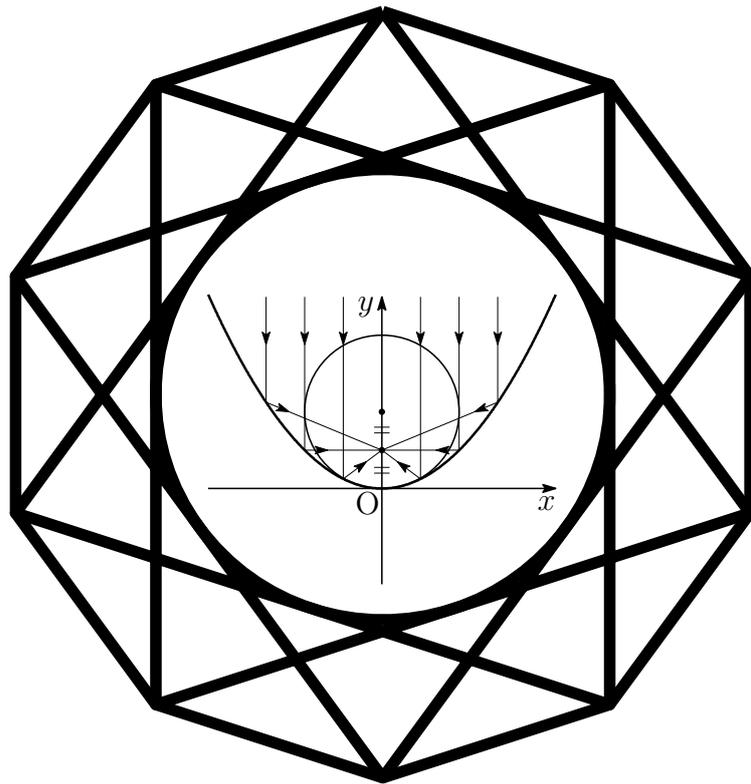


入試の軌跡

九州大学 文系

2015 - 2020

数学



2020 年 10 月 14 日

Typed by L^AT_EX 2_ε

序

本書は，九州大学文学部・教育学部・法学部・経済学部（経済・経営）・医学部（保健[看護]）・共創学部受験者のための入試問題集である。

本書には，平成27年（2015年）度から令和2年（2020年）度までの2次試験前期日程の数学問題をすべて掲載した。第1章には問題を掲載し，第2章には解答，第3章には研究を付けた。

また，平成9年（1997年）から令和2年（2020年）までの一般前期試験問題および解答については，年度ごとに次のサイトに掲載している。

<http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html>

本書の編集にあたり，以下の点に留意した。

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した。
2. 本書は，電子文書（PDF）での利用を想定し，ハイパーリンクを施した。利用する際には，全画面表示（`[Ctrl]+L`）および描画領域に合わせる（`[Ctrl]+3`）と見やすくなる。ページスクロールには，（`[Ctrl]+▲`，`[Ctrl]+▼`）が利用でき，リンク（ジャンプ）先から戻る（`[Alt]+◀`），進む（`[Alt]+▶`）も利用できる。なお，全画面表示を解除するには`[ESC]`。
3. 平成13年（2001年）度から平成26年（2014年）度までの旧課程の一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡 九州大学 文系』は，次である。

http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_bun.pdf

4. また，本書の姉妹版である『入試の軌跡 九州大学 英語』も次のサイトに掲載しており，併せて活用いただけることを切に願うものである。

<http://kumamoto.s12.xrea.com/lis.html>

令和2年5月 編者

目次

序	i
第1章 一般前期問題	1
1.1 2015年度	5
1.2 2016年度	7
1.3 2017年度	9
1.4 2018年度	10
1.5 2019年度	12
1.6 2020年度	13
第2章 一般前期解答	15
2.1 2015年度	16
2.2 2016年度	20
2.3 2017年度	26
2.4 2018年度	30
2.5 2019年度	33
2.6 2020年度	36
第3章 一般前期研究	41
3.1 2015年度	42
3.1.1 3番 研究	42
3.2 2016年	43
3.2.1 2番(4) 外積(ベクトル積)	43
3.3 2017年	44
3.3.1 1番(2) 研究	44
3.3.2 4番(1) ユークリッドの互除法	45
3.4 2018年	46
3.4.1 4番 条件付き確率と事象の独立	46

第 1 章 一般前期問題

2003 年度以前の入試は，必答問題 2 題と，選択問題 3 題を 1 グループとした 2 グループから 1 題ずつ選んで 120 分で解答する形式であった．2004 年度入試以降は選択問題はなくなり，必答問題 4 題を 120 分で解答する現在の形式になった．

2014 年度入試においては，来年度からの新課程を意識した整数問題が出題されている．ユークリッドの互除法や合同式についても学習しておく必要があるようだ．

九大入試の特徴として，教科書にある公式の証明問題，教科書の典型的な問題についても確かな理解と応用力を問う問題が出題される．文系としてはめずらしく，論理的な展開能力が要求される．

平成 26 年 3 月 編者

平成 27 年 (2015 年) に現行課程へ移行し，移行後の出題を見ると，新たに導入された「整数の性質」の分野から，ユークリッドの互除法 (2017 年)，合同式 (2015 年，2016 年，2018 年) が出題されており，今後とも重点的に学習しておく必要がある．

過去の出題からも分かるように，「場合の数と確率」「微積分」は重要分野である．

平成 30 年 9 月 編者

出題分野

2015年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学II	微分法と積分法	面積, 軌跡
2	標準	数学B	空間のベクトル	正四面体, 三角形の面積
3	やや易	数学A	場合の数と確率	操作による硬貨の枚数の確率
4	やや難	数学A	整数の性質	合同式

2016年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学II	微分法と積分法	3次関数のグラフによる図形の面積
2	標準	数学A	図形の性質	チェバの定理, メネラウスの定理
3	難	数学A	場合の数と確率	重複組合せとその応用
4	標準	数学A	整数の性質	合同式

2017年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学II	微分法と積分法	2つの放物線による図形の面積比
2	標準	数学I	数と式	有理数と無理数
		数学II	図形と方程式	座標平面上の三角形
3	標準	数学A	場合の数と確率	サイコロの目による勝者の確率
4	標準	数学A	整数の性質	ユークリッドの互除法

2018年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学II	微分法と積分法	3次関数のグラフによる図形の面積
2	標準	数学A	整数の性質	合同式
3	標準	数学B	平面のベクトル	三角形に関する証明問題
4	標準	数学A	場合の数と確率	条件付き確率

2019年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学A	場合の数と確率	硬貨に書かれた数字の積について
2	標準	数学II	微分法と積分法	3次関数の極大・極小
3	標準	数学B	空間のベクトル	四面体の体積
4	やや難	数学II	式と証明	恒等式

2020年度

	難易度	科目	分野	出題内容
1	標準	数学Ⅱ	微分法と積分法	2つの放物線で囲まれた図形の最大値
2	標準	数学B	空間のベクトル	四面体の断面積の最大値
3	標準	数学Ⅱ	複素数と方程式	虚数を解にもつ実係数の方程式
		数学A	整数の性質	合同式
4	標準	数学A	確率	サイコロの出た目の積

出題分野 (2011-2020)

		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式							2			
	2次関数										
	図形と計量				3						
	データの分析										
II	式と証明									4	
	複素数と方程式										
	図形と方程式			2・4	1			2			
	三角関数				3						
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	1	2	4	1	1	1	1	1	2	
A	場合の数と確率	4	4	3	4*	3	3	3	4	1	
	整数の性質		3		2	4	4	4	2		
	図形の性質				3		2				
B	平面上のベクトル	3							3		
	空間のベクトル		1	1		2				3	
	数列	2	4								
	確率分布と統計										

数字は問題番号 (* は旧課程の内容を含む)

1.1 2015 年度

1 座標平面上の2つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

を考える。ただし、 a, b は実数とする。

(1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるための a, b に関する条件を求めよ。

以下、 a, b が (1) の条件を満たすとし、 C_1 と C_2 で囲まれる面積が9であると
する。

(2) b を a を用いて表せ。

(3) a がすべての実数値をとって変化するとき、放物線 C_2 の頂点が描く軌跡
を座標平面上に図示せよ。

2 1辺の長さが1である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P, 辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q, 辺 OC を 1 : 3 に内分する点を R とする。以下の問い に答えよ。

(1) 線分 PQ の長さ と 線分 PR の長さを求めよ。

(2) \vec{PQ} と \vec{PR} の内積 $\vec{PQ} \cdot \vec{PR}$ を求めよ。

(3) 三角形 PQR の面積を求めよ。

3 袋の中に最初に赤玉2個と青玉1個が入っている。次の操作を考える。 研

(操作) 袋から1個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉1個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉1個を袋に入れる。袋に入っている3個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を1枚もらう。

この操作を4回繰り返す。もらう硬貨の総数が1枚である確率と、もらう硬貨の総数が2枚である確率をそれぞれ求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

- (1) n が正の偶数のとき、 $2^n - 1$ は3の倍数であることを示せ。
- (2) p を素数とし、 k を0以上の整数とする。 $2^{p-1} - 1 = p^k$ を満たす p, k の組をすべて求めよ。

1.2 2016 年度

1 座標平面において、 x 軸上に 3 点 $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ ($0 < \alpha < \beta$) があり、曲線 $C: y = x^3 + ax^2 + bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし、 a, b は実数である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。 S を α と β の式で表せ。
- (2) β の値を固定して、 $0 < \alpha < \beta$ の範囲で α を動かすとき、 S を最小とする α を β の式で表せ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において、辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1, t:1-t, 1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また、 AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下、 t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

- (2) $AP = kAE, CR = lCD$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。
- (3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。
- (4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

研

- 3 袋の中に、赤玉が15個、青玉が10個、白玉が5個入っている。袋の中から玉を1個取り出し、取り出した玉の色に応じて、以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

(操作) コインが点 (x, y) にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x + 1, y)$ に移動、青玉を取り出したときには点 $(x, y + 1)$ に移動、白玉を取り出したときには点 $(x - 1, y - 1)$ に移動し、取り出した球は袋に戻す。

最初に原点 $(0, 0)$ にコインを置き、この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後、コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 操作を n 回繰り返したとき、白玉を1度だけ取り出したとする。このとき、到達点となり得る点をすべて求めよ。
 - (2) 操作を n 回繰り返したとき、到達点となり得る点の個数を求めよ。
 - (3) 座標平面上の4点 $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき、到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。 P_3 を求めよ。
 - (4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。
- 4 自然数 n に対して、 10^n を13で割った余りを a_n とおく。 a_n は0から12までの整数である。以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} は $10a_n$ を13で割った余りに等しいことを示せ。
- (2) a_1, a_2, \dots, a_6 を求めよ。
- (3) 以下の3条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。
 - (i) N を十進数で表示したとき6桁となる。
 - (ii) N を十進数で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと2016となる。
 - (iii) N は13で割り切れる。

1.3 2017年度

- 1** 定数 $a < 1$ に対し, 放物線 $C_1 : y = 2x^2 + 1$, $C_2 : y = -x^2 + a$ を考える。以下の問いに答えよ。
- (1) 放物線 C_1 , C_2 の両方に接する2つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。
 - (2) C_1 と (1) で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積を S_1 , C_2 と (1) で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき, $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。 [研]
- 2** 座標平面上に原点 O , 点 $A(1, a)$, 点 $B(s, t)$ がある。以下の問いに答えよ。
- (1) $a = 1$ のとき, $\triangle OAB$ が正三角形となるような (s, t) をすべて求めよ。
 - (2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。
 - (3) $\triangle OAB$ が正三角形であり, a が有理数であるとき, s と t のうち少なくとも1つは無理数であることを示せ。
- 3** A と B の2人が A, B, A, B, \dots の順にさいころを投げ, 先に3以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め, さいころ投げを終える。以下では, さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2と3の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として, 以下の問いに答えよ。
- (1) さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。さらに, p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ。
 - (2) さいころを投げた回数が3回以下で A が勝つ確率を求めよ。
 - (3) 自然数 k に対し, さいころを投げた回数が $2k + 1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。
- 4** 以下の問いに答えよ。
- (1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。 [研]
 - (2) 225 との最大公約数が15となる2017以下の自然数の個数を求めよ。
 - (3) 225 との最大公約数が15であり, かつ1998との最大公約数が111となる2017以下の自然数をすべて求めよ。

1.4 2018年度

1 座標平面内の曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c, 0)$ において x 軸に接しているとする。ただし, a, b は実数, $c > 0$ である。以下の問いに答えよ。

- (1) a, b をそれぞれ c を用いて表せ。
- (2) この曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。 S を最小にする c の値を求めよ。

2 以下の問いに答えよ。

- (1) n を自然数とするとき, 2^n を 7 で割った余りを求めよ。
- (2) 自然数 m は, 2 進法で 101 が 6 回連続する表示

$$101101101101101101_{(2)}$$

をもつとする。 m を 7 で割った余りを求めよ。

3 平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し,

$$L = PA^2 + PB^2 + PC^2$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ および $\vec{x} = \vec{OP}$ とおくとき, 次の等式を示せ。

$$L = 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

- (2) L を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また, L の最小値は

$$\frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

であることを示せ。

4 3つの部品 a, b, c からなる製品が多数入った箱がある。製品を1つ取り出したとき、部品 a, b, c が不良品である確率について次のことがわかっている。

- 部品 a が不良品である確率は p である。 研
- 部品 a が不良品でないとき、部品 b が不良品である確率は q である。
- 部品 a が不良品であるとき、部品 b も不良品である確率は $3q$ である。
- 部品 b が不良品でないとき、部品 c が不良品である確率は r である。
- 部品 b が不良品であるとき、部品 c も不良品である確率は $5r$ である。

ただし、 $0 < p < 1$, $0 < q < \frac{1}{3}$, $0 < r < \frac{1}{5}$ である。以下の問いに答えよ。

- (1) 製品を1つ取り出したとき、部品 a, b の少なくとも一方が不良品である確率を p, q を用いて表せ。
- (2) 製品を1つ取り出したとき、部品 c が不良品である確率を p, q, r を用いて表せ。
- (3) 製品を1つ取り出したところ部品 c が不良品であった。このとき、部品 b も不良品である確率を p, q を用いて表せ。

1.5 2019年度

- 1 表に3, 裏に8が書かれた硬貨がある。この硬貨を10回投げるとき, 出た数字10個の積が8桁になる確率を求めよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。
- 2 k を実数とする。3次関数 $y = x^3 - kx^2 + kx + 1$ が極大値と極小値をもち, 極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき, k の値を求めよ。
- 3 座標空間内の3点 $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 3)$, $C(4, 5, 6)$ を通る平面を α とし, 平面 α 上にない点 $P(6, p, q)$ を考える。以下の問いに答えよ。
- (1) 点 P から平面 α に下ろした垂線と α との交点を H とする。線分 PH の長さを p, q を用いて表せ。
 - (2) 点 P が $(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$ を満たしながら動くとき, 四面体 $ABCP$ の体積の最大値と最小値を求めよ。
- 4 0でない2つの整式 $f(x), g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$\begin{aligned}f(x^2) &= (x^2 + 2)g(x) + 7 \\g(x^3) &= x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2\end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに2以下であることを示せ。
- (2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

1.6 2020 年度

- 1** $a \geq 0$ とする。2つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = 3(x - a)^2 + a^3 - 40$ を考える。以下の問いに答えよ。
- (1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ。
 - (2) a が(1)で求めた範囲を動くとき、 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S の最大値を求めよ。
- 2** 座標空間内の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, p)$, $C(q, r, s)$ を頂点とする四面体が正四面体であるとする。ただし、 $p > 0$, $s > 0$ とする。以下の問いに答えよ。
- (1) p, q, r, s の値を求めよ。
 - (2) z 軸に垂直な平面で正四面体 $OABC$ を切ったときの断面積の最大値を求めよ。
- 3** a, b, c を整数とし、 i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $f\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき、以下の問いに答えよ。
- (1) a, b を c を用いて表せ。
 - (2) $f(1)$ を7で割ると4余り、 $f(-1)$ を11で割ると2余るとする。 c の絶対値が40以下であるとき、方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。
- 4** 4個のサイコロを同時に投げるとき、出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。
- (1) X が25の倍数になる確率を求めよ。
 - (2) X が4の倍数になる確率を求めよ。
 - (3) X が100の倍数になる確率を求めよ。

第 2 章 一般前期解答

問題冊子 (A4 で 12 ページ) は、見開きで問題が偶数ページ、下書き (計算スペース) が奇数ページに配置されており、問題ページの下側の余白を含め十分な計算スペースがある。解答用紙は、**22**～**25**の番号が書かれた 4 枚の A3 用紙がはさみ込まれており、問題**1**～**4**を順次指定された解答用紙に答えるようになっている (2004 年度以降の必答 4 題の出題形式)。

設問ごとに解答欄が仕切られているため、十分な解答スペースではなく、途中の計算などを書いていくスペースはない (解答用紙の裏面の使用は不可)。そのため、問題用紙の下書き欄で計算した結果を整理して「理由と計算結果・結論」を明示する必要がある。なお、問題冊子は、試験終了後に持ち帰ることができる。

出題者は受験生に簡潔な表現力を要求したものと考えられる。理学部数学科の採点担当者からも、定積分の途中計算などを細かく書く必要はないと聞いた。

対策

1. 標準的な問題を中心に 3 題とやや難の 1 題が例年の出題傾向である。配点はすべて 50 点ずつの計 200 点であるので 120 分で効率的に問題を解いていく必要がある。なお、文学部および医学部保健学科看護学専攻は 100 点満点に換算される。
2. 完答が難しい問題についても、前半の設問はどれも基本または標準的な問題が配置されているので、確実に部分点を狙っていく必要がある。
3. 採点者が読みやすい簡潔な答案の作成を普段から練習しておく。

2.1 2015年度

1 (1) $y = x^2$ と $y = -x^2 + ax + b$ から y を消去すると

$$x^2 = -x^2 + ax + b \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - ax - b = 0 \quad \dots (*)$$

C_1 と C_2 が異なる2点で交わる時、(*)より

$$(-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-b) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 8b > 0$$

(2) 方程式(*)の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{a}{2}, & \alpha\beta &= -\frac{b}{2} \\ \beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + ax + b) - x^2\} dx &= - \int_{\alpha}^{\beta} (2x^2 - ax - b) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = 9 \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b} = 3 \quad \text{よって} \quad b = -\frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$$

(3) (2)の結果から、 C_2 は

$$y = -x^2 + ax - \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2} \quad \text{すなわち} \quad y = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$$

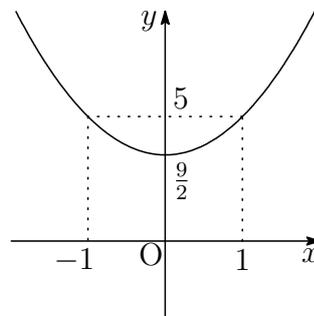
C_2 の頂点を (x, y) とすると

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

よって、 C_2 の頂点が描く軌跡の方程式は

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$

その軌跡は、右の図のようになる。



2 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと

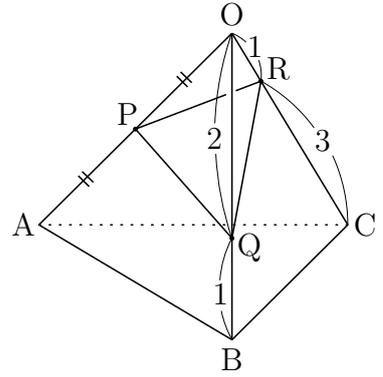
$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{4}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$$



したがって $|\overrightarrow{PQ}|^2 = \left| \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \right|^2 = \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2$

$$= \frac{4}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$$

$$|\overrightarrow{PR}|^2 = \left| \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \right|^2 = \frac{1}{16}|\vec{c}|^2 - \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

よって $PQ = \frac{\sqrt{13}}{6}$, $PR = \frac{\sqrt{3}}{4}$

別解 $\triangle OPQ$ および $\triangle OPR$ に余弦定理を適用すると

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{36}$$

$$PR^2 = OP^2 + OR^2 - 2OP \cdot OR \cos \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

$$(2) \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{8}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{48}$$

$$(3) \triangle PQR = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{36} \cdot \frac{3}{16} - \left(\frac{5}{48}\right)^2} = \frac{\sqrt{131}}{96}$$

■

3 1, 3回目の操作で青玉の個数は2個または0個. 研

2, 4回目の操作で青玉の個数は3個または1個.

したがって, もらう硬貨の枚数は0, 1, 2枚のいずれかである.

2回目の操作で青玉3個である確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

したがって, 2回目の操作で青玉1個である確率は

$$1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

2, 4回目の操作で青玉3個, すなわち, もらう硬貨の総数が2枚である確率は

$$\frac{2}{9} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

2, 4回目の操作で青玉1個, すなわち, 硬貨を1枚ももらわない確率は

$$\frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{49}{81}$$

よって, もらう硬貨の総数が1枚である確率は

$$1 - \left(\frac{2}{27} + \frac{49}{81} \right) = \frac{26}{81}$$

補足 x 回目の操作で青玉が y 個である確率を $P(x, y)$ とすると

$$P(2, 3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

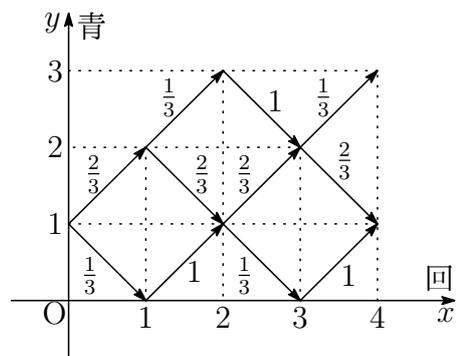
$$P(2, 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{9}$$

4回の操作で硬貨を2枚もらう(青玉が2回3個になる)確率は

$$P(2, 3) \times 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

4回の操作で硬貨を1枚ももらわない確率は

$$\{P(2, 1)\}^2 = \left(\frac{7}{9} \right)^2 = \frac{49}{81}$$



- 4 (1) n が正の偶数のとき, $\frac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

よって, $2^n - 1$ は 3 の倍数である.

- (2) $2^{p-1} - 1 = p^k$ (p は素数, k は 0 以上の整数) $\dots (*)$

- (i) $p = 2$ のとき, $(*)$ は

$$1 = 2^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 0$$

- (ii) $p \neq 2$ のとき, p は奇素数であるから, $p - 1$ は偶数である.

(1) の結果から, $2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数である.

$(*)$ より, p^k は 3 を因数にもつから

$$p = 3$$

これを $(*)$ に代入すると

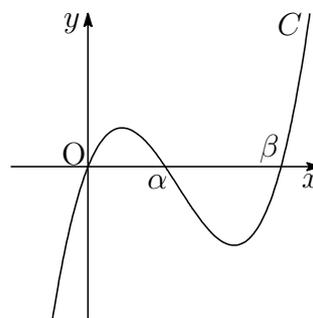
$$3 = 3^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 1$$

よって $(p, k) = (2, 0), (3, 1)$ ■

2.2 2016年度

- 1 (1) C は x 軸との共有点の x 座標が $x = 0, \alpha, \beta$ であるから, $C: y = f(x)$ の方程式は x^3 の係数に注意して ($0 < \alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x - \alpha)(x - \beta) \\ &= x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x \end{aligned}$$



関数 $f(x)$ の原始関数の1つを

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha + \beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2$$

とおくと

$$F(0) = 0, \quad F(\alpha) = -\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta, \quad F(\beta) = -\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha f(x) dx - \int_\alpha^\beta f(x) dx = \left[F(x) \right]_0^\alpha - \left[F(x) \right]_\alpha^\beta \\ &= 2F(\alpha) - F(\beta) - F(0) \\ &= 2\left(-\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta\right) - \left(-\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3\right) \\ &= -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^3\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^4 \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= -\frac{2}{3}\alpha^3 + \alpha^2\beta - \frac{1}{6}\beta^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\alpha - \beta)\{2\alpha(\beta - \alpha) + \beta^2\} \end{aligned}$$

$$0 < \alpha < \beta \text{ であるから } 2\alpha(\beta - \alpha) + \beta^2 > 0$$

したがって

α	(0)	...	$\frac{\beta}{2}$...	(β)
$\frac{dS}{d\alpha}$		-	0	+	
S		↘	極小	↗	

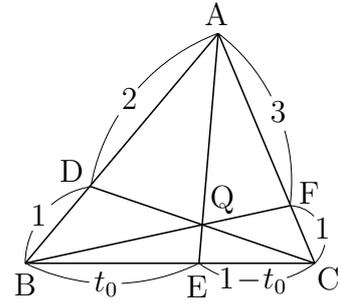
よって, S を最小にする α は $\alpha = \frac{\beta}{2}$



2 (1) チェバの定理により

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

これを解いて $t_0 = \frac{3}{5}$

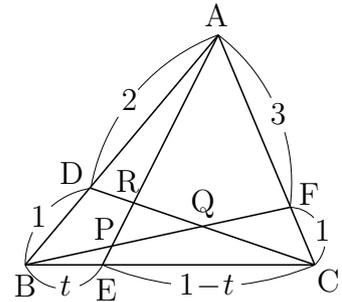


(2) $\triangle AEC$ および直線 BF について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AP}{PE} \cdot \frac{t}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

したがって $\frac{AP}{PE} = \frac{3}{t}$

よって $k = \frac{AP}{AE} = \frac{3}{3+t}$



$\triangle BCD$ および直線 AE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DA}{AB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

したがって $\frac{CR}{RD} = \frac{3(1-t)}{2t}$

よって $\ell = \frac{CR}{CD} = \frac{3(1-t)}{3(1-t) + 2t} = \frac{3(1-t)}{3-t}$

(3) (2) の図について、 $\triangle BCF$ および直線 AE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CA}{AF} \cdot \frac{FP}{PB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{FP}{PB} = 1$$

したがって $\frac{FP}{PB} = \frac{3(1-t)}{4t} \quad \dots \textcircled{1}$

$t = \frac{3}{5}$ のとき、 P は Q に一致するので $\frac{FQ}{QB} = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$

よって $\triangle BCQ = \frac{2}{3} \triangle BCF = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

(4) $t = \frac{3}{5}$ のとき, R は Q に一致するので, (2) の結果から

研

$$\frac{CQ}{CD} = \frac{3\left(1 - \frac{3}{5}\right)}{3 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

したがって $CQ : QR = \frac{1}{2} : \frac{3(1-t)}{3-t} - \frac{1}{2} = 3-t : 3-5t$

また, ①, ② から

$$BQ : PQ = \frac{2}{3} : \frac{3(1-t)}{3(1-t)+4t} - \frac{1}{3} = 3+t : 3-5t$$

$\triangle BCQ : \triangle PQR = BQ \cdot CQ : PQ \cdot QR$ であるから

$$\triangle BCQ : \triangle PQR = (3+t)(3-t) : (3-5)^2$$

(3) の結果から $\triangle PQR = \frac{1}{6} \times \frac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)} = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}$ ■

- 3 (1) 白玉を1度だけ取り出すので、赤玉を m 回 ($m = 0, 1, \dots, n-1$) 取り出すとすると、青玉を取り出す回数は $n-m-1$ であるから、到達点 (x, y) は

$$x = m - 1, \quad y = (n - m - 1) - 1 = n - m - 2$$

よって、到達点は $(m - 1, n - m - 2)$ ($m = 0, 1, \dots, n - 1$)

- (2) 赤玉, 青玉, 白玉を取り出す回数を, それぞれ i, j, k とすると, 到達点 (x, y) は $(i + j + k = n)$

$$x = i - k, \quad y = j - k$$

このとき, $k = n - i - j$ であるから

$$(*) \begin{cases} x = i - (n - i - j) = 2i + j - n \\ y = j - (n - i - j) = i + 2j - n \end{cases}$$

ここで

$$2i + j - n = 2i' + j' - n, \quad i + 2j - n = i' + 2j' - n$$

とすると

$$2(i - i') + (j - j') = 0, \quad (i - i') + 2(j - j') = 0$$

これを解くと $(i, j) = (i', j')$

したがって, $(i, j) \neq (i', j')$ のとき

$$(2i + j - n, i + 2j - n) \neq (2i' + j' - n, i' + 2j' - n)$$

このことから, (i, j, k) の組合せの個数とその到達点の個数は一致する. よって, 求める到達点の個数は, 赤玉, 青玉, 白玉の3種類の玉から n 個取り出す重複組合せの総数に一致するので

$${}_3H_n = {}_{3+n-1}C_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

(3) (*) から

$$i = \frac{2x - y}{3} + \frac{n}{3}, \quad j = \frac{2x - y}{3} - x + y + \frac{n}{3} \quad \cdots (**)$$

$n = 3$ のとき, 上式より

$$i = \frac{2x - y}{3} + 1, \quad j = \frac{2x - y}{3} - x + y + 1$$

(x, y) が D 内にあるとき ($k = 3 - i - j$)

$$(x, y, i, j, k) = (-1, 1, 0, 2, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (1, -1, 2, 0, 1)$$

よって, 求める確率は

$$P_3 = \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{6} + \frac{3!}{1!1!1!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{25}{72}$$

(4) $n = 3N$ のとき, (**) より

$$i = \frac{2x - y}{3} + N, \quad j = \frac{2x - y}{3} - x + y + N$$

(x, y) が D 内にあるとき ($k = 3N - i - j$)

$$(x, y, i, j, k) = (-1, 1, N - 1, N + 1, N), (0, 0, N, N, N), \\ (1, -1, N + 1, N - 1, N)$$

よって, 求める確率は

$$P_{3N} = \frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ + \frac{(3N)!}{N!N!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{1}{3}\right)^N \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ + \frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ = \frac{(19N+6)(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^2(N+1)!}$$

■

4 (1) 仮定から $10^n \equiv a_n, 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって $a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より $a_1 = 10$

(1) の結果を用いると, 法 13 について

$$a_2 \equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9$$

$$a_3 \equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12$$

$$a_4 \equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3$$

$$a_5 \equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4$$

$$a_6 \equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1$$

よって $a_2 = 9, a_3 = 12, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 1$

(3) 整数 p, q を $1 \leq p \leq 9, 0 \leq q \leq 9$ とし, 求める自然数 N を

$$N = p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

とおくと, 法 13 に関して

$$N \equiv p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

$$\equiv p \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 9 + 6 \cdot 10 + q = 4p + q + 75$$

$$\equiv 4p + q - 3$$

このとき, $N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 (p, q) の組は

$$(p, q) = (2, 8), (3, 4), (4, 0), (5, 9), (6, 5), (7, 1), (9, 6)$$

よって, 求める自然数 N は

$$220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166$$



2.3 2017年度

- 1 (1) 求める直線を $l: y = px + q$ とおく. C_1 と l の方程式から y を消去すると

$$2x^2 + 1 = px + q \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - px - q + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と l は接するので, 方程式 (*) の係数について

$$(-p)^2 - 4 \cdot 2(-q + 1) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 + 8q - 8 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様に, C_2 と l の方程式から y を消去すると

$$-x^2 + a = px + q \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + px + q - a = 0 \quad \cdots (**)$$

C_2 と l は接するので, 上の方程式の係数について

$$p^2 - 4 \cdot 1(q - a) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 - 4q + 4a = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② から $p^2 = \frac{8}{3}(1 - a), q = \frac{1}{3}(a + 2)$

よって, 求める2直線の方程式は

$$y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1 - a)}x + \frac{1}{3}(a + 2)$$

- (2) (1) の結果から, 次の2式は平方式になることに注意して

研

$$2x^2 + 1 - (px + q) = 2\left(x - \frac{p}{4}\right)^2$$

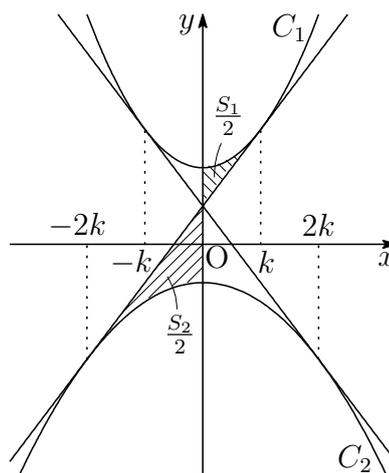
$$px + q - (-x^2 + a) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$p = 2\sqrt{\frac{2}{3}(1 - a)}$ のとき, $k = \frac{p}{4}$ とおく.
 C_1, C_2 および2接線は y 軸に関して対称であることに注意して

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{2} &= \int_0^k 2(x - k)^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x - k)^3 \right]_0^k = \frac{2k^3}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{2} &= \int_{-2k}^0 (x + 2k)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + 2k)^3 \right]_{-2k}^0 = \frac{8k^3}{3} \end{aligned}$$

よって $\frac{S_2}{S_1} = \frac{16k^3}{3} \times \frac{3}{4k^3} = 4$



■

- 2 (1) 3点 $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(s, t)$ について, $\triangle OAB$ が正三角形であるから, $OA^2 = OB^2 = AB^2$ より

$$1^2 + 1^2 = s^2 + t^2 = (s - 1)^2 + (t - 1)^2$$

整理すると $s^2 + t^2 = 2, \quad s + t = 1$

これを解いて $(s, t) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2} \right)$ (複号同順)

- (2) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると, 自然数 p, q を用いて

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素})$$

とおける. これから, $p = \sqrt{3}q$ の両辺を平方すると

$$p^2 = 3q^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

p^2 は3の倍数であるから, p は3の倍数である.

したがって, $p = 3k$ (k は自然数) とおけ, これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$(3k)^2 = 3q^2 \quad \text{ゆえに} \quad q^2 = 3k^2$$

q^2 は3の倍数であるから, q も3の倍数である. このことは, p と q が互いに素であることに反する. よって, $\sqrt{3}$ は無理数である.

- (3) $\overrightarrow{OA} = (1, a)$, $\overrightarrow{OB} = (s, t)$ であるから, $\triangle OAB$ の面積により

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin 60^\circ = \frac{1}{2} |t - as|$$

このとき, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ であることに注意して

$$\frac{1}{2} (a^2 + 1) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} |t - as| \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{3} = \frac{2|t - as|}{a^2 + 1} \quad \dots (*)$$

a が有理数であるとき, 2数 s, t がともに有理数であるとすると, (*) の右辺は有理数となり, (2) の結果に矛盾する.

よって, s と t のうち少なくとも1つは無理数である. ■

- 3 (1) サイコロを1回投げるとき、勝敗が決まらない、すなわち、1または2の目が出る確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

n 回以下では勝敗が決まらないのは、 n 回とも1または2の目が出ることであるから、よって、求める確率 p_n は

$$p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$$

p_n が 0.005 より小さいとき

$$\frac{1}{3^n} < 0.005 = \frac{1}{200} \quad \text{ゆえに} \quad 3^n > 200$$

$3^4 = 81$, $3^5 = 243$ であるから、求める最小の n は $n = 5$

- (2) サイコロを1回投げるとき、勝者が決まる、すなわち、3, 4, 5, 6の目が出る確率は

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

さいころを投げた回数が3回以下でAが勝つのは、1回目または3回目でAが勝つことであるから、求める確率は

$$\frac{2}{3} + p_2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$$

- (3) 求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \sum_{i=1}^k p_{2i} \times \frac{2}{3} &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^k \frac{1}{3^{2i}} = \frac{2}{3} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{9}\right)^i \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{9^{k+1}}\right) \end{aligned}$$

■

4 (1) ユークリッドの互除法を用いて

研

$$2017 = 225 \times 8 + 217,$$

$$225 = 217 \times 1 + 8,$$

$$217 = 8 \times 27 + 1$$

よって、求める最大公約数は 1

(2) $225 = 3^2 \times 5^2$, $2017 = 15 \times 134 + 7$

全体集合を $U = \{1, 2, 3, \dots, 134\}$ とし、その部分集合を

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 44\},$$

$$B = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 26\}$$

とすると

$$A \cap B = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2, 15 \cdot 3, \dots, 15 \cdot 8\}$$

したがって、求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cap B}) &= n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 134 - (44 + 26 - 8) = \mathbf{72} \end{aligned}$$

(3) $225 = 3^2 \times 5^2$, $15 = 3 \times 5$, $1998 = 2 \times 3^3 \times 37$, $111 = 3 \times 37$

求める数は 2017 以下で、 $3 \times 5 \times 37$ の倍数は

$$\{555n \mid n = 1, 2, 3\}$$

ただし、 n は 2, 3, 5 と互いに素であるから、求める数は 555 ■

2.4 2018年度

- 1 (1) 曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c, 0)$ において x 軸に接するから、曲線の方程式の x^3 の係数および定数項に注意して

$$y = (x - c)^2 \left(x + \frac{1}{c} \right) \quad \cdots (*)$$

とおける。これを展開すると

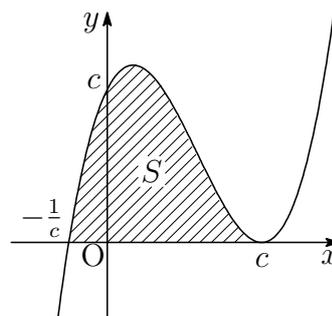
$$y = x^3 + \left(\frac{1}{c} - 2c \right) x^2 + (c^2 - 2)x + c$$

与えられた曲線の方程式と上式の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = \frac{1}{c} - 2c, \quad b = c^2 - 2$$

- (2) (*) により ($c > 0$)

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{c}}^c \left(x + \frac{1}{c} \right) (c - x)^2 dx \\ &= \frac{1}{12} \left(c + \frac{1}{c} \right)^4 \end{aligned}$$



$c > 0$, $\frac{1}{c} > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の関係により

$$c + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{1}{c}} = 2$$

上式において、等号が成立するのは

$$c = \frac{1}{c} \quad \text{すなわち} \quad c = 1$$

のときで、このとき S は最小となる。よって $c = 1$

補足 定積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる¹。

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010.kouki.pdf [1]

2 (1) $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$ であるから

$$2^n \text{ を } 7 \text{ で割った余りは } \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき } & 1 \\ n \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } & 2 \\ n \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } & 4 \end{cases}$$

(2) $m = 101101101101101101_{(2)}$

これに (1) の結果を用いると、法 7 に関して

$$m = \sum_{k=0}^5 (2^2 + 1)2^{3k} \equiv \sum_{k=0}^5 5 \cdot 1 = 30 \equiv 2 \pmod{7}$$

よって、求める余りは **2** ■

3 (1) $L = PA^2 + PB^2 + PC^2$, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$, $\vec{x} = \vec{OP}$ より

$$\begin{aligned} L &= |\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2 + |\vec{PC}|^2 \\ &= |\vec{a} - \vec{x}|^2 + |\vec{b} - \vec{x}|^2 + |\vec{c} - \vec{x}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{x} + |\vec{x}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{x} + |\vec{x}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{x} + |\vec{x}|^2 \\ &= 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

(2) $\triangle ABC$ の重心を G とし, $\vec{g} = \vec{OG}$ とおくと

$$\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{g}$$

これを (1) に代入すると

$$\begin{aligned} L &= 3|\vec{x}|^2 - 6\vec{g} \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\ &= 3(|\vec{x}|^2 - 2\vec{g} \cdot \vec{x} + |\vec{g}|^2) + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 3|\vec{g}|^2 \\ &= 3|\vec{x} - \vec{g}|^2 + \frac{1}{3}\{3|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2 + 3|\vec{c}|^2 - 3|\vec{g}|^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad & 3|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2 + 3|\vec{c}|^2 - |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \\ &= 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{c}|^2 = (AB^2 + BC^2 + CA^2) \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad L = |\vec{x} - \vec{g}|^2 + \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

よって, $\vec{x} = \vec{g}$, すなわち, P が $\triangle ABC$ の重心であるとき,

L は最小値 $\frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ をとる. ■

4 a, b, c がそれぞれ不良品である事象をそれぞれ A, B, C とすると 研

$$P(A) = p, P_{\bar{A}}(B) = q, P_A(B) = 3q, P_{\bar{B}}(C) = r, P_B(C) = 5r$$

$$(1) P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{1 - P(A)}, P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ より}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \{1 - P(A)\}P_{\bar{A}}(B) = (1 - p)q$$

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = p \cdot 3q = 3pq$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= 3pq + (1 - p)q = (1 + 2p)q \end{aligned}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= p + (1 + 2p)q - 3pq = \mathbf{p + q - pq} \end{aligned}$$

$$(2) P_{\bar{B}}(C) = \frac{P(\bar{B} \cap C)}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{B} \cap C)}{1 - P(B)}, P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \text{ より}$$

$$P(\bar{B} \cap C) = \{1 - P(B)\}P_{\bar{B}}(C) = \{1 - (1 + 2p)q\}r$$

$$P(B \cap C) = P(B)P_B(C) = (1 + 2p)q \cdot 5r = 5(1 + 2p)qr$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\bar{B} \cap C) + P(B \cap C) \\ &= \{1 - (1 + 2p)q\}r + 5(1 + 2p)qr \\ &= \{1 + 4(1 + 2p)q\}r = \mathbf{(1 + 4q + 8pq)r} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から、求める確率は

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{5(1 + 2p)qr}{(1 + 4q + 8pq)r} = \frac{\mathbf{5(1 + 2p)q}}{\mathbf{1 + 4q + 8pq}}$$



2.5 2019 年度

- 1 硬貨を 10 回投げて、裏が出た回数を n とすると、出た数字 10 個の積は

$$8^n \cdot 3^{10-n}$$

これが 8 桁の数であるから $10^7 \leq 8^n \cdot 3^{10-n} < 10^8$

辺々の常用対数をとると $7 \leq n \log_{10} 8 + (10 - n) \log_{10} 3 < 8$

$\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$$7 \leq 0.9030n + 0.4771(10 - n) < 8$$

整理すると $22290 \leq 4259n < 32290$ ゆえに $5 + \frac{995}{4259} \leq n < 7 + \frac{2477}{4259}$

n は整数 ($0 \leq n \leq 10$) であるから $n = 6, 7$

よって、求める確率は

$${}_{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = (210 + 120) \times \frac{1}{1024} = \frac{165}{512}$$

- 2 $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 1$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 2kx + k$
 $f(x)$ は極大値と極小値をもつから、 $f'(x) = 0$ の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\beta - \alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 - 3k}}{3} - \frac{k - \sqrt{k^2 - 3k}}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{k(k-3)} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$$

極大値、極小値は、それぞれ $f(\alpha), f(\beta)$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx = 3 \int_{\beta}^{\alpha} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -3 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

条件により、 $f(\alpha) - f(\beta) = 4|k|^3$ であるから

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 = 4|k|^3 \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = 2|k| \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より $2|k| = \frac{2}{3} \sqrt{k(k-3)}$ ゆえに $k(8k+3) = 0$

$k(k-3) > 0$ に注意して、これを解くと $k = -\frac{3}{8}$

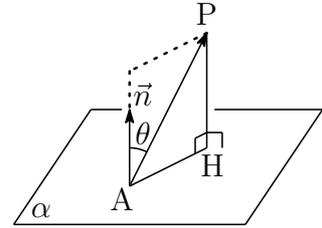
- 3 (1) $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 3)$, $C(4, 5, 6)$, $P(6, p, q)$ より

$$\vec{AB} = (2, 0, 0), \quad \vec{AC} = (3, 3, 3), \quad \vec{AP} = (5, p-2, q-3)$$

\vec{AB} , \vec{AC} の両方に垂直なベクトル, すなわち,
 α の法線ベクトルの1つを

$$\vec{n} = (0, 1, -1)$$

とおき, \vec{AP} と \vec{n} のなす角を θ とすると



$$PH = |\vec{AP}| |\cos \theta|, \quad \cos \theta = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AP}| |\vec{n}|}$$

$$\text{よって } PH = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|0 \cdot 5 + 1 \cdot (p-2) - 1 \cdot (q-3)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|p - q + 1|}{\sqrt{2}}$$

- (2) $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6$
 \vec{AB} , \vec{AC} の張る平行四辺形の面積を S とすると

$$S = \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \sqrt{2^2 (3\sqrt{3})^2 - 6^2} = 6\sqrt{2}$$

四面体 ABCP の体積を V とすると²

$$V = \frac{1}{6} S \cdot PH = \frac{1}{6} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{|p - q + 1|}{\sqrt{2}} = |p - q + 1|$$

$(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$ より, $p-9 = \cos \theta$, $q-7 = \sin \theta$ とおくと

$$p = \cos \theta + 9, \quad q = \sin \theta + 7$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } V &= |p - q + 1| = |(\cos \theta + 9) - (\sin \theta + 7) + 1| \\ &= |3 - (\sin \theta - \cos \theta)| = 3 - \sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ) \end{aligned}$$

ゆえに $3 - \sqrt{2} \leq V \leq 3 + \sqrt{2}$

よって 最大値 $3 + \sqrt{2}$, 最小値 $3 - \sqrt{2}$ ■

²http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai_bun_2016.pdf [3] の解説を参照.

4 (1) 2つの整式 $f(x)$, $g(x)$ が満たす恒等式

$$(*) \begin{cases} f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7 \\ g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

により, $f(x)$, $g(x)$ の次数をそれぞれ m , n とすると

$$\begin{cases} 2m = 2 + n & \cdots \textcircled{1} \\ 3n = \max(4 + m, 2 + n) & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(i) $4 + m \geq 2 + n$ のとき, $\textcircled{2}$ より $3n = 4 + m$ ゆえに $m = 3n - 4$
これと $\textcircled{1}$ を条件に注意して解くと $m = n = 2$

(ii) $4 + m < 2 + n$ のとき, $\textcircled{2}$ より $3n = 2 + n$ ゆえに $n = 1$
これを $\textcircled{1}$ に代入すると, $m = \frac{3}{2}$ となり, 不適.

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから, 題意は成立する.

(2) $(*)$ の第 1 式において, x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(-x) + 7$$

これと $(*)$ の第 1 式により $g(-x) = g(x) \cdots \textcircled{3}$

また, $(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(-x) - 6x^2 - 2$$

$\textcircled{3}$ より, $g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

これと $(*)$ の第 2 式より $f(-x) = f(x)$

また, $(*)$ に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 2g(0) + 7, \quad g(0) = -2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 3$$

以上の結果から, $f(x) = ax^2 + 3$, $g(x) = px^2 - 2$ とおくと, $(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4 + 3 = (x^2 + 2)(px^2 - 2) + 7 \\ px^6 - 2 = x^4(ax^2 + 3) - 3x^2(px^2 - 2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

整理すると
$$\begin{cases} ax^4 = px^4 + 2(p-1)x^2 \\ px^6 = ax^6 - 3(p-1)x^4 \end{cases}$$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = p, \quad p - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = p = 1$$

よって $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x^2 - 2$ ■

2.6 2020年度

1 (1) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - \{3(x-a)^2 + a^3 - 40\} \\ &= -(2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

2次方程式

$$2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40 = 0 \quad \cdots (**)$$

の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-3a)^2 - 2(a^3 + 3a^2 - 40) \\ &= -2a^3 + 3a^2 + 80 = (4-a)(2a^2 + 5a + 20) \\ &= (4-a) \left\{ 2 \left(a + \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{135}{8} \right\} \end{aligned}$$

方程式(**)が異なる2つの実数解をもつから、 $D > 0$ より

$a \geq 0$ に注意して、 $4-a > 0$ を解くと $0 \leq a < 4$

(2) 2次方程式(**)の解を α , β とおくと ($\alpha < \beta$)

$$\beta - \alpha = \frac{3a + \sqrt{D/4}}{2} - \frac{3a - \sqrt{D/4}}{2} = \sqrt{D/4}$$

$$f(x) - g(x) = -2(x-\alpha)(x-\beta)$$

$\alpha \leq x \leq \beta$ において、 $f(x) - g(x) \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - g(x)\} dx = -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{3}\{D/4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$h(a) = D/4 \text{ とおくと } S = \frac{1}{3}\{h(a)\}^{\frac{3}{2}}$$

$$h(a) = -2a^3 + 3a^2 + 80 \text{ より } h'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a-1)$$

a	0	...	1	...	(4)
$h'(a)$		+	0	-	
$h(a)$		↗	81	↘	

よって、求める S の最大値は $\frac{1}{3}\{h(1)\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 81^{\frac{3}{2}} = 243$ ■

- 2 (1) 4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, p)$, $C(q, r, s)$ について,
 $OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $OB = OA$ であるから

$$\sqrt{1^2 + p^2} = \sqrt{2} \quad \text{条件 } p > 0 \text{ により } p = 1$$

$OC^2 = AC^2 = BC^2 = 2$ であるから

$$(*) \begin{cases} q^2 + r^2 + s^2 = 2 \\ (q-1)^2 + (r-1)^2 + s^2 = 2 \\ (q-1)^2 + r^2 + (s-1)^2 = 2 \end{cases}$$

(*) の第 2 式, 第 3 式をそれぞれ整理すると

$$\begin{aligned} (q^2 + r^2 + s^2 - 2) - 2(q + r - 1) &= 0, \\ (q^2 + r^2 + s^2 - 2) - 2(q + s - 1) &= 0 \end{aligned}$$

(*) の第 1 式を上 の 2 式に代入することにより

$$\begin{cases} q + r - 1 = 0 \\ q + s - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに } (**) \begin{cases} q = 1 - s \\ r = s \end{cases}$$

(**) を (*) の第 1 式に代入すると

$$(1 - s)^2 + s^2 + s^2 = 2 \quad \text{ゆえに } (s - 1)(3s + 1) = 0$$

$s > 0$ に注意して $s = 1$ (***) より $q = 0, r = 1$

よって $p = 1, q = 0, r = 1, s = 1$

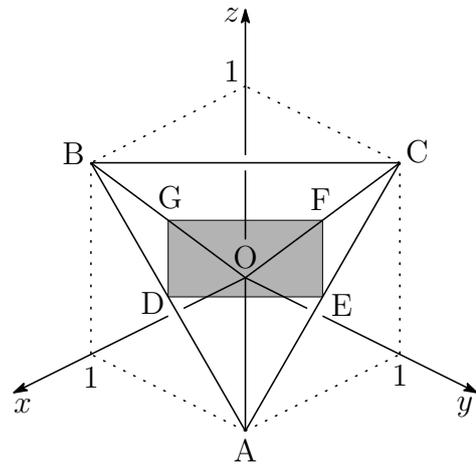
- (2) 2点 O, A の z 座標が 0 で, 2点 B, C の z 座標が 1 であるから, 四面体 $OABC$ の平面 $z = t$ による断面は, 線分 AB, AC, OC, OB を $t : 1 - t$ に内分する点を頂点とする四角形である. これらの頂点を順に D, E, F, G とおくと

$$\begin{aligned} \vec{DE} &= \vec{GF} = t\vec{BC} \\ \vec{GD} &= \vec{FE} = (1 - t)\vec{OA} \end{aligned}$$

$\vec{BC} = (-1, 1, 0)$, $\vec{OA} = (1, 1, 0)$ より $\vec{BC} \perp \vec{OA}$, この断面積を S とすると

$$S = t(1 - t)|\vec{BC}||\vec{OA}| = 2t(1 - t) = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$0 \leq t \leq 1$ より, 断面積は, $t = \frac{1}{2}$ のとき, 最大値 $\frac{1}{2}$ をとる. ■



- 3 (1) $w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x) = 0$ の解であるから、
 $f(x)$ は、 $(x - w)(x - \bar{w})$ 、すなわち、 $x^2 - x + 1$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c \\ &= (x^2 - x + 1)(x + a + 1) \\ &\quad + (a + b)x - a + c - 1 \end{aligned}$$

したがって $a + b = 0, \quad -a + c - 1 = 0$

よって $a = c - 1, \quad b = 1 - c$

- (2) (1) の結果から $f(x) = x^3 + (c - 1)x^2 + (1 - c)x + c$
 ゆえに $f(1) = c + 1, \quad f(-1) = 3c - 3$
 $f(1)$ を 7 で割ると 4 余るから

$$c + 1 \equiv 4 \quad \text{ゆえに} \quad c \equiv 3 \pmod{7}$$

したがって、整数 k を用いて $c = 7k + 3 \cdots \textcircled{1}$

$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るから

$$3c - 3 \equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad 4 \cdot 3c = 4 \cdot 5 \quad \text{すなわち} \quad c \equiv 9 \pmod{11}$$

① を上式に代入すると

$$7k + 3 \equiv 9 \quad \text{ゆえに} \quad 3 \cdot 7k \equiv 3 \cdot 6 \quad \text{すなわち} \quad k \equiv 4 \pmod{11}$$

したがって、整数 l を用いて $k = 11l + 4$

これを ① に代入すると $c = 7(11l + 4) + 3 = 77l + 31$

c の絶対値が 40 以下であるから

$$c = 31 \quad \text{ゆえに} \quad a = 30, \quad b = -30 \quad \cdots (*)$$

(1) の結果から

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x + a + 1)$$

(*) をこれに代入して

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 31)$$

$f(x) = 0$ の解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \quad -31$ ■

- 4 (1) X が 5 で割り切れない, すなわち, 4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0 , X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\frac{625}{1296} + \frac{500}{1296}\right) = \frac{19}{144}$$

- (2) X が 2 で割り切れない, すなわち, 4 回とも奇数の目が出る確率を q_0 , X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (q_0 + q_1) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \frac{37}{48}$$

- (3) X が 100 の倍数となるは, 出る目の組合せが次の (i)~(iv) の場合である.

- (i) $\{A, A, 5, 5\}$ のとき ($A = 2, 6$)

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

- (ii) $\{4, 5, 5, B\}$ のとき ($B = 1, 2, 3, 6$)

$$\frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

- (iii) $\{4, 4, 5, 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

- (iv) $\{4, 5, 5, 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

- (i)~(iv) より, 求める確率は $\frac{24 + 48 + 6 + 4}{1296} = \frac{82}{1296} = \frac{41}{648}$ ■

第 3 章 一般前期研究

九州大学の入試問題(数学)の特徴として、毎年出題される「確率」「微積分」がある。旧課程の数学 A の分野に期待値(確率変数の平均)があり、これをテーマとする九大(経済工学部)らしい問題が多岐にわたり出題されていた。経済工学部で扱う金融工学が扱うテーマの中心に期待値(期待金額)があり、これに由来する問題でもあった。現行課程では、期待値が数学 B の「確率分布と統計」の分野で扱うことになり、同分野が九州大学の出題の範囲外であるため、「確率」の出題内容がかなり限られてきた印象を持つ。こうした中、2018 年に出題された条件付き確率に関する問題は目新しい。この分野に関連する問題について研究しておく必要がある。具体的には「部品 a, b, c が不良品である 3 つの事象は互いに独立であるかどうか」を扱う問題などがその延長上にある。

文系であるが、2016 年研究に示したように外積などの教科書 $+\alpha$ の知識があった方がよい。問題によっては、緻密な計算力を要するものもある。普段からじっくり問題を考えることを心掛け、理由と結論を的確に記述する習慣を身に付ける必要がある。

3.1 2015年度

3.1.1 3番 研究

設問 n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ.

問 解

解答 1回の操作で青玉の個数は1個だけ増減する. 最初に青玉が1個(奇数個)であるから, 奇数回目の操作で青玉は偶数個となる. したがって, 奇数回目の操作で青玉が3個(奇数個)にならない. よって, 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない.

操作を n 回繰り返す中で袋の中の玉が3個とも青玉になることなしに, 青玉の個数が1個である確率を p_n とする.

(i) n が奇数のとき

上に示したように奇数回目に青玉が1個になることはないから $p_n = 0$

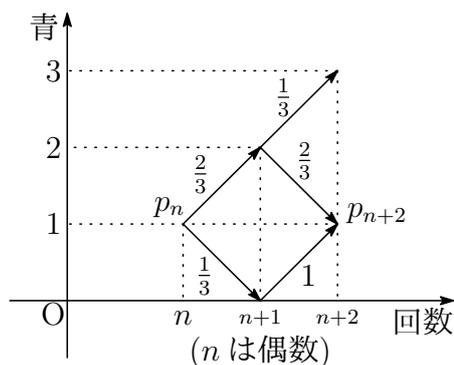
(ii) n が偶数のとき $p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{7}{9} p_n$$

ゆえに
$$p_n = \left(\frac{7}{9} \right)^{\frac{n}{2}}$$

n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2} \times \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$



参考 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ.

(九大理系)

$$\frac{2}{9} \left(\frac{7}{9} \right)^3 = \frac{686}{6561}$$

3.2 2016年

3.2.1 2番(4) 外積(ベクトル積)

$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおくと

問 解

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}}{2+1} = \frac{\vec{b} + 2 \cdot \frac{3}{4}\vec{c}}{3} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{AP} &= k\overrightarrow{AE} = \frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\}\end{aligned}$$

CR : RD = 3(1-t) : 2t であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{2t\overrightarrow{AC} + 3(1-t)\overrightarrow{AD}}{3(1-t) + 2t} = \frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b} + 2t\vec{c}\}$$

したがって $\overrightarrow{QP} = \frac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b} - 3\vec{c})$, $\overrightarrow{QR} = \frac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b} - 3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え、外積の性質を用いると¹

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} = -\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b} \times \vec{c}$$

よって $\triangle PQR : \triangle ABC = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)} : 1$

外積は高校数学の範囲外であるから、2次試験では使えないが、センター試験では、非常に有効な計算法である。なお、外積(ベクトル積)の演算について、次式が成り立つことに注意したい。

$$\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b}$$

また、これに $\vec{c} = \vec{b}$ を代入すると $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

3.3 2017年

3.3.1 1番(2) 研究

$y = kx^2 \cdots \textcircled{1}$ は $y = x^2 \cdots \textcircled{2}$ を x 軸を元に y 軸方向に k 倍だけ拡大したものであるが、 $\textcircled{1}$ 上の点 $P(t, kt^2)$ に対して $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$ となる点 $Q(x, y)$ をとると 問 解

$$(x, y) = k(t, kt^2) \quad \text{ゆえに} \quad x = kt, \quad y = (kt)^2$$

これから、点 Q の描く軌跡は、 $y = x^2$ である。

したがって、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ は相似であり、その相似比は $1 : |k|$ である。

一般に、放物線は相似であり、2つの放物線

$$C_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1, \quad C_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

の相似比は $\frac{1}{|a_1|} : \frac{1}{|a_2|}$ である。

右の図のように、 C_1, C_2 と2本の共通接線との接点を B, C, D, E とすると、点 A は線分 BD および線分 CE を

$$\frac{1}{|a_1|} : \frac{1}{|a_2|}$$

に内分するである。また、2つの斜線部分の面積を S_1, S_2 とすると、面積比は相似比の2乗に比例するから

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{a_1^2} : \frac{1}{a_2^2}$$

特に、 $S_1 = \frac{1}{3}\triangle ABC$, $S_2 = \frac{1}{3}\triangle ADE$ である²。

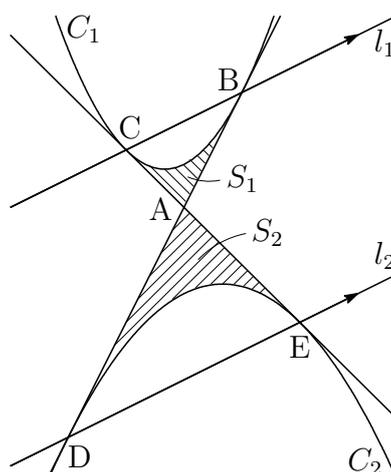
本題の点 A は C_1 の頂点 $(0, 1)$ と C_2 の頂点 $(0, a)$ を $1 : 2$ に内分する点で

$$A \left(0, \frac{2+a}{3} \right)$$

また、 C_1 上の点 P について、 $\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{AP}$ をみたす点 Q の軌跡が C_2 である。

点 A を通り、傾き m の直線 $y = mx + \frac{2+a}{3}$ が $C_1 : y = 2x^2 + 1$ と接するとき、2次方程式 $2x^2 - mx + \frac{1-a}{3} = 0$ の係数により

$$(-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1-a}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad m = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}$$



²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun.2009.pdf 4 の補足を参照。

3.3.2 4番(1) ユークリッドの互除法

n が m で割り切れること(m が n の約数)を $m|n$ と表記し, 整数 x, y の最大公約数を (x, y) と表記すると 問 解

$$(x, y) | x, \quad (x, y) | y$$

が成り立つ.

ユークリッドの互除法

2整数 a, b について($a > b > 0$), a を b で割ったときの商を q , 余りを c とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \quad (a, b) = (b, c)$$

$$c = 0 \text{ のとき} \quad (a, b) = b$$

証明 $c \neq 0$ のとき, $a = bq + c$ より $(b, c) | a$ また, $(b, c) | b$ であるから, (b, c) は a と b の公約数, したがって

$$(b, c) | (a, b) \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様に, $c = a - bq$ より $(a, b) | c$ また, $(a, b) | b$ であるから, (a, b) は b と c の公約数, したがって

$$(a, b) | (b, c) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad (a, b) = (b, c)$$

$c = 0$ のとき, 自明.

証終

補足 さらに, b を c で割った余りが d であるとき $(b, c) = (c, d)$

$$\text{すなわち} \quad (a, b) = (b, c) = (c, d)$$

2つの整数 a_1, a_2 について($a_1 > a_2 > 0$), a_1 を a_2 で割った余りを a_3 , さらに, a_2 を a_3 で割った余りを a_4 , 順次, a_k を a_{k+1} で割った余りを a_{k+2} とすると

$$(a_1, a_2) = (a_2, a_3) = (a_3, a_4) = \cdots = (a_k, a_{k+1}) = (a_{k+1}, a_{k+2}) = \cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列であるから, 互除法を繰り返すことにより, a_1 と a_2 の最小公倍数を求めることができる.

3.4 2018年

3.4.1 4番 条件付き確率と事象の独立

A, B を事象とし, B における A の条件付き確率は

問 解

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

で定義される (大学などでは $P(A|B)$ と標記するのが一般的である).

A と B が独立であるとき

$$P_B(A) = P(A) \quad \text{および} \quad P_A(B) = P(B)$$

が成立する. このとき, 上の2式は同値である. 実際, 第1式から

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \iff \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \iff P_A(B) = P(B)$$

また, A と B が独立であることを, 次式で示すことができる.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

性質 A と B が独立ならば \bar{A} と B も独立である

証明

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}P(B) = P(\bar{A})P(B) \end{aligned}$$

よって, \bar{A} と B は独立である.

証終

A と B が独立であるから, 性質により, A と \bar{B} も独立である.

さらに, \bar{A} と B が独立であるから, 性質により, \bar{A} と \bar{B} も独立である.

したがって, A と B が独立であるとき, 次は3つは独立である.

$$A \text{ と } \bar{B}, \quad \bar{A} \text{ と } B, \quad \bar{A} \text{ と } \bar{B}$$

最後の性質は, 次から示すこともできる.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\} = P(\bar{A})P(\bar{B}) \end{aligned}$$

参考 本題において, $P_A(B) = 3q$, $P(B) = (1 + 2p)q$ であるから, $p \neq 1$, $q \neq 0$ ならば, $P_A(B) \neq P(B)$ となり, A と B は独立ではない.