　ゆえに　$s = \dfrac{15}{2}$，$t = 9$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

4 (1) $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

点 P の x 座標を p とすると　$f(p)=g(p)$，$f'(p)=g'(p)$

したがって　$a+\log p=\sqrt{p-1}$　$\cdots$①，　$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2\sqrt{p-1}}$　$\cdots$②

② から　$p=2\sqrt{p-1}$　$(p>1)$

この式の両辺を平方すると　$p^2=4(p-1)$　ゆえに　$(p-2)^2=0$

$p>1$ に注意して　$p=2$

$a>0$ に注意しながら，① に代入して　$\boldsymbol{a=1-\log 2}$

よって，P の座標は　**P(2, 1)**

点 P における接線の傾きは $\dfrac{1}{2}$ であるから，接線 l の方程式は

$$y-1=\frac{1}{2}(x-2)\quad\text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}$$

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと $(x\geqq 1)$

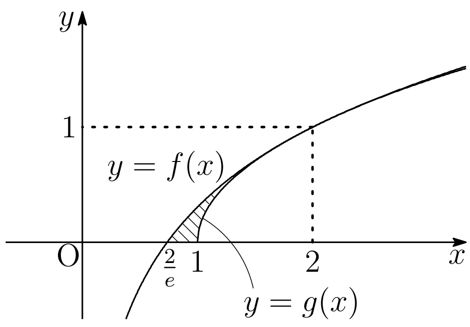
$$h(x)=a+\log x-\sqrt{x-1}$$
$$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2\sqrt{x-1}-x}{2x\sqrt{x-1}}$$
$$=-\frac{(x-2)^2}{2x\sqrt{x-1}(2\sqrt{x-1}+x)}$$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$-$
$h(x)$	a	↘	0	↘

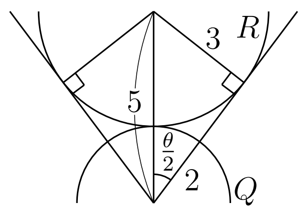
$h(x)=0$ の解は $x=2$ のみであり，2 曲線は点 P 以外に共有点を持たない．

(3) 求める面積を S とすると，下の図から

$$S=\int_{\frac{2}{e}}^{2}(1-\log 2+\log x)\,dx-\int_{1}^{2}\sqrt{x-1}\,dx$$
$$=\Big[(1-\log 2)x+x\log x-x\Big]_{\frac{2}{e}}^{2}-\frac{2}{3}\Big[(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big]_{1}^{2}$$
$$=\Big[x\log x-x\log 2\Big]_{\frac{2}{e}}^{2}-\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{e}-\frac{2}{3}}$$



5 (1) 右の図から　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$



$0<\theta<\pi$ より，$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

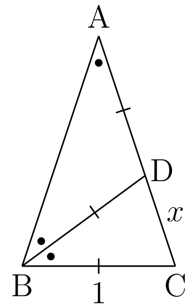
$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

よって　$\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\boldsymbol{\dfrac{24}{25}}$

(2) $\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{5}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$\sin\dfrac{\pi}{6}<\sin\dfrac{\theta}{2}<\sin\dfrac{\pi}{4}$

したがって　$\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$　よって　$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\alpha=\dfrac{\pi}{5}$ とする．$\mathrm{BC}=1$，$A=\alpha$，$B=C=2\alpha$ である二等辺三角形について，$\angle$B の二等分線と CA との交点を D とする．$\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{AD}=1$．$\mathrm{CD}=x$ とおくと，AB : BC = BC : CD であるから



$$(1+x):1=1:x\quad ゆえに\quad x^2+x-1=0$$

$x>0$ に注意してこれを解くと　$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

△BCD に余弦定理を適用すると，$x^2=1-x$ であることに注意して

$$\cos\alpha=\frac{1^2+1^2-x^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{x+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

ここで　$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{5\sqrt{5}-11}{20}=\dfrac{\sqrt{125}-\sqrt{121}}{20}>0$

したがって　$\cos\alpha>\cos\dfrac{\theta}{2}$　ゆえに　$\alpha<\dfrac{\theta}{2}$　すなわち　$\dfrac{2}{5}\pi<\theta$

上式および (2) の結果から　$\dfrac{2}{5}\pi<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

これから　$4<\dfrac{2\pi}{\theta}<5$

よって，配置できる半径 3 の円の最大個数は　**4** (個)

2.9 2009 年度

1 (1) C は直線 AB 上にあるから，実数 α を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \alpha(2,\ 6) + (1-\alpha)(3,\ 4)\\ &= (3-\alpha,\ 4+2\alpha)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ 4) - (2,\ 6) = (1, -2)$ であるから

$$(3-\alpha)\cdot 1 + (4+2\alpha)\cdot(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = -1$$

したがって　**C(4, 2)**

与式および上の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= s(2,\ 6) + t(3,\ 4) - (4,\ 2)\\ &= (2s+3t-4,\ 6s+4t-2)\end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= (2s+3t-4)^2 + (6s+4t-2)^2\\ &= \boldsymbol{40s^2 + 25t^2 + 60st - 40s - 40t + 20}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果を t について整理すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= 25t^2 - (40-60s)t + 40s^2 - 40s + 20\\ &= 2\left(t - \frac{4-6s}{5}\right)^2 + 4s^2 + 8s + 4 \quad (t \geqq 0)\end{aligned}$$

i) $0 \leqq \dfrac{4-6s}{5}$ すなわち $s \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき

$t = \dfrac{4-6s}{5}$ で最小値 $4s^2+8s+4$ をとる．

ii) $\dfrac{4-6s}{5} < 0$ すなわち $s > \dfrac{2}{3}$ のとき

$t = 0$ で最小値 $40s^2 - 40s + 20$ をとる．

i)，ii) より，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値は

$$\boldsymbol{s \leqq \frac{2}{3}\ \text{のとき}\ 4s^2 + 8s + 4,\quad s > \frac{2}{3}\ \text{のとき}\ 40s^2 - 40s + 20}$$

$\boxed{2}$ (1) 1 回の操作で，偶数，奇数が出る確率は，それぞれ

$$\frac{M}{M+N},\ \frac{N}{M+N}$$

である．したがって $\quad p_1 = \boldsymbol{\dfrac{M}{M+N}}$

2 回の操作で記録された 2 個の数の和が偶数となるのは，2 回とも偶数のカードまたは 2 回とも奇数のカードを取り出す場合であるから

$$p_2 = \left(\frac{M}{M+N}\right)^2 + \left(\frac{N}{M+n}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{M^2+N^2}{(M+N)^2}}$$

(2) $n+1$ 回の操作で $n+1$ 個の数の和が偶数となるのは，n 回までのカードの和が偶数で $n+1$ 回目で偶数のカードを取り出すか，n 回までのカードの和が奇数で $n+1$ 回目で奇数のカードを取り出す場合であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times \frac{M}{M+N} + (1-p_n) \times \frac{N}{M+N} \\ &= \boldsymbol{\frac{M-N}{M+N}p_n + \frac{N}{M+N}} \end{aligned}$$

(3) $M+N$ は，1 から k までの自然数の和であるから

$$M+N = 1+2+3+\cdots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

i) k が偶数のとき，M，N の項数はともに $\dfrac{k}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} M &= 2+4+6+\cdots+k = \frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2}\cdot(2+k) = \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2} \\ N &= 1+3+5+\cdots+(k-1) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

したがって $\quad \dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{\left(\frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}\right) - \frac{k^2}{4}}{\frac{1}{2}k(k+1)} = \dfrac{1}{k+1}$

ii) k が奇数のとき，M，N の項数はそれぞれ $\dfrac{k-1}{2}$，$\dfrac{k+1}{2}$ であるから

$$M = 2+4+6+\cdots+(k-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}\cdot\{2+(k-1)\} = \frac{k^2}{4}-\frac{1}{4}$$

$$N = 1+3+5+\cdots+k = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}+\frac{1}{4}$$

したがって $\quad \dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{\frac{k^2}{4}-\frac{1}{4}-\left(\frac{k^2}{4}+\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}k(k+1)} = -\dfrac{1}{k}$

i)，ii) より $\quad$ $$\boldsymbol{\frac{M-N}{M+N} = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1} & (k\text{ が偶数のとき}) \\ -\dfrac{1}{k} & (k\text{ が奇数のとき}) \end{cases}}$$

(4) (2) の結果から

$$p_{n+1}-\frac{1}{2} = \frac{M-N}{M+N}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，公比 $\dfrac{M-N}{M+N}$ の等比数列であるから，これに (1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned} p_n-\frac{1}{2} &= \left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1} \\ p_n &= \left(\frac{M}{M+N}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}+\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n}+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって，(3) の結果により

$$\boldsymbol{p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^n+\dfrac{1}{2} & (k\text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n+\dfrac{1}{2} & (k\text{ が奇数のとき}) \end{cases}}$$

$\boxed{3}$ (1) $y=\dfrac{x^2}{2}$ を微分すると $y'=x$

点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における接線の方向ベクトルは $(1,\ a)$ であるから，A における法線の方程式は

$$1(x-a)+a\left(y-\frac{a^2}{2}\right)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+ay=a+\frac{a^3}{2} \qquad \cdots ①$$

同様にして $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の方程式は $x+by=b+\dfrac{b^3}{2}$ $\cdots ②$

①，② から x を消去すると

$$(b-a)y=b-a+\frac{b^3-a^3}{2} \quad b\neq a \text{ より} \quad y=1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}$$

これを ① に代入すると

$$x+a\left(1+\frac{a^2+ab+b^2}{2}\right)=a+\frac{a^3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{ab(a+b)}{2}$$

したがって，R の座標は $\left(-\dfrac{ab(a+b)}{2},\ 1+\dfrac{a^2+ab+b^2}{2}\right)$

よって，$b\to a$ による R の極限の点 A の座標は $\boldsymbol{\left(-a^3,\ 1+\dfrac{3}{2}a^2\right)}$

(2) (1) の結果から

$$x=-a^3,\ y=1+\frac{3}{2}a^2$$

とおくと，第 1 式から $a=-x^{\frac{1}{3}}$

これを第 2 式に代入すると $y=1+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

上式が C_2 の方程式であり，C_1，C_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{2}=1+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \quad \text{ゆえに} \quad x^2-3x^{\frac{2}{3}}-2=0$$

$x^{\frac{1}{3}}=t\cdots ③$ とおくと $x=t^3\cdots ③'$

$$t^6-3t^2-2=0 \quad \text{ゆえに} \quad (t^2+1)^2(t^2-2)=0$$

したがって $t=\pm\sqrt{2}$ ③$'$ より $x=\pm2\sqrt{2}$

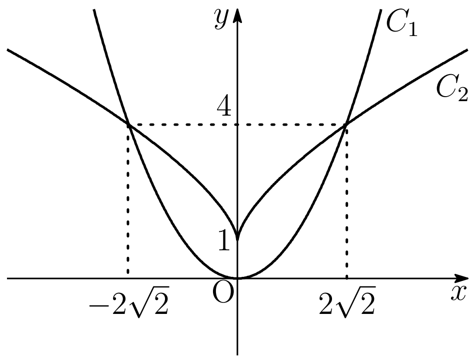
これを C_1 の方程式に代入して $y=4$

よって，C_1 と C_2 の交点の座標は $\boldsymbol{(\pm2\sqrt{2},\ 4)}$

$C_2 : y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ について　$y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$，$y'' = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

ゆえに　$y'' < 0$　したがって　C_2 は上に凸の曲線である．

したがって，C_1，C_2 の概形は，次のようになる．



補足

C_2 上の点 P(0, 1) について，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \left(-a^3,\ \frac{3}{2}a^2\right) = \frac{3}{2}a^2\left(-\frac{2}{3}a,\ 1\right)$$

$a \to 0$ とすると，C_2 の尖点 P(0, 1) における接線は，y 軸に平行な直線となる．尖点 (cusp) は，曲線上の可微分でない点であり，接線が定まらないのが一般的である ($y = |x|$ の尖点 (0, 0) など)．

(3) C_1，C_2 は y 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^{2\sqrt{2}} \left\{\left(1 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{x^2}{2}\right\} dx \\ &= 2\left[\ x + \frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{6}\ \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{88\sqrt{2}}{15}} \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (1) (背理法による証明)

$Y=-X$ と仮定すると

$AX=Y \cdots ①$ より　$AX=-X \quad \cdots ②$

$AY=Z$ より　$A(-X)=Z$　すなわち　$AX=-Z \quad \cdots ③$

②，③ より　$Z=X$

これを $AZ=X$ に代入すると　$AX=X \quad \cdots ④$

①，④ より，$X=Y$ となり，矛盾を生じる．よって　$Y \neq -X$

(2) 条件より　$A^3X=X$，$A^3Y=Y$

よって　$A^3(X\ Y)=(X\ Y) \quad \cdots ⑤$

X，Y の大きさは 1 で，$Y \neq X$，$Y \neq -X$ であるから　$Y \not\parallel X$

ゆえに　$\det(X\ Y) \neq 0 \quad \cdots ⑥$

⑤ より　$\{\det(A)\}^3 \det(X\ Y)=\det(X\ Y)$

⑥ より　$\{\det(A)\}^3=1$　ゆえに　$\det(A)=1 \quad \cdots ⑦$

条件から　$A(Y\ Z)=(Z\ X)$

ゆえに　$\det(A)\det(Y\ Z)=\det(Z\ X)$　⑦ より　$\det(Y\ Z)=\det(Z\ X)$

したがって　$\det(X\ Z)+\det(Y\ Z)=0$　すなわち　$\det(X+Y\ Z)=0$

ゆえに　$Z=k(X+Y)$　(k はスカラー)　$\cdots ⑧$

$X+Y \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから，大きさが 1 である Z に対し，⑧ を満たす k は唯一存在する．よって，題意は示された．

(3) ⑧ を $AZ=X$ に代入すると

$A(kX+kY)=X$

すなわち　$kAX+kAY=X$

$kY+kZ=X$

さらに　$kY+k(kX+kY)=X$

ゆえに　$(k^2-1)X+(k^2+k)Y=0$

$Y \not\parallel X$ であるから　$k^2-1=0$，$k^2+k=0$　これを解いて　$k=-1$

したがって　$Z=-(X+Y)$　よって　$X+Y+Z=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) 2 次の列ベクトル X，Y の内積を $X{\cdot}Y$ とかくことにする．
$X+Y=-Z$ であるから

$$(X+Y){\cdot}(X+Y)=(-Z){\cdot}(-Z) \quad \text{ゆえに} \quad X{\cdot}X+2X{\cdot}Y+Y{\cdot}Y=Z{\cdot}Z$$

$X{\cdot}X=Y{\cdot}Y=Z{\cdot}Z=1$ より　$X{\cdot}Y=-\dfrac{1}{2}$　ゆえに　X，Y のなす角は $\frac{2}{3}\pi$

同様に，$Z+X=-Y$ から $Z{\cdot}X=-\dfrac{1}{2}$　ゆえに　Z，X のなす角は $\frac{2}{3}\pi$

$X=\begin{pmatrix}\cos 0\\ \sin 0\end{pmatrix}$ であるから，次の 2 つに場合分けをする．

i) $Y=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}$ のとき　$Z=\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}$

このとき A は原点の回りに $\frac{2}{3}\pi$ 回転する 1 次変換を表す行列であるから

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

ii) $Y=\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}$ のとき　$Z=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}$

このとき A は原点の回りに $\frac{4}{3}\pi$ 回転する 1 次変換を表す行列であるから

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi & -\sin\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi & \cos\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

i)，ii) より　$\boldsymbol{A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \mp\sqrt{3}\\ \pm\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}}$

$\boxed{5}$ (1) $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}$ であるから

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dt},\ e^x\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dx}{dt}(1,\ e^x)\quad\cdots①$$

$|\vec{v}|=1$，$\dfrac{dx}{dt}>0$ に注意して，① の大きさをとると

$$1=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+e^{2x}}\quad ゆえに\quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\quad\cdots②$$

② を ① に代入して

$$\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}(1,\ e^x)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)\quad\cdots③$$

よって，点 $(s,\ e^s)$ における速度ベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}},\ \frac{e^s}{\sqrt{1+e^{2s}}}\right)}$$

(2) ③ を t について微分し，② を代入すると

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}&=\frac{dx}{dt}\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}\right)\\&=\left(-\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2},\ \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\right)\quad\cdots④\end{aligned}$$

よって，点 $(s,\ e^s)$ における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ は

$$\boldsymbol{\vec{\alpha}=\left(-\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2},\ \frac{e^s}{(1+e^{2s})^2}\right)}$$

(3) ④ より　$\vec{\alpha} = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^2}(-e^x,\ 1)$ であるから

$$|\vec{\alpha}| = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\sqrt{(-e^x)^2+1^2} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

$f(x) = |\vec{\alpha}|$ とおいて，$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}}}$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$f'(x) = 0$ を解くと　$e^{2x} = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{2}$

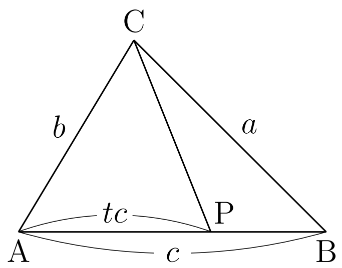
$f(x)$ の増減は右のようになる．

よって，$x = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$ $(e^{2x} = \frac{1}{2})$ で極大かつ最大となり，求める最大値は

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

2.10 2010年度

$\boxed{1}$ (1) △ABC に余弦定理を適用すると



$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

△APC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CP}^2 = b^2 + (tc)^2 - 2b{\cdot}tc\cos A$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2 &= b^2 + (tc)^2 - 2b{\cdot}tc \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= b^2 + t^2c^2 - t(b^2+c^2-a^2) \\ &= \boldsymbol{ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{CP} = a$ を (1) の結果に代入すると

$$a^2 = ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2$$

ゆえに $(t-1)(a^2-b^2+tc^2) = 0$

$t \geqq 0$ に注意して

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{b \geqq a} \textbf{ のとき} \quad \boldsymbol{t = 1,\ \frac{b^2-a^2}{c^2}} \\ &\boldsymbol{b < a} \textbf{ のとき} \quad \boldsymbol{t = 1}\end{aligned}$$

(3) AB 上にちょうど2つあるのは，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に (2) の条件を満たす t が2個あればよい．したがって，(2) の結果から

$b \geqq a$ のとき ($B \geqq A$)

$$\frac{b^2-a^2}{c^2} < 1 \quad \text{すなわち} \quad b^2 < c^2 + a^2 \quad \text{ゆえに} \quad B < 90^\circ$$

よって $\boldsymbol{A \leqq B < 90^\circ}$

2 (1) サイコロを 2 回振るときの得点は，右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得　点

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{21}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

$$\begin{aligned} E =& 0\times\frac{21}{36}+2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36} \\ &+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36} \\ =&\boldsymbol{\frac{35}{18}} \end{aligned}$$

(2) (1) の場合において，最初の目が 6 であるとき，2 回目の目に関係なく 6 点であると考えればよいので，得点は右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得　点

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	6	6	6	6	6	6

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{15}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

$$E = 0\times\frac{21}{36}+2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{11}{36}=\boldsymbol{\frac{53}{18}}$$

(3) サイコロを投げて 1 回目，2 回目に出た目をそれぞれ i，j とする．1 回目 (最初) の目が n 以上であるとき ($1 \leqq n \leqq 6$)，2 回目を振らないとすると，そのときの得点の期待値 $E(n)$ は

$$E(n) = \frac{1}{6}\sum_{i=n}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1 \leqq i < n \\ i+j \leqq 6}} (i+j)$$

また，$E(n+1)$ は ($1 \leqq n \leqq 5$)

$$E(n+1) = \frac{1}{6}\sum_{i=n+1}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1 \leqq i < n+1 \\ i+j \leqq 6}} (i+j)$$

上の 2 式から，$1 \leqq n \leqq 5$ のとき

$$\begin{aligned} E(n+1) - E(n) &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{n+j \leqq 6} (n+j) \\ &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{k=n+1}^{6} k \\ &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36} \times \frac{1}{2}(6-n)(n+7) \\ &= \frac{1}{72}(-n^2 - 13n + 42) \\ &= \frac{1}{72}\{42 - n(n+13)\} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &E(2) - E(1) > 0, \quad E(3) - E(2) > 0, \quad E(4) - E(3) < 0, \\ &E(5) - E(4) < 0, \quad E(6) - E(5) < 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$E(1) < E(2) < E(3) > E(4) > E(5) > E(6)$$

したがって，得点の期待値を最大にするためには，最初に 3 以上の目が出たときに 2 回目を振らなければよい．

よって，**2 回目を振るのは，最初の目が 1 または 2 のときである．**

3 (1) $y=\dfrac{1}{x^2}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{2}{x^3}$

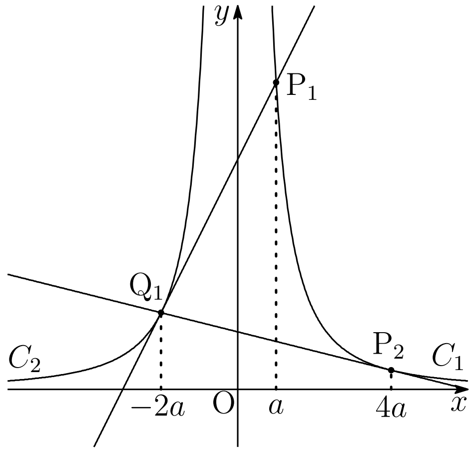
点 Q_1 の座標を $\left(b,\ \dfrac{1}{b^2}\right)$ とすると，

点 Q_1 における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{b^2}=-\frac{2}{b^3}(x-b)$$

すなわち　$y=-\dfrac{2x}{b^3}+\dfrac{3}{b^2}$

この直線が点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ を通るから



$$\frac{1}{a^2}=-\frac{2a}{b^3}+\frac{3}{b^2}\quad \text{ゆえに}\quad (b-a)^2(b+2a)=0$$

$b\neq a$ であるから　$b=-2a$　よって，点 Q_1 の座標は　$\boldsymbol{\left(-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}\right)}$

(2) (1) の計算結果から Q_1 の x 座標 b に対し，P_2 の x 座標は $-2b$ であるから，P_2 の x 座標は $4a$ となる．

したがって　$\mathrm{P}_2\left(4a,\ \dfrac{1}{16a^2}\right)$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1}=\left(a,\frac{1}{a^2}\right)-\left(-2a,\ \frac{1}{4a^2}\right)=\left(3a,\frac{3}{4a^2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2}=\left(4a,\frac{1}{16a^2}\right)-\left(-2a,\ \frac{1}{4a^2}\right)=\left(6a,-\frac{3}{16a^2}\right)$$

よって，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 は，$a>0$ に注意して

$$S_1=\frac{1}{2}\left|3a\times\left(-\frac{3}{16a^2}\right)-6a\times\frac{3}{4a^2}\right|=\boldsymbol{\frac{81}{32a}}$$

(3) P_n の x 座標を a_n とすると $(n=1,2,3,\cdots)$，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積 S_n は

$$S_n=\frac{81}{32a_n}$$

$\{a_n\}$ は，初項が a，公比 4 の等比数列であるから　$a_n=4^{n-1}a$

よって　$S_n=\dfrac{81}{32\cdot4^{n-1}a}=\boldsymbol{\dfrac{81}{32a}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，初項 $\dfrac{1}{32a}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\dfrac{81}{32a}}{1-\dfrac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{27}{8a}}$$

4 (1) 円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，円が角 t だけ回転したとき，円の中心を C，x 軸との接点を T とする．このとき，$\mathrm{OT} = \overset{\frown}{\mathrm{TP}} = at$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix}$$

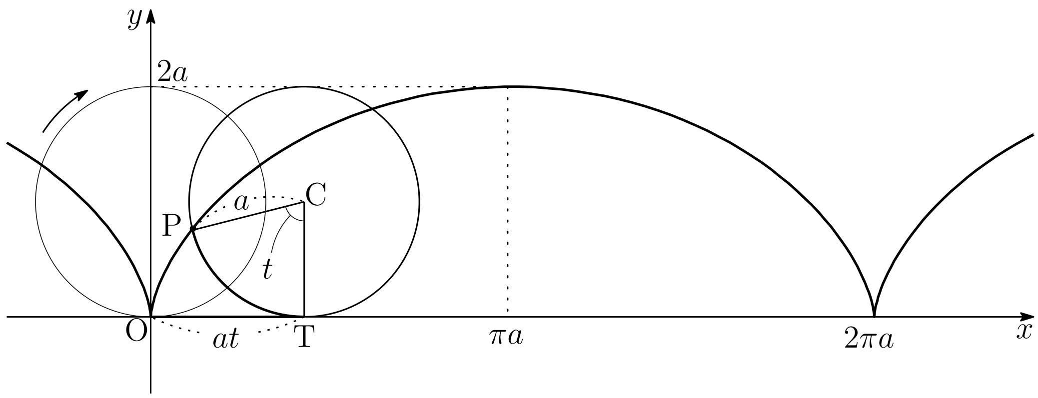
また $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{CT}}$ を $-t$ だけ回転したものであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{CT}} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

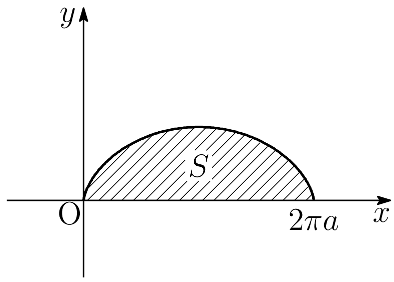
したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} \\ &= \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t-\sin t) \\ a(1-\cos t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，P の座標は　　$\boldsymbol{(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))}$



(2) 求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

また，$x = a(t - \sin t)$ より

$$dx = a(1 - \cos t)dt \qquad \leftarrow \frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$$

で，x と t の対応は右のようになる．
よって，置換積分法により

x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
t	$0 \longrightarrow 2\pi$

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt \\
&= a^2\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt \\
&= a^2\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt \\
&= a^2\left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\
&= \boldsymbol{3\pi a^2}
\end{aligned}$$

(3) 求める曲線 C の長さを L とすると，$\dfrac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt} = a\sin t$ より

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\{a(1-\cos t)\}^2 + (a\sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt \\
&= 2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{8a}
\end{aligned}$$

5 (1) 放物線 $9X=2Y^2$ に

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

を代入すると

$$2c^2x^2+4cdxy+2d^2y^2-9ax-9by=0$$

これに $y=x^2$ を代入して整理すると

$$2d^2x^4+4cdx^3+(2c^2-9b)x^2-9ax=0$$

上式は x に関する恒等式であるから

$$2d^2=0,\quad 4cd=0,\quad 2c^2-9b=0,\quad -9a=0$$

したがって　$a=0,\quad b=\dfrac{2}{9}c^2,\quad d=0$

ここで A による $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ の像 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{2}{9}c^2x^2,\ cx\right)$ が $9X=2Y^2$ 全体を動くので，$c\neq 0$

よって　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}} \\ \boldsymbol{c} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$　$(\boldsymbol{c}\neq \mathbf{0})$

(2) 円 $X^2+(Y-1)^2=1$ から　$X^2+Y^2-2Y=0$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

を代入すると

$$(a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)xy+(b^2+d^2)y^2-2cx-2dy=0$$

これに $y=x^2$ を代入して整理すると

$$(b^2+d^2)x^4+2(ab+cd)x^3+(a^2+c^2-2d)x^2-2cx=0$$

上式は x に関する恒等式であるから

$$b^2+d^2=0,\ 2(ab+cd)=0,\ a^2+c^2-2d=0,\ -2c=0$$

したがって　$a=0,\quad b=0,\quad c=0,\quad d=0$

よって　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(3) $y=x^2$ 上の点 $(0,\ 0)$ の像は $(0,\ 0)$ であるから，L は原点を通る．
$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(-1,\ 1)$ について，$\mathrm{P}_1(\vec{p_1})$，$\mathrm{P}_2(\vec{p_2})$ とし，これらの像をそれぞれ $\mathrm{Q}_1(\vec{q_1})$，$\mathrm{Q}_2(\vec{q_2})$ とすると

$$A\begin{pmatrix}\vec{p_1} & \vec{p_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{q_1} & \vec{q_2}\end{pmatrix}$$

これから　$\det(A)\det\begin{pmatrix}\vec{p_1} & \vec{p_2}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\vec{q_1} & \vec{q_2}\end{pmatrix}\quad\cdots①$

L は原点を通る直線であるから　$\det\begin{pmatrix}\vec{q_1} & \vec{q_2}\end{pmatrix}=0$

また，$\det\begin{pmatrix}\vec{p_1} & \vec{p_2}\end{pmatrix}=2\neq 0$ であるから，① より

$$\det(A)=0\quad\cdots②$$

実際，$\vec{p_1}$，$\vec{p_2}$ は 1 次独立であるから，A により座標平面上のすべての点が L に移る．A の固有方程式は $\lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A)=0$ であるから，② より，その解は 0，$a+d$ であり，固有値 $a+d$ に対する固有ベクトルが，L の方向ベクトルである．したがって，L 上の点 $(x,\ y)$ について

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(a+d)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

すなわち　$\begin{pmatrix}-d & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\quad\cdots③$

ここで，$P(t,\ t^2)$ の A による像

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at+bt^2\\ ct+dt^2\end{pmatrix}$$

が L<u>全体</u> を動くための条件は　$\boldsymbol{b=d=0,\ \begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}}$

よって，求める直線 L の方程式は，③ より

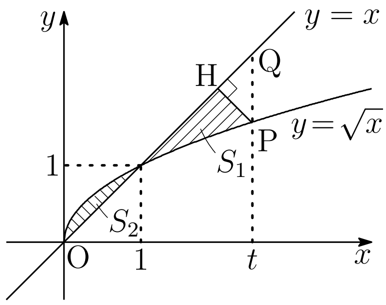
$$\boldsymbol{cx-ay=0}$$

解説

① は，$\det(AB)=\det(A)\det(B)$ を利用した．また，$\det(AB)=\det(BA)$ も成り立つことも覚えておきたい．つまり行列の積について交換法則は成り立たないが，行列式については交換法則が成り立つ．
一般に，$\det(A)=0$ ならば，A により平面上のすべて点は定直線上に移る．
③ より $\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}$ は L の方向ベクトルである．

2.11　2011年度

1 (1) 直線 PH は，点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ を通り，直線 $y=x\cdots$ ① に垂直な直線であるから



$$y-\sqrt{t}=-1(x-t)$$

すなわち　$y=-x+t+\sqrt{t}\quad\cdots$ ②

H の座標は ①，② を解いて

$$\boldsymbol{\left(\frac{t+\sqrt{t}}{2},\ \frac{t+\sqrt{t}}{2}\right)}$$

(2) $\mathrm{Q}(t,\ t)$ をとると

$$\triangle\mathrm{PQH}=\frac{1}{2}\mathrm{PH}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}(t^2-2t\sqrt{t}+t)$$

よって，求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1&=\int_1^t(x-\sqrt{x})\,dx-\triangle\mathrm{PQH}\\&=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^t-\frac{1}{4}(t^2-2t\sqrt{t}+t)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{6}t\sqrt{t}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

(3) $$S_2=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

$S_1=S_2$ のとき，上式および (2) の結果より

$$\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{6}t\sqrt{t}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\quad \text{ゆえに}\quad t\{3(\sqrt{t}\,)^2-2\sqrt{t}-3\}=0$$

$t>1$ に注意して　$\sqrt{t}=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

よって　$t=\left(\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{11+2\sqrt{10}}{9}}$

2 (1) $f(x) = (x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ を微分すると　$f'(x) = -(x+a)(x-a)e^{-x}$
$a > 0$ より，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 $-2(a-1)e^a$	$\nearrow$	極大 $2(a+1)e^{-a}$	$\searrow$

よって，**極大値 $\boldsymbol{2(a+1)e^{-a}}$，極小値 $\boldsymbol{-2(a-1)e^a}$** をとる．

(2) $g(x) = x^3e^{-x}$ とおいて，これを微分すると　$g'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$
$x > 3$ において，$g'(x) < 0$ であるから，$x \geqq 3$ において $g(x)$ は単調減少．
したがって，$x \geqq 3$ のとき，$g(x) \leqq g(3)$ であるから

$$x \geqq 3 \text{ のとき}\quad x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$$

が成り立つ．このとき　$0 < x^2e^{-x} \leqq \dfrac{27e^{-3}}{x}$
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{27e^{-3}}{x} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0}$$

(3) $y = x^2+2x+2$ のグラフと $y = ke^x + a^2$ の共有点の個数は，方程式

$$x^2+2x+2 = ke^2+a^2 \quad \text{すなわち} \quad (x^2+2x+2-a^2)e^{-x} = k$$

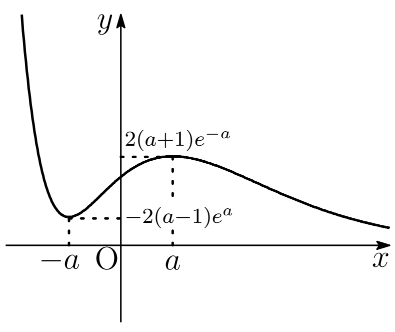
の解の個数であり，これは，$y = f(x)$ のグラフと $y = k$ のグラフの共有点の個数である．ここで，(2) の結果により

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2-a^2}{x^2}\right)x^2e^{-x} = 0$$

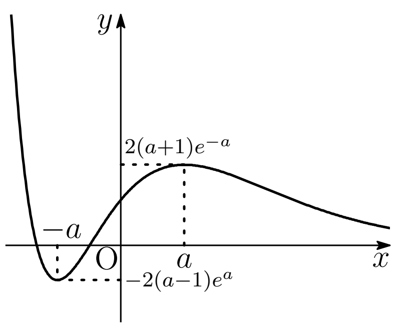
よって，上式および (1)，(2) の結果より，求める k の値の範囲は

i) **$\boldsymbol{0 < a \leqq 1}$ のとき　$\boldsymbol{-2(a-1)e^a < k < 2(a+1)e^{-a}}$**
ii) **$\boldsymbol{1 < a}$ のとき　$\boldsymbol{0 < k < 2(a+1)e^{-a}}$**

i) $0 < a \leqq 1$ のとき



ii) $1 < a$ のとき



3　(1) 与えられた漸化式より

$$a_2 = \frac{2a_1}{1-{a_1}^2} = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{1-{a_2}^2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = -\sqrt{3}$$

$$a_4 = \frac{2a_3}{1-{a_3}^2} = \frac{2\cdot(-\sqrt{3})}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$$

したがって，a_2 以降は，交互に $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ の繰り返しであるから

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad a_n = (-1)^n\sqrt{3}\quad (n \geqq 2)}$$

(2)　$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \boldsymbol{2-\sqrt{3}}$$

(3) $a_n = \tan\theta_n$ とおくと　$a_{n+1} = \dfrac{2\tan\theta_n}{1-\tan^2\theta_n} = \tan 2\theta_n$

$a_1 = \tan\dfrac{\pi}{20}$ より

$$a_2 = \tan\frac{\pi}{10},\ a_3 = \tan\frac{\pi}{5},\ a_4 = \tan\frac{2}{5}\pi,\ a_5 = \tan\frac{4}{5}\pi,$$

$$a_6 = \tan\frac{8}{5}\pi = \tan\frac{3}{5}\pi,\ a_7 = \tan\frac{6}{5}\pi = \tan\frac{\pi}{5}$$

ゆえに，a_3 以降は，$\tan\dfrac{\pi}{5}$，$\tan\dfrac{2}{5}\pi$，$\tan\dfrac{4}{5}\pi$，$\tan\dfrac{3}{5}\pi$ の繰り返しである．

よって，$a_{n+k} = a_n$ $(n = 3, 4, 5\cdots)$ をみたす最小の自然数 k は　**4**

4 (1) O(0, 0, 0) を通ることに注意して，球面の方程式を

$$x^2+y^2+z^2+lx+my+nz=0$$

とおくと

点 A(0, 2, 3) を通るから　$2m+3n+13=0$
点 B(1, 0, 3) を通るから　$l+3n+10=0$
点 C(1, 2, 0) を通るから　$l+2m+5=0$

これを解いて　$l=-1,\ m=-2,\ n=-3$
したがって，球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$$

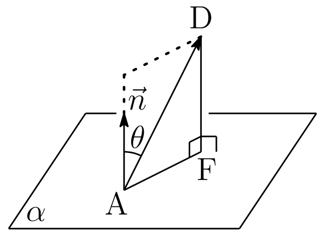
すなわち　$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$$

よって，求める球面の中心 D の座標は　$\left(\boldsymbol{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}}\right)$

(2) 3点 A，B，C を通る平面を α とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,-2,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,-3),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトル，すなわち，
α の法線ベクトルの1つを



$$\vec{n}=(6,\ 3,\ 2)$$

とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\mathrm{DF}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\cos\theta|,\quad \cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\vec{n}|}$$

上の2式から　$$\mathrm{DF}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|\frac{1}{2}\cdot6+(-1)\cdot3+(-\frac{3}{2})\cdot2|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\boldsymbol{\frac{3}{7}}$$

(3) $$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2(\sqrt{10})^2-1^2}=\frac{7}{2}$$

よって，求める体積は　$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DF}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 1 回の操作による球の取り出し方の総数は　${}_4C_2 = 6$ (通り)

$n = 2$ のとき，カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶのは，2 回とも同じ球の組合せであるから，求める確率は

$$\frac{6 \times 1}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2) $n = 2$ のとき，カードが左から順に 4，3，2，1 と並ぶのは，1 回目に $\{1, 4\}$，2 回目 $\{2, 3\}$ の球を取り出す場合と 1 回目に $\{2, 3\}$，2 回目に $\{1, 4\}$ を取り出す場合の 2 通りであるから，求める確率は

$$\frac{2}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

(3) $n = 2$ のとき，左端のカードの数字が 1 になるのは，次の i)，ii) の場合．

i) 1，2 回目ともに $\{1,\ k\}$ $(k = 2, 3, 4)$ を取り出す確率は

$$\frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

ii) 1，2 回目ともに 1 以外の球を取り出す確率は

$$\frac{({}_3C_2)^2}{6^2} = \frac{1}{4}$$

i) と ii) は互いに排反であるから，求める確率は　$\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(4) 3 回目に左端が X となる確率を $P(X)$ とする．

i) 2 回目に左端が 1 で，3 回目に左端が 1 となる確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{{}_3C_2}{6} = \frac{1}{6}$$

ii) 2 回目に左端が 1 以外で，3 回目に左端が 1 となる確率は

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

i)，ii) は互いに排反であるから　$P(1) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{18}$

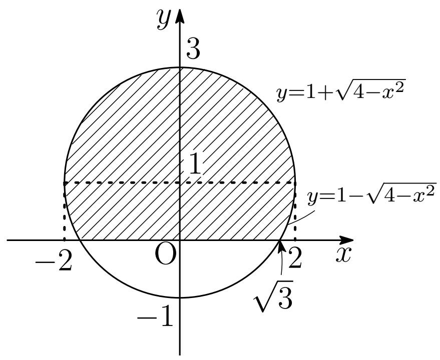
3 回目に左端に 2，3，4 のカードが並ぶ確率は等しいから

$$P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1 - P(1)}{3} = \frac{13}{54}$$

よって，求める期待値は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4} kP(k) = 1 \cdot \frac{5}{18} + (2 + 3 + 4) \cdot \frac{13}{54} = \mathbf{\frac{22}{9}}$

2.12 2012 年度

$\boxed{1}$ 立体は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体である．円の方程式 $x^2+(y-1)^2=4$ を y について解くと



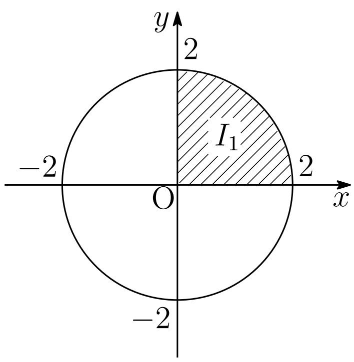
$$y=1\pm\sqrt{4-x^2}$$

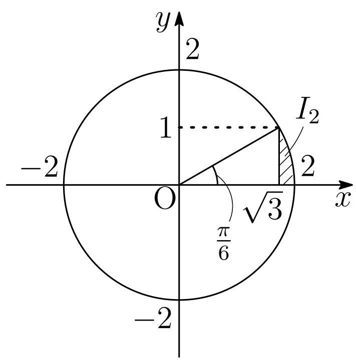
斜線部分は，y 軸に関して対称であるから，求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V &= 2\left\{\pi\int_0^2(1+\sqrt{4-x^2})^2dx-\pi\int_{\sqrt{3}}^2(1-\sqrt{4-x^2})^2dx\right\}\\
&= 2\pi\left\{\int_0^2(5-x^2+2\sqrt{4-x^2})dx-\int_{\sqrt{3}}^2(5-x^2-2\sqrt{4-x^2})dx\right\}\\
&= 2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx+2\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}dx\right\}
\end{aligned}$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$，$I_2=\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}dx$ とおくと，これらはそれぞれ下の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2=\pi\\
I_2 &= \frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot1\\
&= \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

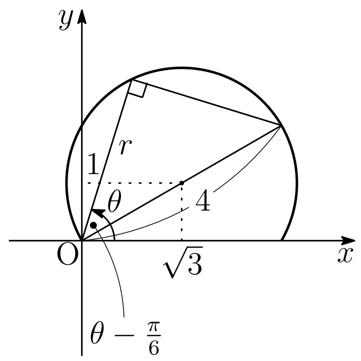




よって

$$V=2\pi\left\{\left[5x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+2\cdot\pi+2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{16}{3}\pi^2+6\sqrt{3}\pi}$$

別解 円 $x^2+(y-1)^2=4$ を x 軸方向に $\sqrt{3}$ だけ平行移動した円



$$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$$

の x 軸の上側の部分を極方程式で表すと

$$r=4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$$

求める立体の体積を V とすると

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}r^3\sin\theta\,d\theta=\frac{16}{3}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta\quad\cdots(*)$$

であるから (九大理系 2003 年 $\boxed{\mathbf{1}}$ を参照)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^4\,d\theta&=16\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)d\theta=16\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin^4 t\,dt\\&=\Big[\,6t-6\sin t\cos t-4\sin^3 t\cos t\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\\&=4\pi+\frac{9}{4}\sqrt{3}\quad\cdots①\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3(-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta&=\Big[\,\frac{1}{4}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^4\,\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}\\&=-\frac{9}{4}\quad\cdots②\end{aligned}$$

① − ② × $\sqrt{3}$ により　$$4\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta=4\pi+\frac{9}{2}\sqrt{3}$$

したがって　$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta=\pi+\frac{9}{8}\sqrt{3}$$

上式を $(*)$ に代入すると

$$V=\frac{16}{3}\pi\left(\pi+\frac{9}{8}\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{16}{3}\pi^2+6\sqrt{3}\pi}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $9A\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}+5A\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}$ より

$$A\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\-64\end{pmatrix}\quad \text{ゆえに}\quad A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}$$

また　$7A\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}$ より

$$A\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\-40\end{pmatrix}\quad \text{ゆえに}\quad A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$$

したがって　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}&\mathbf{3}\\\mathbf{-8}&\mathbf{-5}\end{pmatrix}$

$-11B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}=-11\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$ より

$$B\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48\\-56\end{pmatrix}\quad \text{ゆえに}\quad B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}$$

また　$B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$ より　$B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$

したがって　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{6}&\mathbf{5}\\\mathbf{-7}&\mathbf{-6}\end{pmatrix}$

よって　$A^2=\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$

$$B^2=\begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

別解

$A\begin{pmatrix}-3&7\\5&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}$，$B\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-7\\6&10\end{pmatrix}$ より

$$A=\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&7\\5&-9\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-5&-7\\6&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&8\\-1&-11\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix}$$

(2) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix}$

$X = AB$ とおいて，ハミルトン・ケーリーの定理に適用すると

$$X^2 + X + E = O$$

したがって　$(X - E)(X^2 + X + E) = O$　ゆえに　$X^3 = E$

よって　　　$\boldsymbol{(AB)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(3) $BA = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$

$AB + BA = -E$ であるから，$BA = -AB - E$ と (1) の結果により

$$\begin{aligned}
ABA &= A(BA) = A(-AB - E) = -A^2B - A = -A - B, \\
BAB &= (BA)B = (-AB - E)B = -AB^2 - B = -A - B, \\
ABAB &= (ABA)B = (-A - B)B = -AB - B^2 = -AB - E, \\
BABA &= (BAB)A = (-A - B)A \\
&= -A^2 - BA = -E - (-AB - E) = AB, \\
ABABA &= (ABAB)A = (-AB - E)A \\
&= -ABA - A = -(-A - B) - A = B, \\
BABAB &= (BABA)B = (AB)B = AB^2 = A, \\
ABABAB &= (ABABA)B = BB = E, \\
BABABA &= (BABAB)A = (BABAB)A = AA = E \\
&\vdots
\end{aligned}$$

したがって，上の行列は循環して高々次の 6 個の行列からなる．

$$A,\quad B,\quad AB,\quad -AB - E,\quad -A - B,\quad E$$

これらの行列は，それぞれ

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix},}$$
$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 & -8 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

であり，この 6 個が求める行列である．

別解

(3) は (2) の結果 $(AB)^3 = E$ に左から順次 A，B を交互にかけると，$A^2 = E$，$B^2 = E$ に注意して

$$\begin{aligned} ABABAB &= E, \\ BABAB &= A, \\ ABAB &= BA, \\ BAB &= ABA, \\ AB &= BABA, \\ B &= ABABA, \\ E &= BABABA \end{aligned}$$

したがって，行列

$$A, \quad AB, \quad ABA, \quad ABAB, \quad \cdots\cdots,$$

および行列

$$B, \quad BA, \quad BAB, \quad BABA, \quad \cdots\cdots$$

は，循環して高々次の 6 個の行列からなる．

$$E, \quad A, \quad BA, \quad ABA, \quad AB, \quad B$$

これらの行列は，それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -11 & -8 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$$

であり，この 6 個が求める行列である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)\quad\cdots(*)$

$a=0$ の場合，方程式 $(*)$ は実数解 $x=-1$ をもつ．

$a\neq 0$ の場合，方程式 $(*)$ が実数解をもつとき，関数

$$y=x^2+|x+1|+n-1\cdots ①$$

のグラフと直線 $y=\dfrac{\sqrt{n}}{a}(x+1)$ が共有点をもつ．

関数 ① は

$$x\geqq -1 \text{ のとき}\quad y=x^2+x+n=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+n-\frac{1}{4}$$

$$x<-1 \text{ のとき}\quad y=x^2-x+n-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+n-\frac{9}{4}$$

$k=\dfrac{\sqrt{n}}{a}$ とし，$y=k(x+1)\cdots ②$ とおく．

① のグラフと直線 ② が接するときの k の値は

i) $x\geqq -1$ のとき，2 式から y を消去して

$$x^2+x+n=k(x+1)\quad \text{ゆえに}\quad x^2+(1-k)x+n-k=0$$

このとき，係数について

$$-\frac{1-k}{2\cdot 1}\geqq -1,\quad (1-k)^2-4\cdot(n-k)=0$$

これを解いて　$k=2\sqrt{n}-1$

ii) $x<-1$ のとき，2 式から y を消去して

$$x^2-x+n-2=k(x+1)\quad \text{ゆえに}\quad x^2-(k+1)x+n-k-2=0$$

このとき，係数について

$$-\frac{-(k+1)}{2\cdot 1}<-1,\quad \{-(k+1)\}^2-4\cdot 1(n-k-2)=0$$

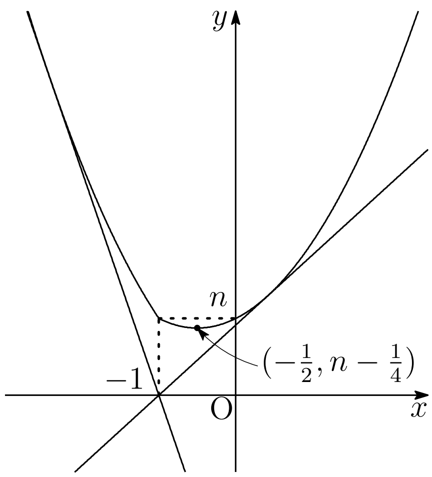
これを解いて　$k=-2\sqrt{n}-3$

関数 ① のグラフと直線 ② は，

$$k = -2\sqrt{n} - 3,\ 2\sqrt{n} - 1$$

のとき，右の図のように接する．
したがって，これらが共有点をもつための k の値の範囲は

$$k \leqq -2\sqrt{n} - 3,\quad 2\sqrt{n} - 1 \leqq k$$



ゆえに，方程式 $(*)$ が実数解をもつとき

$$\frac{\sqrt{n}}{a} \leqq -2\sqrt{n} - 3,\quad 2\sqrt{n} - 1 \leqq \frac{\sqrt{n}}{a}$$

したがって　$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq a < 0,\quad 0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$

$a = 0$ のとき，方程式 $(*)$ は実数解をもつので，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}}$$

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n = -\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3},\quad c_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$$

とおくと

$$b_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2(2\sqrt{n}+3)},\quad c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\sqrt{n}-1)}$$

したがって，$\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ はともに単調減少である．このとき，すべての自然数に対して (1) の結果を満たす a の値の範囲は

$$b_1 \leqq a \leqq \lim_{n\to\infty} c_n \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{5} \leqq a \leqq \frac{1}{2}}$$

$\boxed{4}$ (1) 2 次方程式 $x^2+px+q=0\cdots(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-p, \quad \alpha\beta=q$$

ここで
$$\begin{aligned} a_n &= (\alpha^n-1)(\beta^n-1)=(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1 \\ &= q^n+1-(\alpha^n+\beta^n) \end{aligned}$$

q は整数であるから，$\alpha^n+\beta^n$ が整数のとき，a_n は整数である．

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= -p, \\ \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-p)^2-2q=p^2-2q, \\ \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-p)^3-3q\cdot(-p)=-p^3+3pq \end{aligned}$$

p，q は整数であるから，上の 3 式は整数である．

よって，a_1，a_2，a_3 は整数である．

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ より，次の 2 つに場合分けをする．

i) $|\alpha|-1>0$，$|\beta|-1>0$ すなわち $|\alpha|>1$，$|\beta|>1$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha^n}\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^n}\right)}\right| = |\alpha\beta|=|q| \end{aligned}$$

ii) $|\alpha|-1<0$，$|\beta|-1<0$ すなわち $|\alpha|<1$，$|\beta|<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right| = 1$$

i)，ii) より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数である．

(3) 条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1) \neq 0$ および (2) の結果から，$(|\alpha|-1)(|\beta|-1) < 0$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるための必要条件である．このとき，α と β の互換性により，一般性を失うことなく

$$|\alpha|-1>0,\quad |\beta|-1<0 \quad \text{すなわち} \quad |\alpha|>1,\quad |\beta|<1 \qquad \cdots(**)$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha^n}\right)(\beta^{n+1}-1)}{\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)(\beta^n-1)}\right| = |\alpha|\end{aligned}$$

$|\alpha|>1$ に注意して　$|\alpha| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

i) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，α は方程式 $(*)$ の解であるから

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + q = 0$$

整理すると　$(p+2q+3)+(p+1)\sqrt{5} = 0$

$p+2q+3$，$p+1$ は有理数であるから

$$p+2q+3=0,\quad p+1=0 \quad \text{すなわち} \quad p=-1,\quad q=-1$$

このとき方程式 $(*)$ の解は，$(**)$ に注意して　$x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

ii) $\alpha = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，α は方程式 $(*)$ の解であるから

$$\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + p\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + q = 0$$

整理すると　$(-p+2q+3)+(-p+1)\sqrt{5} = 0$

$-p+2q+3$，$-p+1$ は有理数であるから

$$-p+2q+3=0,\quad -p+1=0 \quad \text{すなわち} \quad p=1,\quad q=-1$$

このとき方程式 $(*)$ の解は，$(**)$ に注意して　$x = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

i)，ii) より　$\boldsymbol{(p,\ q) = (\pm 1, -1)}$

$\boxed{5}$ (1) 箱Aから2個の玉を取り出して箱Bに入れると，箱Bには黒玉2個と白玉2個が入っている．

箱Aに黒玉が1個入っている(箱Bから白玉2個を取り出す)確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

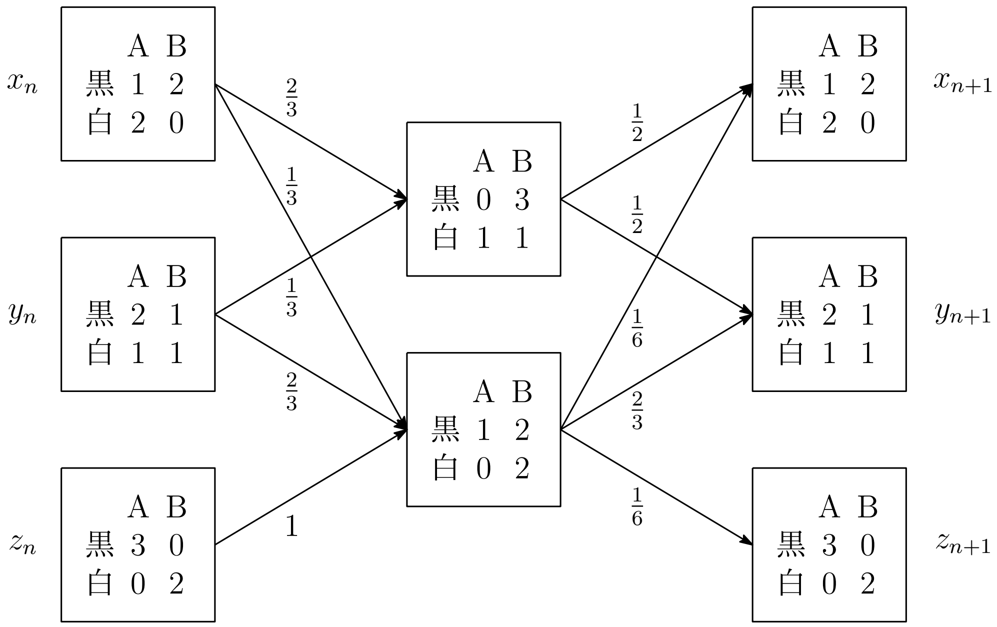
箱Aに黒玉が2個入っている(箱Bから黒玉1個と白玉1個を取り出す)確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

箱Aに黒玉が3個入っている(箱Bから黒玉2個を取り出す)確率 p_3 は

$$p_3 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) 試行Tを n 回行ったとき，箱Aに黒玉が1個，2個，3個ある確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n とすると



$$x_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}\right) x_n + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right) y_n + 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) x_n + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) y_n + 1 \times \frac{2}{3} z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} x_n + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} y_n + 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$x_1 = p_1$，$y_1 = p_2$，$z_1 = p_3$ であるから

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} & \frac{11}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} & \frac{11}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} & \frac{11}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{11}{18} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$q_1 = x_2$，$q_2 = z_2$，$q_3 = z_2$ であるから

$$\boldsymbol{q_1 = \frac{5}{18}, \quad q_2 = \frac{11}{18}, \quad q_3 = \frac{1}{9}}$$

(3) (2) の結果より

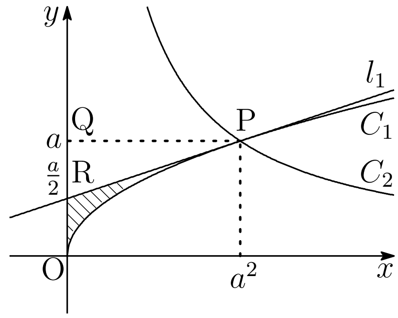
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} & \frac{11}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{11}{18} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

求める確率は，z_3 であるから

$$z_3 = \frac{1}{18} \times \frac{5}{18} + \frac{1}{9} \times \frac{11}{18} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \boldsymbol{\frac{11}{108}}$$

2.13　2013 年度

1　(1) C_1 と C_2 の交点 P の x 座標は



$$\sqrt{x}=\frac{a^3}{x}\quad これを解いて\quad x=a^2$$

ゆえに，点 P の座標は　$(a^2,\ a)$

$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より，l_1 の方程式は

$$y-a=\frac{1}{2a}(x-a^2)\quad すなわち\quad y=\frac{x}{2a}+\frac{a}{2}$$

求める斜線部分の面積は，$C_1 : x=y^2\ (y \geqq 0)$ であることを用いて

$$\int_0^a x\,dy-\triangle\mathrm{PQR}=\int_0^a y^2\,dy-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a^2=\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^a-\frac{a^3}{4}=\boldsymbol{\frac{a^3}{12}}$$

(2) C_2 の P における接線を l_2 とする．$\left(\dfrac{a^3}{x}\right)'=-\dfrac{a^3}{x^2}$ より，l_2 の傾きは　$-\dfrac{1}{a}$

$a>1$ より，$-1<-\dfrac{1}{a}<0<\dfrac{1}{2a}<1$ であるから，l_1，l_2 の傾きについて

$$\tan\alpha=\frac{1}{2a},\quad \tan\beta=-\frac{1}{a}\quad \left(-\frac{\pi}{4}<\beta<0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$$

$0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\theta(a)=\alpha-\beta$

$$\tan\theta(a)=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2a}-\left(-\frac{1}{a}\right)}{1+\frac{1}{2a}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)}=\frac{\frac{3}{2a}}{1-\frac{1}{2a^2}}$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\tan\theta(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{3}{2a}}{1-\frac{1}{2a^2}}=0$　すなわち　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\theta(a)=0$

したがって，上の諸式により

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}a\sin\theta(a)&=\lim_{a\to\infty}a\tan\theta(a)\cos\theta(a)\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2a^2}}\cos\theta(a)=\frac{3}{2}\cos 0=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

2 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{e}\perp\vec{a}$，$\vec{e}\perp\vec{c}$，$|\vec{e}|=1$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{e}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{c}+z\vec{e}\qquad (x,\ y,\ z \text{ は実数})$$

とおくと，条件により　$x=\dfrac{1}{4}$，$y=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}$

したがって，M，N の条件により

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}z\vec{e}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)=\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}z\vec{e}$$

α，β，γ を実数とし，$\alpha\vec{a}+\beta\vec{c}+\gamma\vec{e}$ が，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ に垂直であるとき

$$\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{2}{3}z\gamma=0,\quad \frac{1}{8}\alpha+\frac{3}{4}\beta+\frac{1}{2}z\gamma=0$$

したがって　$\alpha:\beta:\gamma=2z:z:-2$

ゆえに，直線 PQ の方向ベクトルを $\vec{v}=2z\vec{a}+z\vec{c}-2\vec{e}$ とすると，直線 PQ は，媒介変数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\vec{v}&=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}+t(2z\vec{a}+z\vec{c}-2\vec{e})\\&=\left(\frac{1}{4}+2zt\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}+zt\right)\vec{c}+(z-2t)\vec{e}\end{aligned}$$

Q は BC 上の点であるから，上式より

$$\frac{1}{2}+zt=1,\quad z-2t=0\quad \text{すなわち}\quad z=\pm1,\ t=\pm\frac{1}{2}\quad (\text{複号同順})$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{5}{4}\vec{a}+\vec{c}$，　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\dfrac{5}{4}\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}$

よって　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\dfrac{1}{4}:\dfrac{5}{4}=\mathbf{1:5}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+z\vec{e}\right)$，$z=\pm1$ より

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+1}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{4}}$$

3 (1) 1 回目，2 回目に出た目を，それぞれ i，j とすると，$|i-j|$ 枚の硬貨は 1 回だけ反転し，それ以外の硬貨は反転しないか，2 回反転する．
したがって，この操作による表の枚数は $6-|i-j|$ である．
ゆえに表が 1 枚となるとき

$$6-|i-j|=1 \quad \text{すなわち} \quad |i-j|=5$$

これをみたすのは，$(i,\ j)=(1,\ 6),\ (6,\ 1)$ の 2 組である．
よって，求める確率は　$\dfrac{2}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$

(2) L および R において出た目を，それぞれ i，j とし，これらの操作による表の枚数を $LR(i,\ j)$ とする．

i) $2 \leqq i+j \leqq 6$ のとき，$(i+j)$ 枚の硬貨は 1 回だけ反転し，残りの硬貨は反転しないから　$LR(i,\ j)=6-(i+j)$

ii) $7 \leqq i+j \leqq 12$ のとき，$(i+j-6)$ 枚の硬貨は 2 回反転し，残りの硬貨は 1 回だけ反転するから　$LR(i,\ j)=i+j-6$

i),ii) より，$LR(i,\ j)=|i+j-6|$ となり，求める期待値は

$$\frac{1}{6^2}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6} LR(i,\ j)=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|i+j-6|=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|j-(7-i)+1|$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|j-i+1|$$

$$=\frac{1}{36}\left(\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}|j-i+1|+\sum_{1\leqq j<i\leqq 6}|j-i+1|+\sum_{1\leqq i=j\leqq 6}|j-i+1|\right)$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i+1)+\sum_{1\leqq j<i\leqq 6}(i-j-1)+6\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i+1)+\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i-1)+6\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(2j-2i)+6\right\}=\frac{1}{36}\sum_{j=2}^{6}\sum_{i=1}^{j-1}(2j-2i)+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{j=2}^{6}\{2j(j-1)-j(j-1)\}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{j=1}^{6}(j^2-j)+\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\left(\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\right)+\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{19}{9}}$$

別解 $LR(i,\ j)=|i+j-6|$ の値は，右の表のようになる．したがって，求める期待値は

$$\frac{1{\cdot}10+2{\cdot}8+3{\cdot}6+4{\cdot}4+5{\cdot}2+6}{6^2}$$
$$=\frac{76}{36}=\boldsymbol{\frac{19}{9}}$$

j \ i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	4	3	2	1	0	1
2	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
4	1	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5	6

(3) この操作により，すべての硬貨が表となるのは，L，R の操作が終わった時点で，次の (a)〜(f) の場合である．

(a) 裏表表表表表　(b) 裏裏表表表表　(c) 裏裏裏表表表
(d) 裏裏裏裏表表　(e) 裏裏裏裏裏表　(f) 裏裏裏裏裏裏

最初の L，R の操作で出た目をそれぞれ i，j とする．
(a)〜(e) となる $(i,\ j)$ の組は，順次，

$$(6,\ 5),\ (6,\ 4),\ (6,\ 3),\ (6,\ 2),\ (6,\ 1)$$

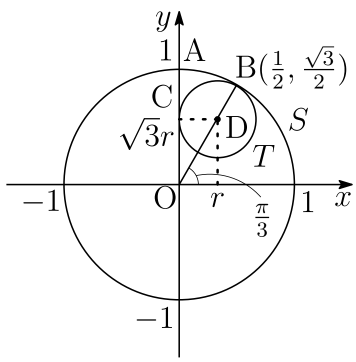
(f) となる $(i,\ j)$ の組は，$i+j=6$ をみたす 5 通り．
(a)〜(f) について，最後の L の操作における目の出方は，順次，1〜6 である．よって，求める確率は

$$\frac{5+5}{6^3}=\boldsymbol{\frac{5}{108}}$$

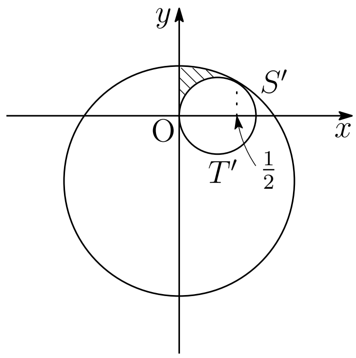
$\boxed{4}$ (1) OB の x 軸の正の方向となす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから，T の半径を r とすると，D の座標は $(r,\ \sqrt{3}r)$，$\mathrm{OD}=2r$ である．
右の図より，$\mathrm{OD}+\mathrm{DB}=1$ であるから

$$2r+r=1 \quad ゆえに \quad r=\frac{1}{3}$$

よって　$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$



(2) S，T のグラフを y 軸方向に $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ だけ平行移動した図形をそれぞれ，S'，T' とすると



$$S' : x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1$$

$$T' : \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9}$$

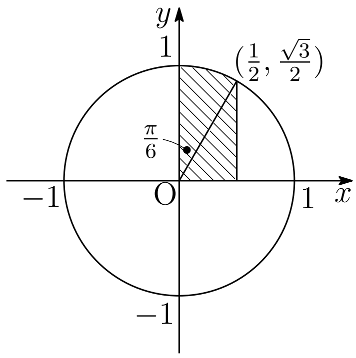
右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めればよい．
S' および T' の上半分の曲線の方程式は，それぞれ

$$y = \sqrt{1 - x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y = \sqrt{-x^2 + \frac{2}{3}x}$$

求める回転体の体積を V とすると

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\sqrt{-x^2 + \frac{2}{3}x}\right)^2 \right\} dx$$
$$= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (2 - x)\, dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

ここで，$I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ とおくと，
I は右の図の斜線部分の面積であるから



$$I = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

よって

$$V = \frac{2}{3}\pi \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \times I$$
$$= \frac{2}{3}\pi \times \frac{7}{8} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2}$$

5 (1) $AB = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-6y & 4x-5y \\ x-5t & x-4t \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB) &= (5x-6y)+(x-4t) \\ &= 2(3x-3y-2t), \\ \det(AB) &= (5x-6y)(x-4t)-(4x-5y)(x-5t) \\ &= x^2-ty-xy \end{aligned}$$

ハミルトン・ケリーの定理により

$$(AB)^2 - 2(3x-3y-2t)AB + (x^2-ty-xy)E = O$$

$(AB)^2$ が対角行列であるから，上式より，$3x-3y-2t \neq 0$ のとき，AB は対角行列である．このとき，AB の (1, 2) 成分および (2, 1) 成分は，ともに 0 であるから

$$4x-5y=0,\quad x-5t=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=5t,\quad y=4t$$

よって　$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t & 4t \\ -t-5t & -5t \end{pmatrix} = tB$

補足

一般に，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が成り立つ．

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = (-x^2+ty+xy)\cdot(-1) = x^2-ty-xy$$

(2) (背理法による証明)

$3x-3y-2t \neq 0$ と仮定すると，(1) の命題により，$A = tB$ となる．

また，$B^2 = E$ であるから

$$A^2 = (tB)^2 = t^2B^2 = t^2E,\quad A^4 = (A^2)^2 = (t^2E)^2 = t^4E$$

$A^4 = E$ より　$t^4 = 1$　ゆえに　$t = \pm 1$

このとき，$A^2 = E$ となり，条件に反する．

よって　$3x-3y-2t = 0$

(3) $\mathrm{tr}(A)=0$ に注意して，A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2+\det(A)E=O$$

したがって　$A^2=-\det(A)E,\quad A^4=\{\det(A)\}^2E$

条件により　$-\det(A)\neq 1$，$\{\det(A)\}^2=1$　ゆえに　$\det(A)=1$

上式および (2) の結果から

$$\begin{cases} -x^2+ty+xy=1 & \cdots ① \\ 3x-3y-2t=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$y=x-\dfrac{2}{3}t \quad \cdots ②'$

②′ を ① に代入して，整理すると　$tx=2t^2+3$

このとき，$t\neq 0$ であるから，上式および ②′ より

$$\boldsymbol{x=2t+\frac{3}{t},\quad y=\frac{4t}{3}+\frac{3}{t}}$$

(4) (3) の結果より　$x-2t=\dfrac{3}{t}$，$y-\dfrac{3}{t}=\dfrac{4t}{3}$

$x-2t$ は整数であるから，第1式より，$\dfrac{3}{t}$ は整数．

さらに，$y-\dfrac{3}{t}$ が整数であるから，第2式より，$\dfrac{4t}{3}$ は整数．

ゆえに，t は3の約数かつ3の倍数であるから　$t=\pm 3$

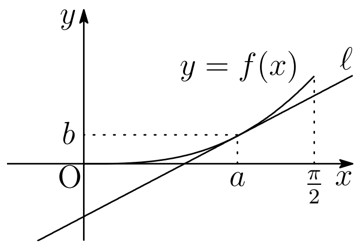
これを (3) に代入して，$t=\pm 3$ のとき　$x=\pm 7$，$y=\pm 5$　(複号同順)

よって　$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}}$

2.14　2014 年度

1　(1) $f(x) = x - \sin x$ より　$f'(x) = 1 - \cos x$

点 $(a,\ b)$ における接線の傾きが $\dfrac{1}{2}$ であるから



$$1 - \cos a = \frac{1}{2} \quad ゆえに \quad a = \frac{\pi}{3}$$

また　$b = f(a) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，接点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

よって，この点における接線 ℓ の方程式は

$$y - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad すなわち \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $a = \dfrac{\pi}{3}$ であるから，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - \sin x)^2\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x^2 - 2x\sin x + \sin^2 x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x\cos x - 2\sin x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{\pi^3}{81} + \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \pi\left(\dfrac{\pi^3}{81} + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{9\sqrt{3}}{8}\right)}$

2 (1) 自然数 a を 3 で割った商を k，余りを r とすると $(r=0,\ 1,\ 2)$

$$\begin{array}{ll} r=0\text{ のとき} & a^2=(3k)^2=3\cdot 3k^2 \\ r=1\text{ のとき} & a^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1 \\ r=2\text{ のとき} & a^2=(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1 \end{array}$$

よって，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．

(2) 自然数 a，b，c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすとき，a^2+b^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果から a^2，b^2 がともに 3 の倍数である．
このとき，自然数 l，m を用いて

$$a=3l, \quad b=3m$$

とおける．したがって

$$(3l)^2+(3m)^2=3c^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2=3(l^2+m^2)$$

c^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果により，c も 3 の倍数である．
よって，a，b，c はすべて 3 で割り切れる．

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c が存在すると仮定すると，(2) の結果から

$$a=3^nA, \quad b=3^nB, \quad c=3^nC$$

とおける (n は自然数，3 つの自然数 A，B，C の少なくとも 1 つは 3 で割り切れない)．このとき

$$\begin{aligned} (3^nA)^2+(3^nB)^2 &= 3(3^nC)^2 \\ A^2+B^2 &= 3C^2 \end{aligned}$$

上式および (2) の結果から，A，B，C はすべて 3 で割り切れることになり，A，B，C の仮定に反する．
よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は存在しない．

3 (1) $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1\cdots$ ① に $y=x+a\cdots$ ② を代入すると

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(x+a-1)^2}{4}=1$$

整理すると　$5x^2+2{\cdot}2(2a-1)x+4(a^2-2a-2)=0\quad\cdots(*)$

判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= \{2(2a-1)\}^2-5{\cdot}4(a^2-2a-2)\\ D/16 &= (2a-1)^2-5(a^2-2a-2)\\ &= -a^2+6a+11 \end{aligned}$$

楕円 ① と直線 ② が共有点をもつための条件は，$D \geqq 0$ であるから

$$-a^2+6a+11 \geqq 0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{3-2\sqrt{5} \leqq a \leqq 3+2\sqrt{5}}$

(2) $|x|+|y|=1$ より，$|y|=-|x|+1$ であるから

$$-|x|+1 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad -1 \leqq x \leqq 1$$

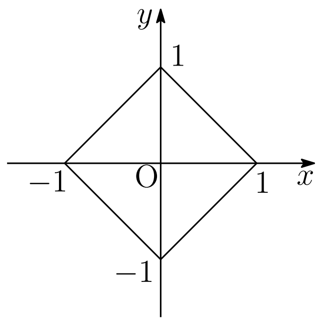
(i) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき，$|y|=x+1$ であるから

$$y=x+1 \quad \text{または} \quad y=-x-1$$

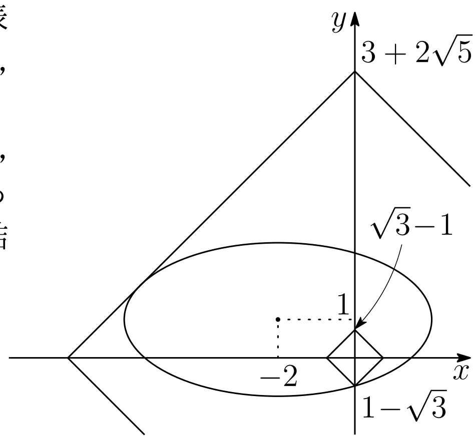
(ii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$|y|=-x+1$ であるから

$$y=-x+1 \quad \text{または} \quad y=x-1$$

(i)，(ii) より，$|x|+|y|=1$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体がなす図形は，右の図のようになる．



(3) (2) と同様に考えると，$|x|+|y|=k$ の表す図形は，4 点 $(k,\ 0)$，$(0,\ k)$，$(-k,\ 0)$，$(0,-k)$ を頂点とする正方形である．
楕円 ① の中心は第 2 象限にあるから，楕円 ① 上で $|x|+|y|=k$ が最大となる点 $(x,\ y)$ は，右の図のように，(1) の結果から，楕円 ① と直線



$$y=x+3+2\sqrt{5}\quad\cdots③$$

の接点で，最大値は $3+2\sqrt{5}$ である．
接点の x 座標は，$a=3+2\sqrt{5}$，$(*)$ から

$$x=-\frac{2{\cdot}2(2a-1)}{2{\cdot}5}=-\frac{2{\cdot}2\{2(3+2\sqrt{5})-1\}}{2{\cdot}5}=-\frac{10+8\sqrt{5}}{5}$$

これを ③ に代入して

$$y=-\frac{10+8\sqrt{5}}{5}+3+2\sqrt{5}=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$$

楕円 ① と x 軸および y 軸との共有点の座標は

$$(-2+2\sqrt{3},\ 0),\ (-2-2\sqrt{3},\ 0),\ (0,\ 1+\sqrt{3}),\ (0,\ 1-\sqrt{3})$$

上の図から，① 上の点 $(0,\ 1-\sqrt{3})$ で $|x|+|y|$ は最小値 $\sqrt{3}-1$ をとる．

よって　$\left(-\dfrac{\mathbf{10+8\sqrt{5}}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{5+2\sqrt{5}}}{\mathbf{5}}\right)$ で最大値 $\mathbf{3+2\sqrt{5}}$

$(0,\ 1-\sqrt{3})$ で最小値 $\sqrt{3}-1$

4 (1) A さん，B さんが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額をそれぞれ X，Y とすると

X	0	5	10	15	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	5	10	15	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

よって，A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q は

$$p = \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

$$q = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(2) (1) の X，Y に対して，ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額を Z とすると，Z およびその確率 $P(Z)$ を表にすると

合計金額 $\boldsymbol{Z}$

$X \backslash Y$	**0**	**5**	**10**	**15**
0	15	0	0	0
5	30	15	5	5
10	30	25	15	10
15	30	25	20	15

合計金額の確率 $\boldsymbol{P(Z)}$

$X \backslash Y$	**0**	**5**	**10**	**15**
0	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$
5	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$
10	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$
15	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$

したがって　$P(Z=0) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$

$$P(Z=5) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32}$$

$$P(Z=10) = \frac{3}{32}$$

$$P(Z=15) = q = \frac{8}{32}$$

$$P(Z=20) = \frac{1}{32}$$

$$P(Z=25) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32}$$

$$P(Z=30) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$$

よって，求める期待値 E は

$$E = 5 \times \frac{6}{32} + 10 \times \frac{3}{32} + 15 \times \frac{8}{32} + 20 \times \frac{1}{32} + 25 \times \frac{4}{32} + 30 \times \frac{7}{32} = \boldsymbol{\frac{255}{16}}$$

5 n 次関数 $f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ は，$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して

$$f_n\left(\frac{1}{k+1}\right) = f_n\left(\frac{1}{k}\right) = 0$$

が成り立つので，ロルの定理により

$$f_n'(c_k) = 0, \quad \frac{1}{k+1} < c_k < \frac{1}{k}$$

をみたす c_k が存在する．このとき，c_k は $n-1$ 次方程式

$$f_n'(x) = 0$$

の解であるから，その解の個数は高々$n-1$ 個である．

したがって，$n-1$ 個の開区間

$$\left(\frac{1}{2},\ 1\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right),\ \cdots\ \left(\frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n}\right)$$

にそれぞれ 1 個づつ $f_n'(x) = 0$ をみたす重解でない x が存在する．

$f_n(x)$ の最高次の係数に注意すると

$$f_n'(x) = n{\cdot}n!(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{n-1})$$

$x = c_k$ の前後で $f_n'(x)$ の符号が変化するので，$f_n(c_k)$ は極値である．

よって，$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとる．

別解
$$g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n!} = \left(x - \frac{1}{1}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdots\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

とおくと，$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して，$g_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを示せばよい．

$$\log|g_n(x)| = \sum_{j=1}^{n} \log\left|x - \frac{1}{j}\right|$$

を微分すると

$$g_n'(x) = g_n(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x - \dfrac{1}{j}}$$

さらに，$h_n(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x - \dfrac{1}{j}}$ とおくと

$$g_n'(x) = g_n(x)h_n(x)$$
$$h_n'(x) = -\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(x - \dfrac{1}{j}\right)^2}$$

$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して，区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ で，$h_n(x)$ は単調減少であり

$$\lim_{x \to \frac{1}{k+1}+0} h(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \frac{1}{k}-0} h(x) = -\infty$$

であるから

$$h_n(c_k) = 0, \quad \frac{1}{k+1} < c_k < \frac{1}{k}$$

をみたす c_k が唯一存在し，

$$\frac{1}{k+1} < x < c_k \text{ で } h(x) > 0, \quad c_k < x < \frac{1}{k} \text{ で } h(x) < 0$$

$g_n(x)$ は，区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ で定符号であるから，$g_n'(x)$ は $x = c_k$ の前後で符号が変わる．したがって，$g_n(c_k)$ は，区間 $\dfrac{1}{k+1} < x < \dfrac{1}{k}$ におけるただ 1 つの極値である．

第 3 章　一般前期解説

空間のベクトルで外積を利用できる問題 (2002 年，2003 年，2004 年，2011 年)，四面体の体積の公式 (2004 年，2011 年) も利用できる問題が出題された．

行列の n 乗の計算問題も，2004 年，2005 年に連続して出題された．2004 年はスペクトル分解等を利用できる問題，2005 年においては行列の漸化式を用いる問題であり，さまざまな手法を覚えておく必要があった．

極限は，さみうちの原理を用いる問題 (2001 年，2003 年，2006 年，2011 年) が出題された．

毎年必ず数学 III の微分法・積分法に関する問題が出題され，内容も多岐に亘り，出題形式も複合問題となっているものも多く，合否に関わる重要題である．

2006 年以降現行の教育課程で 1 次変換 (2009 年，2010 年) が復活し，いずれも難問であった．行列式の性質，固有方程式・固有ベクトルについての知識の有無により明暗が分かれた問題であった．

2002 年のランダムウォーク，2010 年の確率の問題などは，九大らしい工夫がなされた良問である．計算式を導いて完答するには苦労するが，入試問題として単純化されたモデルであるから，逆手に取って数え上げにより求めることも可能である．2010 年の問題では，1 回目が 1〜6 の目の場合について確認する方が速くて簡単である．

大学で扱う概念を元に次の入試問題が出題された．

1. ガウス表示を $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転 (微分幾何学)　2001 $\boxed{\mathbf{7}}$
2. 1 次元ランダム・ウォーク (離散数学)　2002 $\boxed{\mathbf{6}}$
3. ロジスティック写像 (カオス理論)　2006 $\boxed{\mathbf{5}}$
4. 法線群の包絡線 (微分幾何学)　2009 $\boxed{\mathbf{3}}$
5. 曲率が極値をとる点 (頂点) の座標 (微分幾何学)　2009 $\boxed{\mathbf{5}}$
6. 周期関数とフェルマーの小定理 (代数学)　2011 $\boxed{\mathbf{3}}$
7. マルコフ連鎖 (確率論)　2012 $\boxed{\mathbf{5}}$

とくに，微分幾何学の分野からの出題率の高さを考え，数学 III までの知識で理解できる解説を付けた．

3.1　2001年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 II：微分法 (関数の単調増加)

(1) $f(x) = \dfrac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ がつねに増加するためには，$f(x)$ が3次関数または1次関数であり，最高次の係数が正であることが必要条件である．$f(x)$ が3次関数であるとき，$f'(x) = 0$ の判別式 D について，$D \leqq 0$ である．

(2) $a = 0$ のとき，$f(x) = bx^2 + (b+1)x$ となる．$f(x)$ が $x > -1$ でつねに増加するためには，$f(x)$ が2次関数であるとき，$b > 0$，$f'(-1) \geqq 0$ であり，$f(x)$ が1次関数であるとき，1次の係数が正である．

(3) $a \geqq 0$ は，$f(x)$ が $x > -1$ でつねに増加するための必要条件である．$a > 0$ のとき，$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると，次のような場合分けをして求めるとよい．

i) $a = 0$ の場合，(2) で求めた．

ii) $a > 0$，$D \leqq 0$ の場合，(1) で求めた．

iii) $a > 0$，$D > 0$ の場合，これを求める必要がある．

よって，i)〜iii) をまとめた領域を図示すればよい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 III：微分法 (3次関数の対称性)

(1) 2点 $(x,\ y)$，$(X,\ Y)$ の中点が $(p,\ q)$ であることから導かれる．

(2) 3次関数のグラフは変曲点に関して対称であることを知っていれば簡単である．また，テイラー展開 (Taylor expansion) に関する知識があれば証明の方向性がつかめ，論理的な展開が容易である．九大を目指す受験生であれば，これらの知識を後ろ盾に持っておきたい．テイラー展開といっても，部分積分法により簡単に証明することができるので，158ページに掲載した．なお，テイラー展開を用いない別解を文系の解答に示した．

(3) 直線 $\ell : mx + ny = 0$ の法線ベクトルおよび方向ベクトルをそれぞれ $\vec{n}$，$\vec{d}$ とする．座標平面上の任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ を，実数 s，t を用いて，$\vec{p} = s\vec{n} + t\vec{d}$ とすると，P と ℓ に関して対称な点 $\mathrm{Q}(\vec{q})$ は $\vec{q} = -s\vec{n} + t\vec{d}$ である．ℓ に関する対称移動を表す行列を A とすると $A\vec{p} = \vec{q}$ であるから

$$A(s\vec{n} + t\vec{d}) = -s\vec{n} + t\vec{d} \quad \text{すなわち} \quad sA\vec{n} + tA\vec{d} = s(-\vec{n}) + t\vec{d}$$

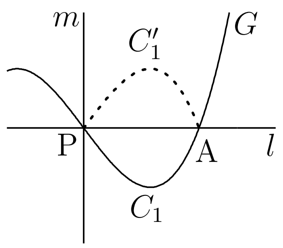
よって，$A\vec{n} = -\vec{n}$，$A\vec{d} = \vec{d}$ から A を求めることができる．

(4) 一般に，3 次関数のグラフは，線対称ではないことを以下に示した．

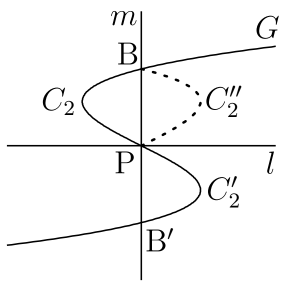
G がある直線 l に関して対称であるとき，G の変曲点 P が l 上にないと仮定すると，P と l に関して対称な変曲点 P' が G にあり，G に 2 個の変曲点が存在することとなる．このことは G が 3 次関数のグラフであることに反する．したがって，P は l 上にある．

P を通り，l に垂直な直線を m とする．G は P に関して対称であるから，G と l，m の位置関係について次のようになる．

i) G が P 以外に l と共有点 A をもつと仮定すると，P から A までの G の曲線部分を C_1 とすると，C_1 と l に関して対称な曲線部分 C_1' があり，C_1 および C_1' によるループ (loop) ができ，これは G が 3 次関数であることに反する．



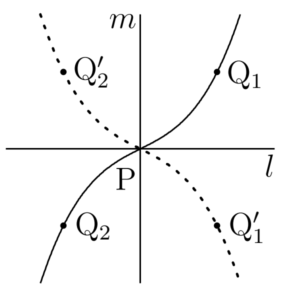
ii) G が P 以外に m と共有点 B をもつと仮定すると，P から B までの G の曲線部分を C_2 とすると，C_2 と P に関して対称な曲線部分 C_2' があり，さらに C_2' と l に関して対称な C_2'' がある．C_2 および C_2'' によるループができ，これは G が 3 次関数であることに反する．



したがって，i)，ii) により，G と l，m との共有点は P に限る．

G 上に P と異なる点 Q_1 をとり，Q_1 と P に関して対称な点を Q_2 とし，2 点 Q_1，Q_2 と l に関して対称な点をそれぞれ Q_1'，Q_2' とする．このとき，これらの 4 点を結ぶ曲線部分は，P において自己交差 (Self-Intersection) し，G が 3 次関数であることに反する．

よって，題意は成立する．



補足 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を $x = p$ でテイラー展開を行うと

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2 + a(x-p)^3$$

であり，$f''(p) = 0$，すなわち $p = -\dfrac{b}{3a}$ とすると，曲線 $y = f(x)$ は

$$y = f(p) + f'(p)(x-p) + a(x-p)^3$$

となり，変曲点 $(p,\ f(p))$ に関して対称である．よって，(4) の結果から，3 次関数のグラフは，どんな直線に関しても線対称ではない．

テイラー展開

$f(t)$ を必要な回数だけ微分可能 (C^∞級) な関数とし，$k \geqq 1$ とする．

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt &= -\int_a^x \left\{\frac{(x-t)^k}{k!}\right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

上式を $k = 1, 2, 3, \ldots n-1$ について辺々を加えると

$$\int_a^x f'(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \tag{3.1}$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ が最大値，最小値をもつとき，それらをそれぞれ M，m とすると，$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$ は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M\,dt = \frac{M}{n!}(x-a)^n, \quad \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} m\,dt = \frac{m}{n!}(x-a)^n$$

の間の値をとるので，この区間内のある c は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{3.2}$$

を満たす．(3.2) を (3.1) に代入すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{3.3}$$

(3.3) を $f(x)$ の $x = a$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion) という．
とくに $a = 0$ とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n$$

となり，これをマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) という．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 III：積分法 (円柱と正四角柱の共通部分の体積)

(1) 平面 $z = t\ (-r \leqq t \leqq r)$，円柱 $y^2 + z^2 \leqq r^2$，正四角柱 $|x| + |y| \leqq \dfrac{2}{r}$ で囲まれた領域では，z の値で y の範囲が決定し，y の値で x の範囲が決定する．したがって，これらで囲まれた領域は

$$z = t, \quad -\sqrt{r^2 - t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2 - t^2}, \quad -\left(\frac{2}{r} - |y|\right) \leqq x \leqq \frac{2}{r} - |y|$$

$x_1 = -\left(\dfrac{2}{r} - |y|\right)$，$x_2 = \dfrac{2}{r} - |y|$ とおき，この領域の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = \int_{-\sqrt{r^2-t^2}}^{\sqrt{r^2-t^2}} (x_2 - x_1)dy = \int_{-\sqrt{r^2-t^2}}^{\sqrt{r^2-t^2}} 2\left(\frac{2}{r} - |y|\right)dy$$

(2) (1) の結果を利用して　$V(r) = \displaystyle\int_{-r}^{r} S(t)dt$

(3) (2) の結果から，$0 < r \leqq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求める．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 旧課程：複素数平面 (複素数平面上の軌跡)

(1) 典型的で平易な問題であるが，こうした問題の次に必ず関連性がある発展問題が控えているのが九大入試 (数学) の特徴である．

(2) $d(z-p)(\overline{z}-\overline{q}) = \overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$ より

$$(d-\overline{d})z\overline{z} + (\overline{d}\,\overline{p} - d\overline{q})z + (\overline{d}q - dp)\overline{z} + (dp\overline{q} - \overline{d}\,\overline{p}q) = 0$$

これに i を掛けると

$$i(d-\overline{d})z\overline{z} + i(\overline{d}\,\overline{p} - d\overline{q})z + i(\overline{d}q - dp)\overline{z} + i(dp\overline{q} - \overline{d}\,\overline{p}q) = 0$$

i) $d \neq \overline{d}$ のとき (d は虚数)

$$a = i(d-\overline{d}), \quad b = i(\overline{d}q - dp), \quad c = i(dp\overline{q} - \overline{d}\,\overline{p}q)$$

とおくと，a，c は実数であり，$az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$ となる．
このとき，(1) の結果が利用でき，本題のポイントである．

ii) $d = \overline{d}$ のとき (d は実数)
$d = \overline{d} \neq 0$ より　$(z-p)(\overline{z}-\overline{q}) = (z-q)(\overline{z}-\overline{p})$
したがって　$\dfrac{z-p}{z-q} = \overline{\left(\dfrac{z-p}{z-q}\right)}$　ゆえに，$\dfrac{z-p}{z-q}$ は実数である．

$\boxed{5}$ 数学 III：極限 (はさみうちの原理)，数学 C：確率分布 (期待値の加法定理)

(1) 簡単な場合分けにより処理できる．

(2) $P(X_1 = 2) = P(X_1 \geqq 2) - P(X_1 \geqq 3)$ である．

(3) $E(X_1)$ の計算を $\sum$ を駆使して行う．

(4) (3) の結果およびはさみうちの原理を利用する．

(5) 確率変数の和の期待値について，$E(X_1 + X_n) = E(X_1) + E(X_n)$ が成り立つ．この部分だけが確率分布からの出題である．

$\boxed{6}$ 数学 B：コンピュータ (自然数を 2 で割り続けるアルゴリズム)

(1) フローチャートを作成しなくとも，順次，値を代入すればよい．

(2) i が奇数と偶数のときで場合分けをすればよい．

(3) (2) の結果を利用すればよい．

(4) 与えられた自然数 m を 2 で割り続けるアルゴリズムである．

$\boxed{7}$ 数学 III：微分法 (曲線の媒介変数表示)・積分法 (弧長)

(1) $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線の傾き $f'(t)$ が $\tan\theta$ である．

(2) P における G の下側の向きの単位法ベクトルは $\vec{n} = (\sin\theta, -\cos\theta)$
このとき，(1) の結果から，$\tan\theta = f'(t)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}},\ \ \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

となり，これらを $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \vec{n}$ に代入すればよい．

(3) L_1，L_2 をそれぞれ求めるのではなく，$L_2 - L_1$ で結果を導く必要がある．なお，弧長は現行の教育課程の範囲外ではあるが，数学 III の巻末に発展的な学習内容として掲載されている．2010 年度にサイクロイドの弧長を求める問題が出題されている．

$\boxed{8}$ 数学 III：積分法 (区分求積法とその収束性)

(1) $0 < x < 1$ のとき

$$0 < \int_0^x e^t\,dt < \int_0^x e\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0 < e^x - 1 < ex$$

これから

$$0 < \int_0^x (e^t - 1)dt < \int_0^x et\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0 < e^x - 1 - x < \frac{ex^2}{2}$$

さらに

$$0 < \int_0^x (e^t - 1 - t)dt < \int_0^x \frac{et^2}{2}\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0 < e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} < \frac{ex^3}{6}$$

したがって，$0 < x < 1$ のとき，$0 < f(x) < \dfrac{ex^3}{6} < x^3$

後半は，上の結果およびはさみうちの原理を用いればよい．

なお，$0 < x < 1$ のとき

$$\int_0^x dx < \int_0^x e^t\,dt < \int_0^x e\,dt$$

であるから，次式が成り立つ．

$$0 < x < 1 \text{ のとき} \quad \frac{x^3}{6} < f(x) < \frac{ex^3}{6}$$

(2) 次式および (1) の結果から，結論が見えてくる．

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1,\ K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \times \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

$\boxed{9}$ 数学 C：行列 (係数行列と整数問題)

(1) 係数行列の知識を問う基本問題．

(2) 簡単な整数問題．

(3) (2) の結果から結論が明らか．

(4) d の最小の値 6 を導くために，d が 2 の倍数かつ 3 の倍数であることを示せばよい．

3.2 2002 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 III：微分法 (媒介変数表示)，積分法 (面積)

(1) $y+x$ と $y-x$ の積が計算の要点．

(2) k を定数とすると，部分積分法により

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+k}\,dx &= x\sqrt{x^2+k}-\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}dx\\ &= x\sqrt{x^2+k}-\int\sqrt{x^2+k}\,dx+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}\end{aligned}$$

ゆえに $\displaystyle\int\sqrt{x^2+k}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$

また $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C$

上の 2 式から，次の積分が得られ，これが本題のポイントである．

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

(3) (2) の結果から，関数 $A(t)-S(t)$ の増減を調べるとよい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 I：実数 (整数問題)

(1) 一般的な約数の総和の問題で，教科書等にも登場している．

(2) $p\geqq 2$ より，a は少なくとも pq，q の 2 個の約数にもつことに気付けば平易な問題である．

(3) 平易な問題の後には，必ずそれを利用する発展問題があるといういつもの出題パターンである．論理的な展開の中で (2) の結果を利用する必要があり，緻密な論証力も要求される問題である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 III：微分法 (関数の最小値)，積分法 (定積分の大小関係)

(1) 一方の文字を固定し，他方を変数として考えるとよい．解答では，y を固定し，x の関数として，その関数の最小値 $\geqq 0$ から不等式の証明を行った．この不等式は，相加平均と相乗平均などの大小関係の証明などでも利用される．参考までに，次のページに掲載した．

(2) (1) で示した不等式の x，y をそれぞれ $f(x)$，$f(y)$ とおき，その定積分を計算する．

(3) 条件から，(2) の結果に $g(x)=M$ を代入しても成り立つ．

相加平均と相乗平均

(1) の結果 $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ について，x と y を入れ換えた

$$y\log y - y\log x - y + x \geqq 0$$

の両辺を y で割ると

$$\log y - \log x - 1 + \frac{x}{y} \geqq 0$$

ここで，$a_k > 0,\ p_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ に対し，

$$\begin{aligned} M &= p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n \\ f(x) &= \log M - \log x - 1 + \frac{x}{M} \end{aligned}$$

とおくと，$x > 0$ について $f(x) \geqq 0$ が成り立つ．また，等号が成り立つのは，$x = M$ のときに限る．

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} p_kf(a_k) &= \sum_{k=1}^{n} p_k\left(\log M - \log a_k - 1 + \frac{a_k}{M}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(p_k\log M - p_k\log a_k - p_k + \frac{p_ka_k}{M}\right) \\ &= \log M - \sum_{k=1}^{n}\log {a_k}^{p_k} - 1 + \frac{M}{M} \\ &= \log M - \log\left({a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots{a_n}^{p_n}\right) \end{aligned}$$

$p_kf(a_k) \geqq 0\ (k = 1, 2, \cdots n)$ であるから (等号が成り立つのは，$a_k = M$ のとき)

$$\log M - \log\left({a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots{a_n}^{p_n}\right) \geqq 0$$

したがって

$$\boldsymbol{p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n \geqq {a_1}^{p_1}{a_2}^{p_2}\cdots{a_n}^{p_n}}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき)．
とくに，$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$$

$\boxed{4}$ 数学 B：空間のベクトル (三角形の面積)

(1) これも九大入試の特徴の一つである．教科書にある公式の証明問題．

(2) 外積は，強力な計算手段であるから知っていれば，結論を先読みすることもできる．外積について 179 ページに掲載してあるので，是非学習しておいてもらいたい．しかし，外積は高校数学の範囲外であり，入試では使ってはならない．外積と内積の関係式 $|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ により，以下のように，実際の計算と答案を使い分けるとよい．

実際の計算

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1,\ 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x + 2\cos\theta,\ y,\ 2\sin\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (2\sin\theta, -2\sin\theta,\ y - x - 2\cos\theta)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = (y - x - 2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta$$

よって

$$\triangle\mathrm{ACP} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(y - x - 2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta}}$$

答案

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1,\ 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x + 2\cos\theta,\ y,\ 2\sin\theta)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 2, \quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = (x + 2\cos\theta)^2 + y^2 + 4\sin^2\theta$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x + 2\cos\theta + y \text{ であるから}$$
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACP} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(y - x - 2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果および $-1 \leqq y - x \leqq 1$ であるから，$2\cos\theta$ の値により場合分けをするとよい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 旧課程：複素数平面 (三角形の垂心)

(1) A(z_1)，B(z_2)，C(z_3) とすると，点 A を通り，BC に垂直な直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right)}=0 \quad \cdots ①$$

$w_1=z_1+z_2+z_3$ がこの直線上にあることを示せばよい．
また，w_1 が点 B を通り直線 CA に垂直な直線な直線上の点，および点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点であることを示すことができる．
よって，w_1 は △ABC の垂心であることが分かる．

(2) 円 C の方程式は　$|z|=1 \quad \cdots ②$
$w_2=-\overline{z}_1z_2z_3$ が，直線 ①，円 ② 上にあることを示せばよい．

(3) 2 点 B，C を通る直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_2}{z_3-z_2}$ は実数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_2}{z_3-z_2}-\overline{\left(\frac{z-z_2}{z_3-z_2}\right)}=0$$

w_1 と w_2 の中点 w がこの直線上にあることを示せばよい．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 数学 A：確率 (1 次元ランダム・ウォーク)

(1) 原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，
右斜め 45° の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め $-45°$ の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．
よって，原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は

$${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} \quad \text{または} \quad {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-k}{2}}$$

(2) 原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，最初に直線 $y=k$ と交わる格子点を A$(a,\ k)$ とする $(0 \leqq a \leqq n-2)$．A と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数，A と格子点 $(n-1,\ k-1)$ を通る数は，直線 $y=k$ に関する対称性によりその数は等しいことに気付く必要がある．

(3) 条件つき確率の問題で，解答にはその一般的な解答を示した．具体的な値での設問であるから，数え上げによる別解を次のページに示した．

1 次元ランダム・ウォーク

設問は，1 次元ランダム・ウォーク (Random walk)[離散型] の最も基本的なモデルである．(3) の条件つき確率は，下の 2 つの表における原点と点 (9, 3) を結ぶ折れ線グラフの数から

$$\mathbf{\frac{28}{84} = \frac{1}{3}}$$

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	9										1
	8									1	
	7								1		9
	6							1		8	
	5						1		7		36
	4					1		6		28	
	3				1		5		21		**84**
	2			1		4		15		56	
	1		1		3		10		35		126
	0	1		2		6		20		70	
	-1		1		3		10		35		126
	-2			1		4		15		56	
	-3				1		5		21		84
	-4					1		6		28	
	-5						1		7		36
	-6							1		8	
	-7								1		9
	-8									1	
	-9										1

折れ線グラフの数

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	3										**28**
	2			1		3		9		28	
	1		1		3		9		28		90
	0	1		2		6		19		62	
	-1		1		3		10		34		117
	-2			1		4		15		55	
	-3				1		5		21		83
	-4					1		6		28	
	-5						1		7		36
	-6							1		8	
	-7								1		9
	-8									1	
	-9										1

すべての $i(i = 1, 2, \cdots, 7)$ で $T_i \neq 3$ の数

(1) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ である．また，(2) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいから，n のときはじめて k になるグラフの数は

$$ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n} \cdot {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} $$

これは，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの本数の $\dfrac{k}{n}$ 倍．

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{k}{n}$ となる．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 数学 III：微分法 (楕円と点の位置関係)

(1) P_1 は C 上，P_3 は C の内部にあることから導かれる．

(2) $\dfrac{dy}{dx}$ を $\dfrac{dy}{d\theta}$，$\dfrac{dx}{d\theta}$ から計算する．

(3) D の軸の一つは x 軸上にあるから，その中心を $(k,\ 0)$ とする．また，D は頂点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$ を通るから，P_1 と中心に関して対称な頂点の座標が $(2k-1,\ 0)$ である．$\mathrm{P}_3\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ が D の内部にあることを次式により示してもよい．

$$2k-1<-\frac{1}{2}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ 数学 III：微分法 (ニュートン法)

(1) $g(x)-\sqrt[3]{a}$ を地道に因数分解していく問題．

(2) (1) の結果を利用すれば結論は簡単に得られる．

(3) ニュートン法に近似計算であり，(2) の結果を利用するとよい．

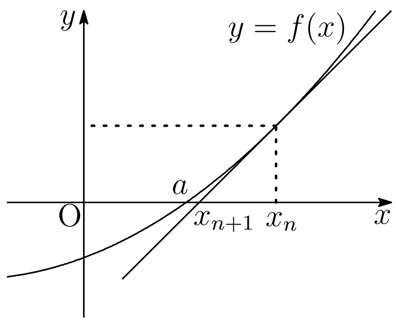
ニュートン法

求解アルゴリズムの一つであるニュートン法 (Newton's method) に基づく出題である．方程式 $f(x)=0$ の解 a の近くの x_1 をとり，その点における接線

$$y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$$

が x 軸と交わる点の x 座標 x_2 とすると

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



これをアルゴリズム化した

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \cdots(*)$$

による近似解析をニュートン法という．なお，$\{x_n\}$ は a に収束する場合が多いが，必ずしも保証されたものではない．

本題 (3) において，$0<x_n<\sqrt[3]{9}$ のとき

$$f(x_n)={x_n}^2-\frac{9}{x_n}=\frac{{x_n}^3-9}{{x_n}^3}<0, \quad f'(x_n)=2x_n+\frac{9}{{x_n}^2}>0$$

であるから，$(*)$ より　$x_{n+1}>x_n$

本題 (2) から　$\displaystyle \sqrt[3]{9}-x_{n+1}=(\sqrt[3]{9}-x_n)^3\times\frac{x_n+\sqrt[3]{9}}{2{x_n}^3+9} \quad \cdots(**)$

したがって　$x_{n+1}<\sqrt[3]{9}$　ゆえに　$0<x_n<x_{n+1}<\sqrt[3]{9}$

このとき，$(**)$ から

$$0<\sqrt[3]{9}-x_{n+1}<(\sqrt[3]{9}-x_n)^3\times\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9}}{2\cdot 0^3+9}<(\sqrt[3]{9}-x_n)^3$$

したがって　$0<\sqrt[3]{9}-x_n<(\sqrt[3]{9}-x_1)^{3^{n-1}}$

$x_1=2$ とすると　$\displaystyle \lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{9}$

なお，$x_1=2$，$x_2=2.08$ であるが，$n=3$ ではかなり精度が向上する．

$$\sqrt[3]{9}\fallingdotseq 2.080083823051904\cdots$$
$$x_3=2.080083823051814$$

9 数学 C：行列 (べき等行列)

(1) $ad-bc\neq 0$ より，A は正則である．

(2) ハミルトン・ケーリーの公式を利用する．

(3) $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$，$A$ がべき行列 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{tr}A=1,\ 2$ を利用する．

3.3　2003 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 III：積分法 (媒介変数表示された曲線と回転体の体積)

(1) t の関数 x，y の増減を調べ，グラフを描く.

(2) 部分積分法による証明.

(3) 極方程式による曲線の回転体の体積 V は

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\{r(\theta)\}^3 \sin\theta\, d\theta$$

であることを証明し，これを利用して体積を求める.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 II：図形と領域 (絶対値のついた不等式の表す領域)

(1) 不等式 $2|x-4|+|y-5| \leqq 3$ の表す領域 A は，$2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したもの.

(2) $f(x,\ y) = 2|x-4|+|y-5|$，$g(x,\ y) = 2\Big||x|-4\Big| + \Big||y|-5\Big|$ とおくと，$f(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域 A の点 $(x_1,\ y_1)$ は，(1) の結果から $x_1 > 0$，$y_1 > 0$ であり，$g(x,\ y) = f(|x|,\ |y|)$ が成り立つことに注意する.

(3) 素因数分解の一意性を利用した整数問題.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 III：極限 (はさみちの原理)，積分法 (格子点と面積)

(1) $0 \leqq i < n$ のとき，$i \leqq y \leqq i+1$ で $y = x^p$ と交わる単位正方形は 1 個である．したがって，求める個数は n 個.

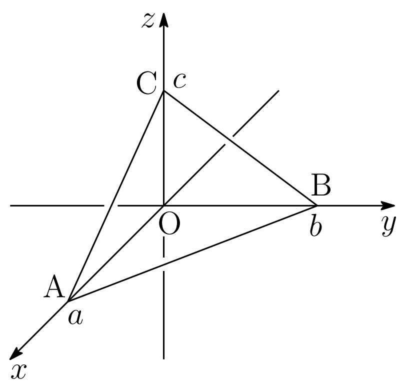
(2) 前半は，単位正方形の個数と面積の関係に注意すればよい．後半は，曲線と x 軸で囲まれた部分の面積である.

(3) L_n と M_n の関係式を導き，これと (2) の結果を利用し，はさみうちの原理により与えられた極限値を求める．また，(2) の結果を利用せず，直接 L_n の範囲を与える別解を示した.

$\boxed{4}$ 数学 B：空間のベクトル (ベクトルの空間図形への応用)

(1) 3 点 A,B,C を通る平面の方程式およびその法線ベクトルを利用した方が自然な結論が得られる．

$\angle$AOB，$\angle$BOC，$\angle$COA はすべて 90° であるから座標空間に 3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ を定めると，$\triangle$ABC の重心 G の座標は



$$\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$$

3 点 A,B,C を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

この平面の法線ベクトル $\vec{n}$ は　　$\vec{n}=\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}/\!/\vec{n}$ であるから，定数 k を用いて

$$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)=k\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)\quad \text{ゆえに}\quad a^2=b^2=c^2=3k$$

よって，$a>0,\ b>0,\ c>0$ より　　$\boldsymbol{a=b=c}$

(2) 本題は，以下のように外積 (ベクトル積) を用いた計算が簡単である．

D は線分 BC を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P は直線 AD 上の A 以外の点であるから $(t\neq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$\triangle$APQ の重心が G であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\quad \text{すなわち}\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

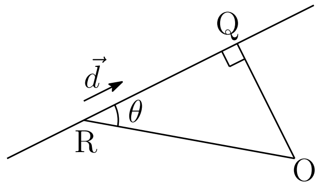
したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$=(-a,\ b,\ c)+\frac{t}{3}(3a,-2b,-c)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-a,\ b,\ c)$，$\vec{d}=(3a,-2b,-c)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{t}{3}\vec{d}\quad \cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\vec{d}$ のベクトルのなす角を θ とすると $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$，OQ が最小となるとき



$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}| \sin\theta, \quad \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\vec{d}|}$$

上の 2 式から $\quad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} \quad \cdots ②$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \vec{d}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \vec{d} = 0$ であるから，① をこれに代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d} + \frac{t}{3}|\vec{d}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{3(\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d})}{|\vec{d}|^2}$$

したがって $\quad t = \dfrac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2} \neq 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d} = (bc,\ 2ca, -ab)$ であるから，② より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{\sqrt{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}}{\sqrt{9a^2 + 4b^2 + c^2}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}}$$

法ベクトル

座標平面 (2 次元) における直線 $ax + by + c = 0$(1 次元) および座標空間 (3 次元) における平面 $ax + by + cz + d = 0$(2 次元) の法ベクトル (法線ベクトルともいう) は，それぞれ $(a,\ b)$，$(a,\ b,\ c)$ である．また，法ベクトルの次元は $2 - 1$ および $3 - 2$ で，ともに 1 次元である．

直線 $ax + by + c = 0$，平面 $ax + by + cx + d = 0$ は，n 次元空間における $n - 1$ 次元の多様体であり，法ベクトルの次元は 1(多様体の余次元) である．

したがって，これらの多様体 (ここでは，直線と平面) は同形であり，関連する公式も同形である．

たとえば，点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ から平面 $ax + by + cz + d = 0$ までの距離は

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であり，点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離と同形である．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 旧課程：複素数平面 (直線と曲線の共有点の個数)

(1) $z=t+ai$ に対し，$z^2=x+yi$ とおく．2 式から t を消去して，x，y の関係式を導く．

(2) m の方程式を求め，場合分けにより，(1) で求めた曲線との共有点の個数を求める．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 数学 C：確率分布 (二項分布)

(1) 確率が面積比により求まる．

(2) 余事象の確率および期待値の問題．なお，期待値 E は 2 項分布による公式 $E=np$ を利用してもよい．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 数学 C：行列 (対称行列による 1 次変換)

(1) $\mathrm{Q}(2a+b+1,\ a+2b-1)$，$\mathrm{R}(1,-1)$ となるから

$$\frac{\mathrm{RQ}^2}{\mathrm{OP}^2}=\frac{(2a+b)^2+(a+2b)^2}{a^2+b^2}=9-\frac{4(a-b)^2}{a^2+b^2}\leqq 9$$

(2) 対称行列 A^{-1} の固有ベクトルは直交することを利用する．

$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ の固有方程式は　　$\lambda^2-4\lambda+3=0$

$\lambda=3,\ 1$ に対する固有ベクトルをそれぞれ

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

とおくと

$$B=\frac{a+b}{2}\vec{u}+\frac{a-b+2}{2}\vec{v}$$

であるから

$$A^{-1}B=\frac{a+b}{2}A^{-1}\vec{u}+\frac{a-b+2}{2}A^{-1}\vec{v}=\frac{3(a+b)}{2}\vec{u}+\frac{a-b+2}{2}\vec{v}$$

したがって

$$\mathrm{OQ}^2=\frac{9(a+b)^2}{4}|\vec{u}|^2+\frac{(a-b+2)^2}{4}|\vec{v}|^2=\frac{9}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b+2)^2$$

$|a|\leqq\frac{1}{2}$，$|b|\leqq\frac{1}{2}$ において，上式の最小値を求める．

対称行列の固有ベクトル

本題で与えられた行列 A は対称行列であり，その逆行列も対称行列である．対称行列の固有ベクトルは直交することに注目して本題の解答を行った．
このことに関して，次の定理とその証明をしておく．

定理

対称行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有ベクトルは直交する．ただし，$A \neq kE$ とする．

証明 A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2)=0$$

この方程式の判別式 D は

$$D=\{-(a+c)\}^2-4{\cdot}1(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2>0$$

ゆえに，異なる 2 つの固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ u_1，u_2 とする．ここで，内積 $u_1{\cdot}u_2$ は行列の積 ${}^t u_1 u_2$ であることに留意する．

$$(Au_1){\cdot}u_2={}^t(Au_1)u_2={}^t u_1{}^t Au_2={}^t u_1 Au_2=u_1{\cdot}(Au_2)$$

$Au_1=\lambda_1 u_1$，$Au_2=\lambda_2 u_2$ であるから上式より

$$(\lambda_1 u_1){\cdot}u_2=u_1{\cdot}(\lambda_2 u_2) \quad \text{すなわち} \quad (\lambda_1-\lambda_2)u_1{\cdot}u_2=0$$

$\lambda_1-\lambda_2 \neq 0$ であるから　$u_1{\cdot}u_2=0$　よって　$u_1 \perp u_2$ 　証終

補足

$m\times n$ 行列 A の (i,j) 成分と (j,i) 成分を入れ換えた行列を A の転置行列 (transposed matrix) といい，${}^tA$ と表す．
たとえば，2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の転置行列は，${}^tA=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$．
$l\times m$ 行列 A と $m\times n$ 行列 B の積 AB は $l\times n$ 行列であり，$n\times m$ 行列 ${}^tB$ と $m\times l$ 行列 ${}^tA$ の積 ${}^tB{}^tA$ は $n\times l$ 行列である．また，次式が成り立つ．

$${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$$

正方行列 A が対称行列であることと ${}^tA=A$ が成立することは同値である．
上の証明でベクトルを $\vec{u}_1$ とせず u_1 と表したのは，行列の計算により証明を行ったからである．本来，ベクトルは行列の一部であり，大学等では，$\vec{v}$ などと表記しないのが一般的である．

$\boxed{8}$ 数学 II：微分法 (放物線の2接線)

(1) 直線の傾きに正接の加法定理を適用する．

(2) 接点の傾きを用いて，接点の座標を表す．

(3) (2) の結果を利用して，双曲線の一部であることを示す．

$\boxed{9}$ 数学 III：積分 (面積による不等式の証明)

(1) $k \geqq 1$ のとき　$\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$,　　$k \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$

(2) 証明する等式

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

を変形すると

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k \Delta b_k + b_{k+1} \Delta a_k) = a_n b_n - a_1 b_1$$

となることから，その糸口を探るとよい．

$$\begin{aligned} a_k \Delta b_k + b_{k+1} \Delta a_k &= a_k (b_{k+1} - b_k) + b_{k+1}(a_{k+1} - a_k) \\ &= a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k \end{aligned}$$

ゆえに　$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \Delta b_k + b_{k+1} \Delta a_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k) \\ &= a_n b_n - a_1 b_1 \end{aligned}$$

よって　$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k \quad \cdots (*)$$

後半は，$(*)$ に $a_k = S_k$，$\Delta b_k = k$ を適用するとよい．

(3) (1)，(2) の結果を利用するとよい．

3.4　2004 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 III：極限 (数列の極限)，積分法 (定積分)

(1) 漸化式を部分積分法により導くのは常套手段であり，I_0 および漸化式により I_3 を求める．

(2) $n \geqq 1$ のとき

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx < \int_0^2 x^2 e^2\,dx = \frac{2^{n+1}e^2}{(n+1)!}$$
$$= \frac{2{\cdot}2e^2}{1{\cdot}2} \times \frac{2}{3}{\cdot}\frac{2}{4}{\cdot}\frac{2}{5}\cdots\frac{2}{n+1} \leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

したがって，証明すべき不等式は，次式でもよい．

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x\,dx < 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

(3) (1)，(2) の結果から，はさみうちの原理により極限値を求める．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 C：行列 (行列の n 乗)

(1) 二項定理の基本問題であるが，単なる展開の計算．

(2) スペクトル分解を用いる．ただし，固有方程式が重解をもつ場合は，別途計算する．

(3) (2) と同様に求めることができる．次の別解もある．

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A = aE + bF,\ E^2 = E,\ EF = FE = F,\ F^2 = E$$

したがって，A^n は E と F の線形結合で表され，$A^n = a_nE + b_nF$ とおくと

$$a_{n+1} = aa_n + bb_n,\quad b_{n+1} = ba_n + ab_n,\quad a_1 = a,\ b_1 = b$$

ゆえに　$a_{n+1} + b_{n+1} = (a+b)(a_n + b_n)$，$a_{n+1} - b_{n+1} = (a-b)(a_n - b_n)$

$a_n + b_n = (a+b)^n$，$a_n - b_n = (a-b)^n$

すなわち　$a_n = \frac{1}{2}\{(a+b)^n + (a-b)^n\}$，$b_n = \frac{1}{2}\{(a+b)^n - (a-b)^n\}$

(4) (3) の結果から容易に求めることができる．

スペクトル分解

固有値と固有ベクトルの考え方が本質にあるので，このことについて簡単にまとめておく．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A\vec{p} = \lambda\vec{p} \quad \cdots ①$$

を満たすベクトル $\vec{p}\ (\vec{p} \neq \vec{0})$，スカラー λ が存在するとき，$\vec{p}$ を A の**固有ベクトル**，λ を A の**固有値**という．

① より $(A - \lambda E)\vec{p} = \vec{0}$ となり，$\vec{p} \neq \vec{0}$ であるから

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

は逆行列をもたないので

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

すなわち $$\boldsymbol{\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0} \quad \cdots ②$$

が成り立つ．② を A の**固有方程式**という．② の解を α，β とし，$\lambda = \alpha$ に対する固有ベクトルを $\vec{u}$，$\lambda = \beta$ に対する固有ベクトルを $\vec{v}$ とすると

$$A\vec{u} = \alpha\vec{u} \quad \cdots ③$$
$$A\vec{v} = \beta\vec{v} \quad \cdots ④$$

このとき，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{\alpha \neq \beta \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} \not\parallel \vec{v}} \qquad \cdots (*)$$

証明 $\vec{u}/\!/\vec{v}$ と仮定すると，零でないスカラー k を用いて $\vec{v} = k\vec{u}$ と表すことができるので，これを ④ に代入すると

$$A(k\vec{u}) = \beta(k\vec{u})$$

$k \neq 0$ より $$A\vec{u} = \beta\vec{u} \quad \cdots ⑤$$

③，⑤ から，$(\alpha - \beta)\vec{u} = \vec{0}$ を得る．これは，$\alpha \neq \beta$，$\vec{u} \neq \vec{0}$ に反するので，$(*)$ が成り立つ． 証終

行列 A が異なる 2 つの固有値 α，β をもつとき，固有値 α に対する固有ベクトルを $\vec{u}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$，固有値 β に対する固有ベクトルを $\vec{v}$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ とする．

このとき，2 つの 1 次変換を表す行列 F，G を

$$F\vec{u} = \vec{u}, \quad F\vec{v} = \vec{0}, \quad G\vec{u} = \vec{0}, \quad G\vec{v} = \vec{v}$$

で定義すると，次が成り立つ．

$$F^2 = F, \quad G^2 = G, \quad FG = GF = O, \quad F + G = E, \quad A = \alpha F + \beta G$$

証明　$P = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$ とおくと，$\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ であるから，行列 P は正則である．

$$FP = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}，\ F^2P = F(FP) = F\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}$$

よって，$F^2P = FP$ であり，P は正則であるから　$F^2 = F$ ■

$$FGP = F(GP) = F\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix}$$

よって，$FGP = O$ であり，P は正則であるから　$FG = O$ ■

同様にして　$G^2 = G$，$GF = O$ ■

$$(F+G)P = FP + GP = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$$

よって，$(F+G)P = P$ であり，P は正則であるから　$F + G = E$ ■

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} \alpha\vec{u} & \beta\vec{v} \end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} \\ &= \alpha FP + \beta GP \\ &= (\alpha F + \beta G)P \end{aligned}$$

上式から，P は正則であるから，$A = \alpha F + \beta G$ ■　　**証終**

$\boldsymbol{A = \alpha F + \beta G}$ を A の**スペクトル分解**といい，この式の両辺を n 乗すると

$$\boldsymbol{A^n = \alpha^n F + \beta^n G}$$

なお，F，G は，$\alpha F + \beta G = A$，$F + G = E$ により

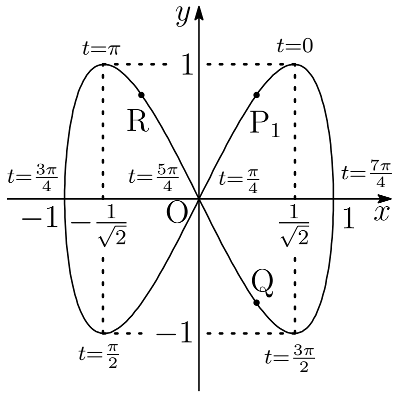
$$F = \frac{A - \beta E}{\alpha - \beta}, \qquad G = \frac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}$$

となり，$A = \alpha F + \beta G$ $(\alpha, \beta$ は A の固有値$)$ をみたす F，G は一意的に定まる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 III：微分法 (関数の増減)，積分法 (面積)

(1) $0 \leqq t < 2\pi$ において，$x(t) = 0$，$y(t) = 0$ を解くと，$t = \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4}$ である．

(2) $\frac{\pi}{4}$ ごとに動点 P の座標をとると，x 軸および y 軸に関する対称な点の座標がわかる．右の図のように，$t = t_1$ $(0 \leqq t_1 < \pi)$ に対する点を P_1 とし，x 軸および y 軸に関して P_1 と対称な点をそれぞれ Q，R とする．このとき，Q，R はそれぞれ $t = \frac{3\pi}{2} - t_1$，$t = t_1 + \pi$ に対応する点である．$\pi \leqq t_1 < 2\pi$ においても，変域に注意して に求めることができる．



(3) y を x の関数として表し，増減を調べグラフの概形を描く．

(4) (2) で示したでグラフの対称性に注意して，第 1 象限にある曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求め，それを 4 倍するとよい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 B：空間のベクトル (四面体の体積)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に垂直なベクトルを求める計算法に外積 (ベクトル積) がある．なお，外積は高校数学の範囲外であるが，空間ベクトルで登場する図形の面積および体積の計算にも利用することができる．外積について次のページに掲載した．

(2) 外積を知っていれば，(1) を利用して本題を解かせる問題構成も理解できる．

(3) $0 \leqq b \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq c \leqq 1$，$0 \leqq d \leqq 1$ であるから，a と b の間の関係式に注意しながら，計算する必要がある．

$$V = \frac{bc + (a-b)d}{6}$$

において，$b \geqq 0$，$a - b \geqq$ であることに注意して場合分けを行う．

i) $b > 0$，$a - b > 0$ のとき　$V \leqq \dfrac{b\cdot 1 + (a-b)\cdot 1}{6} = \dfrac{a}{6} \leqq \dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V \leqq \dfrac{1}{6}$　(等号は $a = 1,\ 0 < b < 1,\ c = 1,\ d = 1$ のとき)

ii) $b = 0$ のとき　$V = \dfrac{ad}{6} \leqq \dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V \leqq \dfrac{1}{6}$　(等号は $a = 1,\ 0 \leqq c \leqq 1,\ d = 1$ のとき)

iii) $a - b = 0$ のとき　$V = \dfrac{bc}{6} \leqq \dfrac{1}{6}$

ゆえに　$V \leqq \dfrac{1}{6}$　(等号は $b = c = 1,\ 0 \leqq d \leqq 1$ のとき)

外積 (ベクトル積)

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積 (ベクトル積)** と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表し (内積をスカラー積とも言う)，その成分は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\ &= ({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

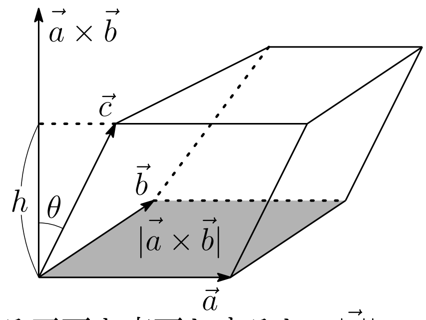
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

補足　本題 (2) で，$\vec{a}=(a,\ b,\ 0)$，$\vec{b}=(c,\ 0,\ d)$，$\vec{c}=(1,1,1)$ とすると

$$\vec{a}\times\vec{c}=(b,-a,\ a-b),\quad (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=bc+(a-b)d$$

よって，四面体の体積 V は　$V=\dfrac{1}{6}|bc+(a-b)d|$

$\boxed{5}$ 数学 A：確率 (余事象の確率)，数学 C：確率分布 (2 項分布)

(1) まず個別の事例について考え，全体的な場合の数を求めればよい．

(2) 色の変化が 1 回も起きない場合，および色の変化が 1 回だけ起きる場合の確率を考える．求める確率は，これらの余事象の確率である．

(3) 色の変化する場所を選ぶ組合せとして考えるとよい．

(4) (3) の結果に次式を適用するだけである．

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n \cdot 2^{n-1}$$

3.5　2005 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 III：微分法 (接線の方程式)，積分法 (回転体の体積)

(1) $y = 2\sin x\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ の接線の傾きが 1 となる直線は 2 本あるが，$a \geqq 0$ に注意して a の値を求める.

(2) 円錐の体積から曲線と x 軸で囲まれた部分の回転体の体積を引けばよい.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 C：行列 (行列の n 乗)

(1) $\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ より　$(E - A)\vec{p} = \vec{b}$
このとき，$E - A$ は正則であることから $\vec{p}$ を求めることができる.

(2) $\vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n + \vec{b}$ および (1) の $\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ から求める.

(3) A にハミルトン·ケーリーの定理を適用し，$B = A - \frac{1}{2}E$ とおくと，$B^2 = O$
$A = \frac{1}{2}E + B$ より，$A^n = (\frac{1}{2}E + B)^n$ に二項定理を適用すればよい.

(4) (2)，(3) の結果を利用すればよい.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 II：複素数と方程式 (2 次方程式の虚数解)，旧課程：複素数平面 (極形式)

(1) 判別式 < 0 であることに注意して，解の公式を利用する.

(2) 円の方程式で表す.

(3) 極形式を用いる.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 II：三角関数 (三角不等式)，指数関数と対数関数 (対数不等式)

(1) ガウス記号について，$[x] \leqq 2$ ならば $x < 3$ であることに注意する.

(2) ガウス記号について，$[x] \geqq 1$ ならば $x \geqq 1$ であることに注意する.

(3) 緻密な場合分けを要する問題.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数学 III：微分法 (グラフの概形，中間値の定理)，積分法 (面積)

(1) 置換積分法を用いる基本題.

(2) 増減および変曲点を示す基本題.

(3) (1) の結果に中間値の定理を用いる基本題.

3.6　2006年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 III：極限 (はさみうちの原理)，微分法 (方程式の解と関数のグラフ)

(1) グラフの増減および $\frac{1}{3n} \leqq \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$ より明らか．

(2) $f(1) < f(\alpha_n) < f(e^{\frac{1}{n}})$ および $f(ne) > f(\beta_n)$ を示す．また，α_n の極限については，はさみうちの原理を用いる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 B：平面上のベクトル (位置ベクトル，内積)

(1) **(別解)** △ABM および直線 OP にメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OM}}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QA}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QA}} = 1$$

したがって　$\mathrm{AQ} : \mathrm{QM} = 2\alpha : 1-\alpha$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\alpha\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{2\alpha + (1-\alpha)} = \dfrac{(1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}}{1+\alpha}$

(2) 内積および垂直条件を利用する．

(3) (2) の結果から簡単に導くことができる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 B：数列 (数学的帰納法，背理法)

(1) (数学的帰納法) 3 で割り切れる数 a_k，3 で割り切れない数 b_k を

$$a_k = 3M,\quad b_k = 3N \pm 1 \quad (M,\ N \text{ は整数})$$

とおいて証明する．

(2) (背理法) $2 \leqq n \leqq m$ のとき，a_n と b_n は互いに素であるが，a_{m+1} と b_{m+1} は素数 p を約数にもつと仮定し ($p \geqq 3$)，矛盾を導く．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 II：三角関数 (三角関数のグラフ)，数学 III：積分法 (三角関数の積分)

(1) $\left|\sin x - \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{2} = 0$ を解けばよい．

(2) 区間による場合分けを行い，グラフの概形を描く．

(3) 区間による場合分けを行い，定積分を行う．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数学 III：関数 (ロジスティック写像)

(1) 区間 $[0,\ 1]$ において，$0 \leqq f(x) \leqq 1$ であることを示せばよい．

(2) ロジスティック写像 (Logistic map) をテーマとした出題である．正攻法では示すことはできないので，背理法を用いて証明する．

3.7　2007 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 III：微分法 (接線の方程式，関数の増減)，積分法 (面積)

(1) $f''(x) = (x+2)e^x$ であるから，$x \geqq 0$ において，$f''(x) > 0$ である．したがって，$y = f(x)$ は，$x \geqq 0$ において下に凸である．$p \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 $y = g(x)$ は，接点以外の点において，$y = f(x)$ の下側にあることがわかる [1]．

(2) (1) の結果から，p の関数 $S(p)$ の増減を調べればよい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 C：行列 (行列の漸化式)

(1) A_2，A_3 の計算は定義式により計算する基本題．

(2) $A_2 - A_1$，$A_3 - A_2$ の結果により，$A_{n+1} - A_n$ を推測し，数学的帰納法を用いて証明する．これから A_n，Δ_n およびその極限値を求める．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 B：空間のベクトル (四面体の体積の最大値)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，ベクトルの成分による内積を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ を示す．また DC は，C から AB に下ろした垂線の長さであるから，$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC}$ である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ の内積から $\cos\theta$，これから $\sin\theta$ を求める．$\mathrm{OH}\perp\alpha$，$\mathrm{DO}\perp\mathrm{AB}$ であるから，三垂線の定理により，$\mathrm{DH}\perp\mathrm{AB}$ であることがわかるが，三垂線の定理は，現行の教育課程では扱っていない．

(3) P は HO の延長と球面 S の交点である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 A：確率 (さいころの目を係数とする 2 次方程式)

(1) このとき $b^2 - 4ac > 0$ であるから，$ac < \dfrac{b^2}{4} \leqq \dfrac{6^2}{4} = 9$
したがって，ac のとりうる値は　1，2，3，4，5，6，8

(2) (1) の結果を利用し，$b^2 - 4ac$ が平方数となる $(a,\ b,\ c)$ の組を求める．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数学 II：三角関数 (三角関数の基本周期)

(1) $x = 0$ のときに成り立つ結果 $p = \pi$ は必要性であり，これがすべての x についても成り立つことを示めさなければならない (十分性)．

(2) $f(-x) = -f(x)$ を示し，これに $x = \dfrac{p}{2}$ を代入する．また，$f(x+p) = f(x)$ であるから，これに $x = -\dfrac{p}{2}$ を代入する．得られた 2 式から結論を導く．

(3) (2) の結論を元に緻密な論証が要求される問題である．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2007.pdf (p.4 を参照)

3.8 2008年度

$\boxed{1}$ 数学 III：関数 (逆関数)，極限 (極限値)，

(1) 関数 $f(x)$ は，単調増加である．曲線 $y = f(x)$ の漸近線は2直線 $y = 0$，$y = 1$ である．

(2) $f(x)$ は増加関数であるから，逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する．

(3) (2) の結果および $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ の極限値を利用する．

$\boxed{2}$ 数学 A：確率 (カードの得点の確率とその期待値)

(1) 得点が1であるためには，1回目に2から k までのいずれかの番号を引かなければならない．

(2) $n \leqq k$ と $k < n$ の場合に分けて求める．

(3) (1)，(2) の結果を利用して，その期待値を求める．

$\boxed{3}$ 数学 B：平面上のベクトル (面積比と線分の比)

(1) $\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = \triangle\mathrm{OAP} : \triangle\mathrm{OBP} = a : b$

(2) $\mathrm{OQ} : \mathrm{OP} = \triangle\mathrm{OAB} : \triangle\mathrm{OAP} + \triangle\mathrm{OBP} = a + b - c : a + b$

(3) $\triangle\mathrm{OAP} : \triangle\mathrm{OBP} : \triangle\mathrm{ABP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot r : \dfrac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot r : \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot r = \mathrm{OA} : \mathrm{OB} : \mathrm{AB}$

$\boxed{4}$ 数学 III：微分法 (2曲線の共通接線)，積分法 (面積)

(1) 接点の x 座標を p とおくと，$f(p) = g(p)$，$f'(p) = g'(p)$

(2) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと，$h(x)$ は単調減少で，$h(2) = 0$ である．

(3) **(別解)** $y = f(x)$，$y = g(x)$ は，それぞれ $x = 2e^{y-1}$，$x = y^2 + 1$ $(y \geqq 0)$

$$S = \int_0^1 \{(y^2+1) - 2e^{y-1}\}dy = \left[\ \frac{y^3}{3} + y - 2e^{y-1}\ \right]_0^1 = \frac{2}{e} - \frac{2}{3}$$

$\boxed{5}$ 数学 II：三角関数 (円に外接する半径の異なる円の個数)

(1) $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{3}{5}$ から $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{4}{5}$．これらを $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ に代入する．

(2) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{5} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より　$\sin\dfrac{\pi}{6} < \sin\dfrac{\theta}{2} < \sin\dfrac{\pi}{4}$　ゆえに　$\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{4}$

(3) $\cos\dfrac{\theta}{2} < \sin\dfrac{\pi}{5}$ を示すことにより　$\dfrac{\theta}{2} > \dfrac{\pi}{5}$

これと (2) の結果から　$\dfrac{2}{5}\pi < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

3.9　2009 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 B：平面上のベクトル (定点と半直線上の点との距離の最小値)

(1) C は点 O を通り，直線 AB に垂直な直線を求め，これと AB との交点を求めてもよい．また，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ の s，t を用いた成分表示により求まる．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を t について平方完成し，場合分けによりその最小値を求める．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 A：確率 (n 枚のカード和が偶数となる確率)

(1) 2 回の操作で記録された 2 個の数の和が偶数となるのは，2 回とも偶数のカードまたは 2 回とも奇数のカードを取り出す場合である．

(2) 基本的な漸化式の問題．

(3) k の偶数，奇数による場合分けを行う．

(4) p_n の漸化式を M，N で表し，k の偶数，奇数による場合分けを行う．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 III：微分法 (法線群の包絡線)，積分法 (面積)

(1) A は $b \to a$ による R の極限の位置．

(2) A の表す軌跡 C_2 は，C_1 の法線群の包絡線である (曲率中心と一致)．

(3) y 軸に関して対称であることに注意して，その面積を求める．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 C：行列 (単位ベクトルの 1 次変換)

(1) 背理法を用いて証明する．

(2) X，Y の大きさは 1 で，$Y \neq X$，$Y \neq -X$ であるから

$$Y \nparallel X \quad \text{ゆえに} \quad \det(X\ Y) \neq 0$$

(3) (2) の結果および X，Y の線形独立性を利用する．

(4) $X + Y = -Z$ であるから，内積を利用して求める．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数学 III：微分法 (曲線上の動点の速度 (加速度) ベクトル)

(1) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = e^x\dfrac{dx}{dt}$ であるから

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt},\ e^x\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}(1,\ e^x)$$

$|\vec{v}| = 1$ であるから　$\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}(1,\ e^x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}},\ \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)$

(2) $\vec{\alpha}$ は $\vec{v}$ をを t で微分する．

(3) (2) の結果から x の関数 $|\vec{\alpha}|$ の極値を求める．この極値をとる点を頂点といい，解説を 189 ページに示した．

曲率中心

(2) で求めた C_2 は，C_1 の法線群の包絡線である．一般に $C_1 : y = f(x)$ とすると，2 点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$ における法線の方程式は $(u \neq t)$，それぞれ

$$(x-t)+f'(t)(y-f(t))=0, \quad (x-u)+f'(u)(y-f(u))=0$$

であり，これから

$$x+f'(t)y=t+f'(t)f(t) \quad \cdots ①, \quad x+f'(u)y=u+f'(u)f(u) \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$\begin{aligned}\{f'(u)-f'(t)\}y &= u-t+f'(u)f(u)-f'(t)f(t) \\ &= u-t+f'(u)\{f(u)-f(t)\}+f(t)\{f'(u)-f'(t)\}\end{aligned}$$

$u \neq t$ であるから，両辺を $u-t$ で割ると

$$\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}y = 1+f'(u)\cdot\frac{f(u)-f(t)}{u-t}+f(t)\cdot\frac{f'(u)-f'(t)}{u-t}$$

$u \to t$ とすると　　$f''(t)y = 1+\{f'(t)\}^2+f(t)f''(t)$

$f''(t) \neq 0$ のとき　　$y = f(t)+\dfrac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

これを ① に代入すると　$x = t-\dfrac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$

よって，t を変数として次の $(x,\ y)$ が描く軌跡が C_2 である．

$$x = t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}, \qquad y = f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

上で求めた $(x,\ y)$ は P における曲率円 (接触円) の中心でもある．P における曲率円とは，曲線上の 3 点 P，Q，R について，Q，R が曲線上を P に限りなく近づくときに占める極限の位置の円である．その中心を**曲率中心**という．
C_1 上の 3 点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(u,\ f(u))$，$\mathrm{R}(v,\ f(v))$ とする $(t<u<v)$．3 点 P，Q，R を通る円を $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2-r^2=0$ とすると

$$\begin{aligned}(t-c_1)^2+\{f(t)-c_2\}^2-r^2&=0 \\ (u-c_1)^2+\{f(u)-c_2\}^2-r^2&=0 \\ (v-c_1)^2+\{f(v)-c_2\}^2-r^2&=0\end{aligned}$$

ここで，$g(s)=(s-c_1)^2+\{f(s)-c_2\}^2-r^2$ とおくと　　$g(t)=g(u)=g(v)=0$

$g(t)=g(u)$ であるから，ロル (Rolle) の定理により

$$g'(t_1)=0 \quad (t<t_1<u)$$

を満たす t_1 が存在する．同様に，$g(u)=g(v)$ であるから

$$g'(t_2)=0 \quad (u<t_2<v)$$

を満たす t_2 が存在する．$g'(t_1)=g'(t_2)$ であるから，さらにロルの定理を用いると

$$g''(t_3)=0 \quad (t_1<t_3<t_2)$$

を満たす t_3 が存在する．Q，R が P に限りなく近づくとき，$u\to t$，$v\to t$ となるから，上の諸式において

$$g(t)=0,\quad g'(t)=0,\quad g''(t)=0$$

$g'(s)$，$g''(s)$ は

$$\begin{aligned} g'(s)&=2(s-c_1)+2f'(s)\{f(s)-c_2\} \\ g''(s)&=2+2f''(s)\{f(s)-c_2\}+2\{f'(s)\}^2 \end{aligned}$$

$g'(t)=0$，$g''(t)=0$ であるから

$$(t-c_1)+f'(t)\{f(t)-c_2\}=0,\quad 1+\{f'(t)\}^2+f''(t)\{f(t)-c_2\}=0$$

上の第 2 式から　　$c_2-f(t)=\dfrac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$

これを第 1 式に代入すると　　$c_1-t=-\dfrac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)}$

上の 2 式を $g(t)=0$ に代入することにより，曲率円の半径 r は

$$r^2=\frac{(1+\{f'(t)\}^2)^3}{\{f''(t)\}^2}\quad \text{ゆえに}\quad r=\frac{(1+\{f'(t)\}^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}$$

よって，曲線の P における曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ は

$$c_1=t-\frac{f'(t)(1+\{f'(t)\}^2)}{f''(t)},\qquad c_2=f(t)+\frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

曲率中心 $(c_1,\ c_2)$ の描く軌跡を縮閉線といい，曲線の法線群の包絡線と一致することがわかる．

曲線の弧長 s に対する接線の向きの変化率を曲率といい，曲率 κ は，次式で定義される．

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

点 $(x,\ y)$ における接線が，x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$y' = \tan\theta$$

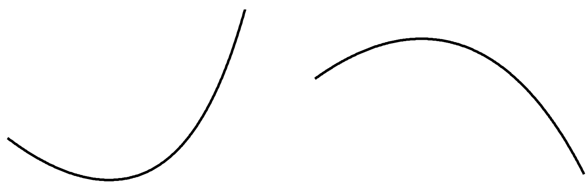
これを θ について，微分することにより

$$y''\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (y')^2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1 + (y')^2}$$

また，$\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}$ であるから，$\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$ より

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = \frac{y''}{1 + (y')^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y''}{\{1 + (y')^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

曲率 κ の逆数 $\dfrac{1}{\kappa}$ を曲率半径という．曲率円の半径は曲率半径の絶対値に等しい．
$\kappa > 0$ すなわち $y'' > 0$ のとき下に凸，$\kappa < 0$ すなわち $y'' <$ のとき上に凸である．
変曲点は曲率の符号が変わる点であり，頂点は曲率が極値をとる点である．



$\kappa > 0$　　　　$\kappa < 0$

頂点

時刻 t における曲線上の点 P の座標を $(x(t),\ y(t))$ とし，$\dot{x}=x'(t)$，$\dot{y}=y'(t)$，$\ddot{x}=x''(t)$，$\ddot{y}=y''(t)$ と書くことにする．

P における接線の x 軸の正の向きとなす角を θ とすると　$\tan\theta=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$

この式の両辺を t について微分すると

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{d\theta}{dt}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

また，$\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ であるから，曲率 κ は

$$\kappa=\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

曲線の P における単位接ベクトル ξ_1 を

$$\xi_1=\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)$$

とし，ξ_1 を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた単位法ベクトルを ξ_2 とすると

$$\xi_2=\left(-\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\ \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)$$

ξ_1 を t で微分すると

$$\dot{\xi}_1=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}(-\dot{y},\ \dot{x})=\kappa\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\xi_2$$

$\vec{v}=(\dot{x},\ \dot{y})=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\xi_1$ を t で微分すると

$$\vec{\alpha}=\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\xi_1+\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\dot{\xi}_1=\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\xi_1+\kappa|\vec{v}|^2\xi_2$$

P が等速運動であるとき

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=0\quad\text{ゆえに}\quad\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=0\quad(\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=0)$$

このとき，$\vec{\alpha}=\kappa|\vec{v}|^2\xi_2$ が成り立つ．曲線の曲率半径を r とすると，$\kappa=\dfrac{1}{r}$ であるから，力学の加速度の公式 $\alpha=\dfrac{v^2}{r}$ が導かれる．なお加速度の向きは速度ベクトルに垂直である．とくに P が $|\vec{v}|=1$ の等速運動を行うとき，$\vec{\alpha}$ の大きさは曲率の大きさに等しい．$\boxed{\mathbf{5}}$ (3) で $|\vec{\alpha}|$ が極値をとる点を求めたことで，曲線上の頂点を求めたことになる．

3.10　2010年度

$\boxed{1}$ 数学 I：三角比 (余弦定理)

(1) △ABC について余弦定理により $\cos A$ を求め，これを △ACP に適用する．

(2) CP $= a$ を (1) の結果に代入し，$t \geqq 0$ に注意して t の値を求める．

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に (2) の条件を満たす t が 2 個あるための必要条件は，$b \geqq a$ である ($B \geqq A$)．

$\boxed{2}$ 数学 A：確率 (さいころを振ったときの得点の期待値)

(1) 表を完成し，期待値を求める．

(2) 1 回目に 6 の目が出た場合は，2 回目に関係なく 6 点として表を完成し，期待値を求める．

(3) 最初の目が n 以上であるとき ($1 \leqq n \leqq 6$)，2 回目を振らないとすると，そのときの得点の期待値を $E(n)$ とおく．たとえば，最初の目が 4 以上のとき，2 回目を振らないときの期待値 $E(4)$ は

1 回目が 4 点以上のとき

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	4	4	4	4	4	4
	5	5	5	5	5	5	5
	6	6	6	6	6	6	6

$$\begin{aligned}E(4) =& \frac{1}{36}\{(2+3+4+5+6)\\&+(3+4+5+6)\\&+(4+5+6)+6(4+5+6)\}\end{aligned}$$

したがって

$$E(4) = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{3}\{(k+1)+(k+2)+\cdots+6\} + \frac{1}{6}\sum_{k=4}^{6}k$$

一般に，$E(n)$ は ($1 \leqq n \leqq 6$)

$$E(1) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k$$

$$E(n) = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+1)+(k+2)+\cdots+6\} + \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{6}k \quad (2 \leqq n \leqq 6)$$

実際，$1 \leqq n \leqq 6$ であるから，個別に $E(n)$ を求めることも可能である．

$$E(2) = \frac{140}{36},\ E(3) = \frac{146}{36},\ E(4) = \frac{143}{36},\ E(5) = \frac{130}{36}$$

なお，$E(1)$ は (1) で，$E(6)$ は (2) で求めている．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 III：極限 (無限等比級数)，微分法 (接線の方程式)

(1) 曲線上の接点 Q_1 の x 座標を b とし，この接線と曲線の共有点が $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ であることから ($a \neq b$)，a と b の関係式を導かれる．

(2) (1) の結果から，P_2 の x 座標は $4a$

(3) (2) の結果を元に，S_n は導かれる．

(4) 数列 $\{S_n\}$ は公比が $\frac{1}{4}$ の等比数列である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 III：積分法 (サイクロイド，面積，弧長)

(1) 教科書にある典型的な問題．

(2) 置換積分法を用いて求める．

(3) 弧長は，学習指導要領の範囲外の内容であるが，数学 III の教科書の巻末に発展学習として扱われている．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数学 C：行列 (1 次変換)，2 次曲線 (2 次曲線の分類)

(1) 放物線から放物線全体に変換される一般的な問題．

(2) 放物線から円 (楕円) 全体に変換されることはない (次のページで解説)

(3) $\det(A) = 0$ であることを示すと，A の固有値が求められ，その固有ベクトルが，L の方向ベクトルである．

$P(t,\ t^2)$ の A による像

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + bt^2 \\ ct + dt^2 \end{pmatrix}$$

について，$at+bt^2$，$ct+dt^2$ が t の 2 次式であれば，その変域には最大値または最小値があり，L<u>全体</u> を動かない．L<u>全体</u> を動くためには，$b = d = 0$ であり，同時に

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の単位固有ベクトル u_1，u_2 は直交するから (173 ページを参照)，これらを基底とする座標変換を用いることで，$ax^2 + 2bxy + cy^2$ について次の定理 1 が成り立つ．

定理 1

u_1，u_2 を A の単位固有ベクトルとする．

基底の変換　$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Xu_1 + Yu_2$　　$(x, y, X, Y$ は実数$)$

すなわち　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ により次が成り立つ．

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$$

証明　$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$　から　$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}$

したがって

$$\begin{aligned}
ax^2 + 2bxy + cy^2 &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Au_1 & Au_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2
\end{aligned}$$

証終

定理 2

2 次曲線 $ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0$ を次のようにかくと

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+r=0$$

このとき $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおくと $\det(A)=ac-b^2$

この 2 次曲線について，次が成り立つ．

$$\begin{array}{lcl} \text{楕円} & \Longrightarrow & \det(A)>0 \\ \text{放物線} & \Longrightarrow & \det(A)=0 \\ \text{双曲線} & \Longrightarrow & \det(A)<0 \end{array}$$

証明 行列 A の固有方程式 $\lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2)=0$ の解と係数の関係により

$$\lambda_1\lambda_2=\det(A)$$

これと定理 1 の結果から明らか． **証終**

注意 定理 2 において，逆は必ずしも成り立たない．たとえば $x^2+y^2+1=0$ は $\det(A)>0$ であるが ϕ．$x^2-y^2=0$ は $\det(A)<0$ であるが 2 直線．

正則でない 1 次変換の像は，定直線上にあるので，1 次変換を表す行列 P によって曲線から曲線全体に移されるためには P は正則である必要がある．
P による $(x,\ y)$ の像を $(X,\ Y)$ とし，$Q=P^{-1}$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}{}^tQ$$

定理 2 の 2 次曲線の 2 次形式について

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}{}^tQAQ\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$\det({}^tQ)=\det(Q)$ に注意すると

$$\det({}^tQAQ)=\det({}^tQ)\det(A)\det(Q)=\det(A)\{\det(Q)\}^2$$

Q は正則であるから，$\det({}^tQAQ)$ の符号と $\det(A)$ の符号は一致する．すなわち，1 次変換により移された 2 次曲線の種類はもとの 2 次曲線の種類と一致する．
したがって，$\boxed{\mathbf{5}}$(1) のように放物線から放物線全体に移ることはあるが，$\boxed{\mathbf{5}}$(2) のように放物線から楕円 (円も含む)<u>全体</u> に移ることはない．

3.11　2011年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学III：積分法 (無理関数と面積)

(1) 基本題

(2) △PQHの面積を求め，S_1 の面積を求める．

(3) S_2 は簡単に求まる．これと (2) の結果を利用する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学III：微分法 (関数のグラフと方程式の解の個数)

(1) 基本題

(2) x^3e^{-x} が $x \geqq 3$ で単調減少であることを示す．これから，$x > 3$ のとき $0 < x^2e^{-x} \leqq \dfrac{27e^{-3}}{x}$ であるから，はさみうちの原理により示される．

(3) $y = f(x)$ と $y = k$ の共有点の個数が3個となる a と k の関係式を求める．a の値により場合分けを行う．このとき $a = 1$ は i)，ii) のどちらかに含めればよい．したがって，次のように解答してもよい．

i) $\boldsymbol{0 < a < 1}$ **のとき**　$\boldsymbol{-2(a-1)e^a < k < 2(a+1)e^{-a}}$

ii) $\boldsymbol{1 \leqq a}$ **のとき**　$\boldsymbol{0 < k < 2(a+1)e^{-a}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学B：数列 (周期関数とフェルマーの小定理)

フェルマーの小定理

p を素数，n と p が互いに素であるとき，$n^{p-1} - 1$ は p の倍数である．

証明 p を素数とする．2項定理により

$$(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{j=1}^{p-1} {}_p\mathrm{C}_j a^{p-j} b^j$$

${}_p\mathrm{C}_j$ $(1 \leqq j \leqq p-1)$ は p の倍数であるから，a，b が整数であるとき，上式は p の倍数である．k が整数のとき，$a = k-1$，$b = 1$ とし，数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k = k^p - (k-1)^p - 1$$

とおく．この数列の初項から第 n 項までの和を求めると

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$$

a_k は p の倍数であるから，n と p が互いに素であるとき，$n^{p-1} - 1$ は p の倍数である．

証終

定理

$n^e - 1$ が素数 p で割り切れる最小の自然数 e は，$p-1$ の約数である．

証明 $p-1$ を e で割ったときの商を q，余りを r とすると $(0 \leqq r < e)$

$$p - 1 = eq + r$$

したがって

$$n^{p-1} - 1 = n^{eq+r} - 1 = (n^e)^q n^r - 1 = \{(n^e)^q - 1\}n^r + n^r - 1 \quad \cdots (*)$$

$n^e - 1$ が素数 p で割り切れるとき，整数 k を用いて

$$n^e - 1 = pk \quad \text{ゆえに} \quad n^e = pk + 1$$

このとき，$(n^e)^q - 1 = (pk+1)^q - 1$ は p で割り切れる．

ゆえに，$(*)$ およびフェルマーの小定理により $n^r - 1$ は p で割り切れる．

$0 < r < e$ ならば，r が $n^e - 1$ が p で割り切れる最小の自然数 e に反する．

したがって，$r = 0$ となる．よって，$n^e - 1$ が p で割れる最小の自然数 e は $p-1$ の約数である．　**証終**

(1) $a_n = \tan\theta_n$ とすると　$\tan\theta_{n+1} = \tan 2\theta_n$

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$ とおくと　　$a_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\cdot 2^{n-1}\right) = \tan\dfrac{2^{n-2}}{3}\pi$

(2) $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ は，(3) の $\dfrac{\pi}{20} = \dfrac{\pi}{2^2} - \dfrac{\pi}{5}$ の布石である．

(3) $n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \tan\left(\frac{\pi}{20}\cdot 2^{n-1}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2^2} - \frac{\pi}{5}\right)2^{n-1} \\ &= \tan\left(2^{n-3}\pi - \frac{2^{n-1}}{5}\pi\right) = -\tan\frac{2^{n-1}}{5}\pi \end{aligned}$$

同様に　$a_{n+k} = -\tan\dfrac{2^{n+k-1}}{5}\pi$

ゆえに　$\dfrac{2^{n+k-1}}{5}\pi - \dfrac{2^{n-1}}{5}\pi = 2^{n-1} \times \dfrac{2^k - 1}{5}\pi$

フェルマーの小定理により，$2^4 - 1$ は 5 の倍数であり，求める最小の自然数 k は，4 の約数である．したがって，数列 $\{a_n\}$ $(n \geqq 3)$ は高々 4 項の繰り返しであるから，この結果を知っていれば安心して問題に取り組むことができる．ちなみに，(1) では

$$\frac{2^n}{3}\pi - \frac{2^{n-2}}{3}\pi = 2^{n-2} \times \frac{2^2 - 1}{3}\pi$$

であるから，フェルマーの小定理により $2^2 - 1$ が 3 の倍数で，$n \geqq 2$ において 2 項の繰り返しであることがわかる．

$\boxed{4}$ 数学 B：空間のベクトル (点と平面の距離，四面体の体積)

(1) 基本題

(2) 3 点 A，B，C を通る平面を α とする．(179 ページを参照)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,-2,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 0,-3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(6,\ 3,\ 2)$$

α の法線ベクトルを $\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\alpha$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，すなわち，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ であるから，α の方程式は

$$6x+3(y-2)+2(z-3)=0 \quad ゆえに \quad 6x+3y+2z-12=0$$

一般に，平面の方程式は次のように表すことができる (171 ページを参照).

平面の方程式とその法線ベクトル

平面の方程式の一般形は　$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0}$

また，その法線ベクトルは　$\boldsymbol{\vec{n}=(a,\ b,\ c)}$

点 $\mathrm{D}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ から平面 $\alpha: ax+by+cz+d=0$ に垂線を引き，交点を $\mathrm{F}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とする．F は α 上にあるから

$$ax_2+by_2+cz_2+d=0 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ は，α の法線ベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ と平行であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=t\vec{n} \quad \cdots ②$$

と表せるから　$(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)=t(a,\ b,\ c)$

ゆえに　$x_2=x_1+at,\ y_2=y_1+bt,\ z_2=z_1+ct \quad \cdots ③$

③ を ① に代入して，t について解くと　$t=-\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}$

上式および ② より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{DF}}|&=|t|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\\&=\left|-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

点と平面の距離

点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ から平面 $ax+by+cz+d=0$ に引いた垂線の長さは

$$\boldsymbol{\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

点 D$(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2})$ から平面 $6x+3y+2z-12=0$ に引いた垂線の長さは

$$\frac{|6\cdot\frac{1}{2}+3\cdot1+2\cdot\frac{3}{2}-12|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{3}{7}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(6,\ 3,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2})$ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=6\cdot\frac{1}{2}+3\cdot(-1)+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$$

よって，四面体 ABCD の体積 V は

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\frac{1}{6}|-3|=\frac{1}{2}$$

(2)，(3) では，外積 (ベクトル積) を用いた計算公式を紹介したが，これらを入試で利用することはできないが，答の確認に活用できる．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数学 A：確率 (カードの並べ替えの確率と期待値)

(1) 2 回とも同じ球の組合せである．

(2) 1 回目に $\{1,\ 4\}$，2 回目 $\{2,\ 3\}$ の球を取り出す場合と 1 回目に $\{2,\ 3\}$，2 回目に $\{1,\ 4\}$ を取り出す場合の 2 通りである．

(3) 次の 2 つの場合に分けて求める．

i) 1，2 回目ともに $\{1,\ k\}$ $(k=2,3,4)$ を取り出す場合

ii) 1，2 回目ともに 1 以外の球を取り出す場合

(4) 3 回目に左端が X となる確率を $P(X)$ とすると

$$P(2)=P(3)=P(4)$$

であることを利用する．

3.12　2012 年度

$\boxed{1}$ 数学 III：積分法 (回転体の体積)

パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

$a \leqq x \leqq b$ において $f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq 0$ である 2 曲線 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積を S，その重心の y 座標を h とすると

$$hS = \int_a^b \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} \times \{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

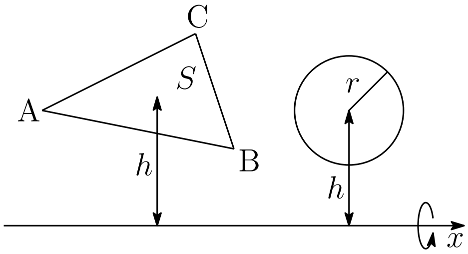
$\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$ は微小区間の面積，$\dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$ はその重心を表す．
この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}\{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx$$

よって，上の 2 式から　　$\boldsymbol{V = 2\pi hS}$
回転体の体積は，(回転による重心の軌跡の長さ) $\times$ (面積) である．

例 1 パップス・ギュルダンの定理を用いると，右の図の $\triangle$ABC の面積が S，x 軸から重心までの距離が h のとき，x 軸のまわりに 1 回転した立体の体積 V は

$$V = 2\pi hS$$

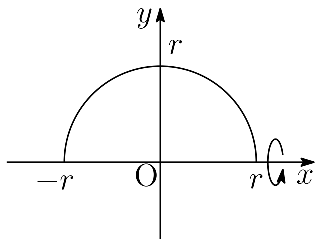


半径 r の円の中心と x 軸との距離が h のとき ($r < h$)，x 軸のまわりに 1 回転した立体 (solid torus) の体積 V は (torus は solid torus の表面)

$$V = 2\pi h \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 hr^2$$

図形の面積とその回転体の体積からその図形の重心を求めることができる．

例 2 右の半円は，y 軸に関して対称であるから，重心の x 座標は 0 である．また重心の y 座標 h は，x 軸のまわりに 1 回転すると，その立体 (球) の体積 $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ と半円の面積 $S = \dfrac{1}{2}\pi r^2$ により

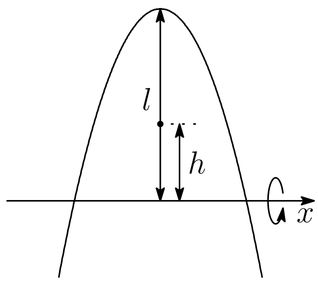


$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi h \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 \quad ゆえに \quad h = \frac{4r}{3\pi}$$

例 3 放物線と x 軸で囲まれた図形の重心は，その面積と x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を用いて求めることができる．右の図では

$$h = \frac{2}{5}l$$

となる．一般に，これと図形の面積 S によりその回転体の体積を求めることできる．

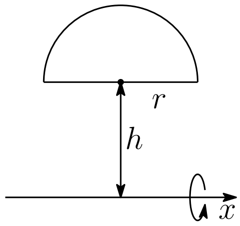


例 4 右の図の半円 $(r < h)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は，例 2 により x 軸から重心までの距離は

$$h + \frac{4r}{3\pi}$$

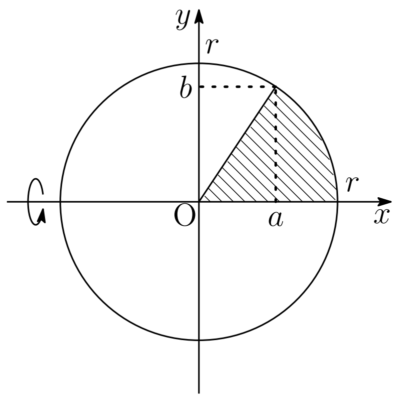
であるから，求める回転体の体積 V は

$$V = 2\pi\left(h + \frac{4r}{3\pi}\right)\cdot\frac{1}{2}\pi r^2 = \pi^2 hr^2 + \frac{4}{3}\pi r^3$$



例 5 右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積 V_1 は

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi b^2\cdot a + \pi\int_a^r (r^2 - x^2)dx \\ &= \frac{\pi}{3}(r^2 - a^2)a + \pi\left[\ r^2x - \frac{x^3}{3}\ \right]_a^r \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^2 a \end{aligned}$$

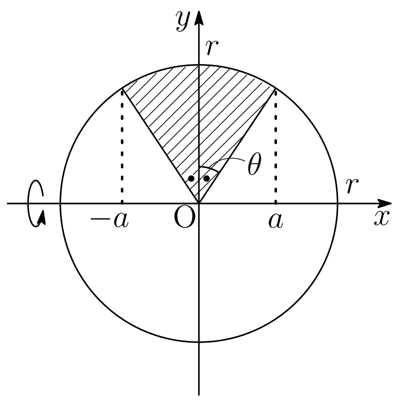


したがって，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積 V_2 は $(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2})$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2V_1 = \frac{4}{3}\pi r^2 a$$

斜線部分の面積を S，重心の y 座標を h とすると

$$S = \frac{1}{2}r^2\cdot 2\theta = r^2\theta$$
$$h = \frac{V_2}{2\pi S} = \frac{2a}{3\theta}$$



また，例5の下の図において，$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき，斜線部分の重心の y 座標を h とすると，斜線部以外の扇形の重心の y 座標は

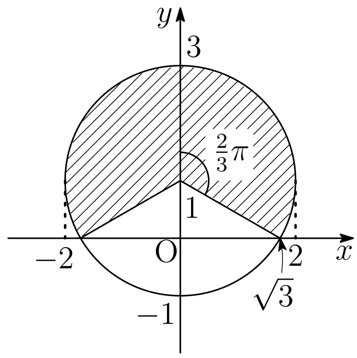
$$-\frac{2a}{3(\pi-\theta)}$$

したがって，斜線部および斜線部以外の図形をあわせた図形 (円) の重心は円の中心 (原点) であるから

$$r^2\theta \times h + r^2(\pi-\theta) \times \left\{-\frac{2a}{3(\pi-\theta)}\right\} = \pi r^2 \times 0$$

これを解いて　　$h = \dfrac{2a}{3\theta}$　　$\cdots(*)$

ゆえに，$(*)$ は，$0 < \theta \leqq \pi$ について成立する．



例 6 右の図形の面積 S は

$$S = 2 \times \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

$(*)$ から，その重心の座標 h は

$$h = 1 + \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\frac{2}{3}\pi} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

よって，斜線部分を x 軸の回りに1回転させた立体の体積は

$$2\pi h S = 2\pi\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) \times \frac{8}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi^2 + \frac{16\sqrt{3}}{3}\pi$$

また，3点 $(-\sqrt{3},\ 0)$，$(\sqrt{3},\ 0)$，$(0,\ 1)$ を頂点する三角形を x 軸のまわりに回転させた立体の体積は $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ であるから，円 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ を x 軸のまわりに回転させた立体の体積 V は

$$V = \left(\frac{16}{3}\pi^2 + \frac{16\sqrt{3}}{3}\pi\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi^2 + 6\sqrt{3}\pi$$

パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外である．入試では使用できないが，便利な検算法である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 C：行列 (A，B の積に関する循環群)

(1) 基本題

(2) $X = AB$ とおいて，ハミルトン・ケーリーの定理に適用すると

$$X^2 + X + E = O$$

したがって　$(X - E)(X^2 + X + E) = O$　ゆえに　$X^3 = E$

(3) (1) の結果 $A^2 = B^2 = E$ および (2) の結果 $ABABAB = E$ を利用する方法が設問の意図であるが，$AB + BA = -E$ を利用することもできる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 I：2 次関数 (関数のグラフと方程式の解)，
数学 III：極限 (数列の上限と下限)

(1) 関数 $y = x^2 + |x+1| + n - 1 \cdots$ ① のグラフと直線 $y = \dfrac{\sqrt{n}}{a}(x+1)$ の位置関係を調べる．

(2) (1) の結果

$$-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1} \quad \cdots (*)$$

から，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n = -\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}, \quad c_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$$

とおく．すべての n に対して $(*)$ が成立するとき，a の値の範囲は

$$\{b_n\} \text{ の上限} \leqq a \leqq \{c_n\} \text{ の下限}$$

であり，ここで

$$b_n = -\frac{1}{5} - \frac{3(\sqrt{n}-1)}{5(2\sqrt{n}+3)}, \quad c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\sqrt{n}-1)}$$

ゆえに，$\{b_n\}$ は上に有界で上限は $-\dfrac{1}{5}$，$\{c_n\}$ は下に有界で下限は $\dfrac{1}{2}$ である．

　なお，すべての n に対して，$b_n \leqq a$ が成り立つとき，a は $\{b_n\}$ の上界，$\{b_n\}$ は上に有界であるという．このとき，上界 a は無数にあり，とくに最小の上界を上限 (最小上界) という．

　また，すべての n に対して，$a \leqq c_n$ が成り立つとき，a は $\{c_n\}$ の下界，$\{c_n\}$ は下に有界であるという．このとき，下界 a は無数にあり，とくに最大の下界を下限 (最大下界) という．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 III：極限 (無理数を解とする有理方程式)

(1) 基本題

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ より，次の 2 つの場合分けを行う．

i) $|\alpha|>1$，$|\beta|>1$，　　ii) $|\alpha|<1$，$|\beta|<1$

(3) Q を有理数，$\sqrt{q}$ を無理数とするとき

$$Q[\sqrt{q}\,]=\{u+v\sqrt{q}\,|\,u,v\in Q\}$$

を考える．$x,\overline{x}\in Q[\sqrt{q}\,]$ を

$$x=u+v\sqrt{q}$$
$$\overline{x}=u-v\sqrt{q}$$

と定義すると，$k\in Q,\ x,y\in Q[\sqrt{q}\,]$ について，次の 3 式が成り立つ．

$$(*)\quad\begin{cases}\overline{k}=k\\ \overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}\\ \overline{xy}=\overline{x}\,\overline{y}\end{cases}$$

第 3 式から　$\overline{x^2}=(\overline{x})^2$,　さらに　$\overline{x^n}=(\overline{x})^n$　(n は自然数)．

例えば，$a,b,c,d\in Q$ である 3 次方程式

$$(**)\quad ax^3+bx^2+cx+d=0$$

の解が $z\in Q[\sqrt{q}\,]$ のとき，$az^3+bz^2+cz+d=0$ であるから，$(*)$ により

$$\overline{az^3+bz^2+cz+d}=\overline{0}$$
$$\overline{az^3}+\overline{bz^2}+\overline{cz}+\overline{d}=0$$
$$\overline{a}\,\overline{z^3}+\overline{b}\,\overline{z^2}+\overline{c}\,\overline{z}+d=0$$
$$a(\overline{z})^3+b(\overline{z})^2+c\overline{z}+d=0$$

これから $\overline{z}$ が $(**)$ の解であることが分かる．

> $(*)$ において，k を実数，x,y を複素数とし，x と $\overline{x}$ を互いに共役な複素数と考えても成り立つ．ゆえに，a,b,c,d を実数とするとき，$(**)$ の方程式が複素数 z を解にもつとき，共役な複素数 $\overline{z}$ も $(**)$ の解であることがわかる．なお，n 次方程式についてもこれらのことが成立する．

よって，有理数を係数とする 2 次方程式が $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を解にもつとき，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ もその方程式の解である．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数学 A：確率 (マルコフ連鎖)

(1) 基本題

(2) 問題の根底にある確率過程を理解していないと，計算の方向性を見極めることができない．それぞれの過程を正確に区分し，その確率過程を導き，ミスなく完答することは容易ではない．

解答で表した確率および行列を

$$P_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{9} & \frac{11}{18} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

とおくと，$P_{n+1} = AP_n$ である．つまり，P_{n+1} が P_n によって定まる (1 つ前の時点だけを考慮する)．このような確率過程をマルコフ連鎖 (Markov chain) という．また，z_3 は，$P_3 = A^2P_1$ によって求めることもできる．

3.13 2013 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 III：極限 (極限値)，積分 (面積)

(1) C_1 と C_1 上の $y=0$ および $y=a$ における 2 接線で囲まれた部分の面積である．次の九大 2009 年一般前期文系数学$\boxed{\mathbf{4}}$の補足を参照．

http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\tan\theta(a)=0$ を示し，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\theta(a)=0$ を利用する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 B：空間のベクトル (平面に垂直なベクトル)

直線 PQ の方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\times\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ に平行である．179 ページの外積 (ベクトル積) を参照．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 A：場合の数と確率 (確率，期待値)

(1) 基本題

(2) 6×6 通りの場合について調べ上げてもよい．

(3) この操作により，すべての硬貨が表となるとき，L，R の操作が終わった時点での硬貨の表・裏の並びに着目する．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 III：積分 (回転体の体積)

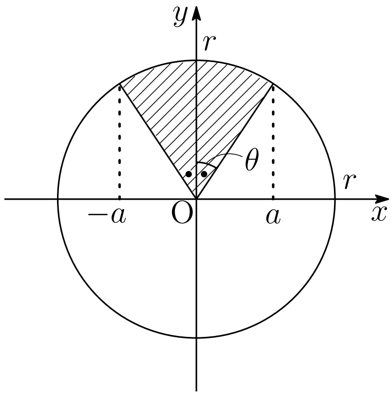
(1) 円 T の半径を r とすると，D の座標は r で表される．

(2) S，T のグラフを y 軸方向に $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ だけ平行移動した図形を考える．

準備

パップス・ギュルダンの定理に関して，199 ページの例 5 の結果から，右の図の斜線部分の重心の y 座標 h は

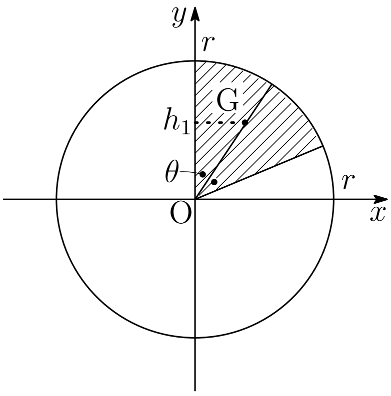
$$h = \frac{2a}{3\theta} = \frac{2r\sin\theta}{3\theta}$$

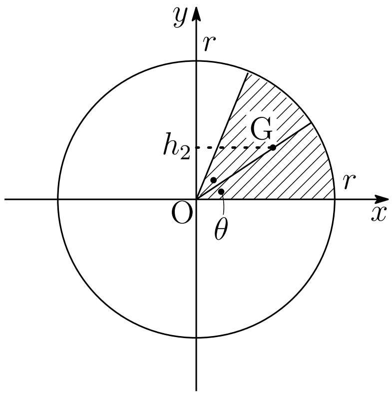


次の 2 つの図形の重心を G とすると，$\mathrm{OG} = h$ であるから，これらの重心 G の y 座標は

$$h_1 = h\cos\theta = \frac{2r\sin\theta}{3\theta}\cos\theta = \frac{r\sin 2\theta}{3\theta}$$

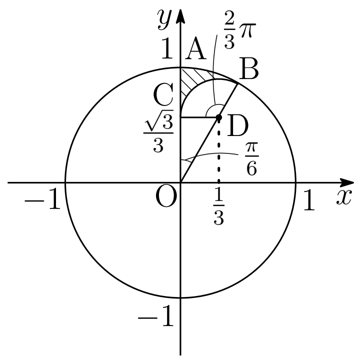
$$h_2 = h\sin\theta = \frac{2r\sin\theta}{3\theta}\sin\theta = \frac{2r\sin^2\theta}{3\theta}$$





考察

右の図の斜線部分の面積および重心の y 座標を求め，この斜線部分を直線 CD のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求める．



$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ を弧とする中心角 $\dfrac{\pi}{6}$ の扇形の面積 S および重心の y 座標 h は

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12},\quad h=\frac{1\sin\frac{\pi}{6}}{3\cdot\frac{\pi}{12}}=\frac{2}{\pi}$$

$\triangle$OCD の面積 S_1 および重心の y 座標 h_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{18},\quad h_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ を弧とする中心角 $\dfrac{2\pi}{3}$ の扇形の面積 S_2 および重心の y 座標 h_2 は

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{27},\quad h_2=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\cdot\frac{1}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}}{3\cdot\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2\pi}$$

斜線部分の面積を S_3，その重心の y 座標を h_3 とすると

$$S_1+S_2+S_3=S,\quad h_1S_1+h_2S_2+h_3S_3=hS$$

したがって
$$S_3=\frac{5\pi}{108}-\frac{\sqrt{3}}{18},\quad h_3S_3=\frac{1}{9}-\frac{\sqrt{3}\pi}{81}$$

パップス・ギュルダンの定理により，斜線部分を直線 CD のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned}V&=2\pi\left(h_3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)S_3=2\pi h_3S_3-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}S_3\\&=2\pi\left(\frac{1}{9}-\frac{\sqrt{3}\pi}{81}\right)-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{108}-\frac{\sqrt{3}}{18}\right)\\&=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ 数学 C：行列 (ハミルトン・ケリーの定理)

(1) 2 つの行列 A，B の対角和がともに 0 であることに注目する．

> 2 次の正方行列 X，Y について，$\mathrm{tr}(X)=0$，$\mathrm{tr}(Y)=0$，XY が対角行列ならば，次式が成立する．
>
> $$X=kY \qquad (k\text{ は定数})$$

証明 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix}$ とおくと

$$XY=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+br & aq-bp \\ cp-ar & cq+ap \end{pmatrix}$$

XY が対角行列であるから

$$aq-bp=0,\ \ cp-ar=0 \quad \text{ゆえに} \quad a:b:c=p:q:r$$

よって，定数 k を用いて　$X=kY$　**証終**

(2) $3x-3y-2t\neq 0$ と仮定し，背理法により証明する．

(3) 行列 A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると，条件により $\det(A)=1$ となる．これと (2) の結果を用いるとよい．

(4) x，y が整数であることと (3) の結果を利用して，t の値を求める．

3.14　2014 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 III：微分法 (接線の方程式)，積分法 (回転体の体積)

(1) 曲線の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となる接線を求めるだけの基本題．

(2) x 軸のまわりの回転体の体積で，計算も比較的簡単である．完答しなければならない 1 題．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 A：論理と集合 (無限降下法)

(1) 新課程を意識した出題で，理系・文系の共通問題として出題された．

(2) (1) の結果を利用する．
とくに新課程では，合同式が教科書に発展学習として取り上げられているので，合同式の定義を書いて使用することができる．実際

$$a \equiv 0 \Longrightarrow a^2 \equiv 0,\quad a \equiv \pm 1 \Longrightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

したがって

$$a^2 \equiv 0 \Longleftrightarrow a \equiv 0 \pmod{3}$$
$$a^2 + b^2 \equiv 0 \Longleftrightarrow a \equiv b \equiv 0 \pmod{3}$$

ゆえに，$a = 3a_1$，$b = 3b_1$ となる自然数 a_1，b_1 が存在するので，これを $a^2 + b^2 = 3c^2$ に代入して整理すると

$$c^2 = 3({a_1}^2 + {b_1}^2) \quad よって \quad c^2 \equiv 0 \Longleftrightarrow c \equiv 0 \pmod{3}$$

(3) 無限降下法によって証明できる．不定方程式 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす自然数の組 $(a_1,\ b_1,\ c_1)$ が存在すると仮定すると，(2) の結果から，a_1，b_1，c_1 はすべて 3 で割り切れるので，$a_1 = 3a_2$，$b_1 = 3b_2$，$c_1 = 3c_2$ とおくと

$${a_2}^2 + {b_2}^2 = {c_2}^2$$

となり，新しい自然数の組 $(a_2,\ b_2,\ c_2)$ が得られる．こうして，順次，小さい自然数の組が得られるが，このことは自然数の集合が下に有界であることに反する．

3 数学 II：図形と方程式 (最大・最小)，数学 C：2 次曲線 (楕円と直線の共有点)

(1) 基本題

(2) 点 $(x,\ y)$ が $|x|+|y|=1\cdots(*)$ を満たすとき，$(x,-y)$，$(-x,\ y)$ も $(*)$ をみたすので，$(*)$ の表す図形は，x 軸および y 軸に関して対称である．したがって，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ についてその図形を考え，これを x 軸，さらに y 軸について展開した図形を考えてもよい．

(3) 楕円の中心が第 2 象限にあることから，最大値は第 2 象限でとり，(1) の結果が利用できる．また，最小値は，$|x|+|y|=k$ の頂点でとる．

4 数学 A：場合の数と確率 (期待値)

(1) 基本題．この分野は，文系と理系の共通問題として出題されることが多い．

(2) 確率は頻出問題である．扱う事象も多いのが特徴で，解答には表を作成するなど，工夫が必要である．本年度の問題は，例年に比べると取り組みやすい内容になっている．

5 数学 III：微分法 (ロルの定理)

大問のみの出題であり，合否を分けた 1 題である．

大域的な関数の性質を利用するか，局所的な関数の性質を利用する 2 つの方法がある．

$$f_n\left(\frac{1}{k+1}\right)=f_n\left(\frac{1}{k}\right)$$

が成り立つので，ロルの定理により

$$f_n'(c_k)=0,\quad \frac{1}{k+1}<c_k<\frac{1}{k} \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

をみたす c_k が少なくとも 1 つ存在する．区間が $n-1$ 個あるので，これらの c_k が少なくとも $n-1$ 個存在する．$f_n(x)$ は n 次式であるから，$f_n'(x)=0$ をみたす x は高々$n-1$ 個である．したがって，各区間に $f'(x)=0$ をみたす x が 1 個ずつ存在する (大域的)．

区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ において $f'(x)=0$ をみたす x がただ 1 つ存在し，その前後で $f'(x)$ の符号が変化することを示す必要がある (局所的)．