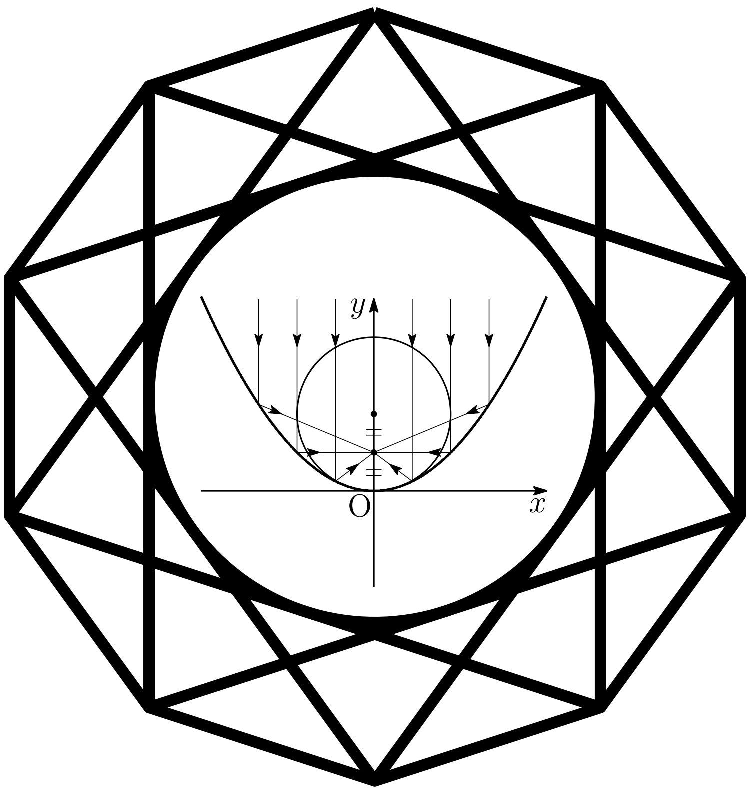
入試の軌跡

九州大学　文系

2015 − 2019

数　学



2019 年 10 月 15 日

Typed by LaTeX 2$_\varepsilon$

序

本書は，九州大学文学部・教育学部・法学部・経済学部 (経済・経営)・医学部 (保健 [看護])・共創学部受験者のための入試問題集である．

本書には，平成 27 年 (2015 年) 度から平成 31 年 (2019 年) 度までの 2 次試験前期日程の数学問題をすべて掲載した．第 1 章には問題を掲載し，第 2 章には解答，第 3 章には研究を付けた．

また，平成 9 年 (1997 年) から平成 31 年 (2019 年) までの一般前期試験問題および解答については，年度ごとに次のサイトに掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．

2. 本書は，電子文書 (PDF) での利用を想定し，ハイパーリンクを施した．利用する際には，全画面表示 (Ctrl+L) および描画領域に合わせる (Ctrl+3) と見やすくなる．ページスクロールには，(Ctrl+▲，Ctrl+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る (Alt+◀)，進む (Alt+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには ESC．

3. 平成 13 年 (2001 年) 度から平成 26 年 (2014 年) 度までの旧課程の一般前期試験問題をまとめた『入試の軌跡　九州大学　文系』は，次である．

   http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_bun.pdf

4. また，本書の姉妹版である『入試の軌跡　九州大学　英語』も次のサイトに掲載しており，併せて活用いただけることを切に願うものである．

   http://kumamoto.s12.xrea.com/lis.html

令和元年 6 月　編者

目 次

第 1 章　一般前期問題

2003 年度以前の入試は，必答問題 2 題と，選択問題 3 題を 1 グループとした 2 グループから 1 題ずつ選んで 120 分で解答する形式であった．2004 年度入試以降は選択問題はなくなり，必答問題 4 題を 120 分で解答する現在の形式になった．

2014 年度入試においては，来年度からの新課程を意識した整数問題が出題されている．ユークリッドの互除法や合同式についても学習しておく必要があるようだ．

九大入試の特徴として，教科書にある公式の証明問題，教科書の典型的な問題についても確かな理解と応用力を問う問題が出題される．文系としてはめずらしく，論理的な展開能力が要求される．

平成 26 年 3 月　編者

平成 27 年 (2015 年) に現行課程へ移行し，移行後の出題を見ると，新たに導入された「整数の性質」の分野から，ユークリッドの互除法 (2017 年)，合同式 (2015 年，2016 年，2018 年) が出題されており，今後とも重点的に学習しておく必要がある．

過去の出題からも分かるように,「場合の数と確率」「微積分」は重要分野である．

平成 30 年 9 月　編者

出題分野

2015 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	微分法と積分法	面積，軌跡
2	標準	数学 B	空間のベクトル	正四面体，三角形の面積
3	やや易	数学 A	場合の数と確率	操作による硬貨の枚数の確率
4	やや難	数学 A	整数の性質	合同式

2016 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	微分法と積分法	3 次関数のグラフによる図形の面積
2	標準	数学 A	図形の性質	チェバの定理，メネラウスの定理
3	難	数学 A	場合の数と確率	重複組合せとその応用
4	標準	数学 A	整数の性質	合同式

2017 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	微分法と積分法	2 つの放物線による図形の面積比
2	標準	数学 I	数と式	有理数と無理数
		数学 II	図形と方程式	座標平面上の三角形
3	標準	数学 A	場合の数と確率	サイコロの目による勝者の確率
4	標準	数学 A	整数の性質	ユークリッドの互除法

2018 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	微分法と積分法	3 次関数のグラフによる図形の面積
2	標準	数学 A	整数の性質	合同式
3	標準	数学 B	平面のベクトル	三角形に関する証明問題
4	標準	数学 A	場合の数と確率	条件付き確率

2019 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 A	場合の数と確率	硬貨に書かれた数字の積について
2	標準	数学 II	微分法と積分法	3 次関数の極大・極小
3	標準	数学 B	空間のベクトル	四面体の体積
4	やや難	数学 II	式と証明	恒等式

出題分野 (2010-2019)

		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式								2		
	2 次関数										
	図形と計量	1				3					
	データの分析										
II	式と証明										4
	複素数と方程式										
	図形と方程式				2·4	1			2		
	三角関数	3				3					
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	3	1	2	4	1	1	1	1	1	2
A	場合の数と確率	2	4	4	3	4*	3	3	3	4	1
	整数の性質			3		2	4	4	4	2	
	図形の性質					3		2			
B	平面上のベクトル		3							3	
	空間のベクトル			1	1		2				3
	数列	4	2	4							
	確率分布と統計										

数字は問題番号 (∗ は旧課程の内容を含む)

1.1　2015 年度

1　座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

を考える。ただし，a，b は実数とする。

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a，b に関する条件を求めよ。

以下，a，b が (1) の条件を満たすとし，C_1 と C_2 で囲まれる面積が 9 であるとする。

(2) b を a を用いて表せ。

(3) a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。

2　1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q，辺 OC を 1 : 3 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ。

(3) 三角形 PQR の面積を求めよ。

3 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を考える。 研

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

この操作を 4 回繰り返す。もらう硬貨の総数が 1 枚である確率と，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率をそれぞれ求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。

(2) p を素数とし，k を 0 以上の整数とする。$2^{p-1} - 1 = p^k$ を満たす p，k の組をすべて求めよ。

1.2 2016 年度

1 座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a，b は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2) β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。

2 t を $0<t<1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D，E，F とする。また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0<t<t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=\ell\mathrm{CD}$ を満たす実数 k，ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。 研

3 袋の中に，赤玉が 15 個，青玉が 10 個，白玉が 5 個入っている。袋の中から玉を 1 個取り出し，取り出した玉の色に応じて，以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

(操作) コインが点 $(x,\ y)$ にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x+1,\ y)$ に移動，青玉を取り出したときには点 $(x,\ y+1)$ に移動，白玉を取り出したときには点 $(x-1,\ y-1)$ に移動し，取り出した球は袋に戻す。

最初に原点 $(0,\ 0)$ にコインを置き，この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後，コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 操作を n 回繰り返したとき，白玉を 1 度だけ取り出したとする。このとき，到達点となり得る点をすべて求めよ。

(2) 操作を n 回繰り返したとき，到達点となり得る点の個数を求めよ。

(3) 座標平面上の 4 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1, -1)$，$(1, -1)$ を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき，到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。P_3 を求めよ。

(4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。

4 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

 (i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる。

 (ii) N を十進数で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

 (iii) N は 13 で割り切れる。

1.3 2017 年度

1 定数 $a < 1$ に対し，放物線 $C_1 : y = 2x^2 + 1$，$C_2 : y = -x^2 + a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_1，C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) C_1 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。 研

2 座標平面上に原点 O，点 A$(1,\ a)$，点 B$(s,\ t)$ がある。以下の問いに答えよ。

(1) $a = 1$ のとき，△OAB が正三角形となるような $(s,\ t)$ をすべて求めよ。

(2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(3) △OAB が正三角形であり，a が有理数であるとき，s と t のうち少なくとも 1 つは無理数であることを示せ。

3 A と B の 2 人が A，B，A，B，$\cdots$ の順にさいころを投げ，先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め，さいころ投げを終える。以下では，さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ。さらに，p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ。

(2) さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

(3) 自然数 k に対し，さいころを投げた回数が $2k + 1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。 研

(2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3) 225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。

1.4 2018 年度

1 座標平面内の曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接しているとする。ただし，a，b は実数，$c > 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) a，b をそれぞれ c を用いて表せ。

(2) この曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S を最小にする c の値を求めよ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示

$$101101101101101101_{(2)}$$

をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。

3 平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し，

$$L = \mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ および $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくとき，次の等式を示せ。

$$L = 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

(2) L を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また，L の最小値は

$$\frac{1}{3}(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2)$$

であることを示せ。

4 3つの部品a，b，cからなる製品が多数入った箱がある。製品を1つ取り出したとき，部品a，b，cが不良品である確率について次のことがわかっている。

研

- 部品aが不良品である確率はpである。
- 部品aが不良品でないとき，部品bが不良品である確率はqである。
- 部品aが不良品であるとき，部品bも不良品である確率は$3q$である。
- 部品bが不良品でないとき，部品cが不良品である確率はrである。
- 部品bが不良品であるとき，部品cも不良品である確率は$5r$である。

ただし，$0 < p < 1$，$0 < q < \frac{1}{3}$，$0 < r < \frac{1}{5}$である。以下の問いに答えよ。

(1) 製品を1つ取り出したとき，部品a，bの少なくとも一方が不良品である確率をp，qを用いて表せ。

(2) 製品を1つ取り出したとき，部品cが不良品である確率をp，q，rを用いて表せ。

(3) 製品を1つ取り出したところ部品cが不良品であった。このとき，部品bも不良品である確率をp，qを用いて表せ。

1.5　2019 年度

1 表に 3，裏に 8 が書かれた硬貨がある。この硬貨を 10 回投げるとき，出た数字 10 個の積が 8 桁になる確率を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

2 k を実数とする。3 次関数 $y = x^3 - kx^2 + kx + 1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき，k の値を求めよ。

3 座標空間内の 3 点 A(1, 2, 3)，B(3, 2, 3)，C(4, 5, 6) を通る平面を α とし，平面 α 上にない点 P(6, p, q) を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から平面 α に下ろした垂線と α との交点を H とする。線分 PH の長さを p，q を用いて表せ。

(2) 点 P が $(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$ を満たしながら動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値と最小値を求めよ。

4 0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2+2)g(x) + 7$$
$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

第 2 章　一般前期解答

問題冊子 (A4 で 12 ページ) は，見開きで問題が偶数ページ，下書き (計算スペース) が奇数ページに配置されており，問題ページの下側の余白を含め十分な計算スペースがある．解答用紙は，$\boxed{\mathbf{22}}$〜$\boxed{\mathbf{25}}$の番号が書かれた 4 枚の A3 用紙がはさみ込まれており，問題$\boxed{\mathbf{1}}$〜$\boxed{\mathbf{4}}$を順次指定された解答用紙に答えるようになっている (2004 年度以降の必答 4 題の出題形式)．

設問ごとに解答欄が仕切られているため，十分な解答スペースではなく，途中の計算などを書いていくスペースはない (解答用紙の裏面の使用は不可)．そのため，問題用紙の下書き欄で計算した結果を整理して「理由と計算結果・結論」を明示する必要がある．なお，問題冊子は，試験終了後に持ち帰ることができる．

出題者は受験生に簡潔な表現力を要求したものと考えられる．理学部数学科の採点担当者からも，定積分の途中計算などを細かく書く必要はないと聞いた．

対策

1. 標準的な問題を中心に 3 題とやや難の 1 題が例年の出題傾向である．配点はすべて 50 点ずつの計 200 点であるので 120 分で効率的に問題を解いていく必要がある．なお，文学部および医学部保健学科看護学専攻は 100 点満点に換算される．

2. 完答が難しい問題についても，前半の設問はどれも基本または標準的な問題が配置されているので，確実に部分点を狙っていく必要がある．

3. 採点者が読みやすい簡潔な答案の作成を普段から練習しておく．

2.1　2015年度

1　(1) $y=x^2$ と $y=-x^2+ax+b$ から y を消去すると

$$x^2=-x^2+ax+b \quad \text{すなわち} \quad 2x^2-ax-b=0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と C_2 が異なる2点で交わるとき，$(*)$ より

$$(-a)^2-4\cdot2\cdot(-b)>0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a^2+8b>0}$$

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=\frac{a}{2}, \quad \alpha\beta=-\frac{b}{2}$$
$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b} \quad \cdots①$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\{(-x^2+ax+b)-x^2\}\,dx &= -\int_\alpha^\beta(2x^2-ax-b)\,dx\\ &= -2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=9$　ゆえに　$\beta-\alpha=3$　$\cdots②$

①，② より　$\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+8b}=3$　よって　$\boldsymbol{b=-\dfrac{1}{8}a^2+\dfrac{9}{2}}$

(3) (2) の結果から，C_2 は

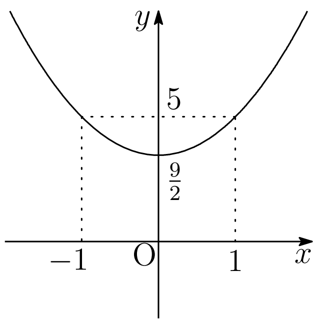
$$y=-x^2+ax-\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2} \quad \text{すなわち} \quad y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2}$$

C_2 の頂点を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{a}{2}, \quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

よって，C_2 の頂点が描く軌跡の方程式は

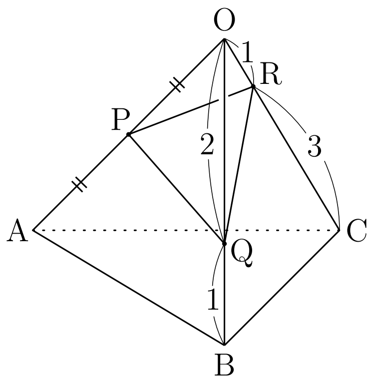
$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$$



その軌跡は，右の図のようになる．

■

2 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと



$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{4}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{4}{9}|\vec{b}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{16}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

よって
$$\mathbf{PQ}=\frac{\sqrt{\mathbf{13}}}{\mathbf{6}},\quad \mathbf{PR}=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}$$

別解 △OPQ および △OPR に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{36}$$
$$\mathrm{PR}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OR}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\\&=\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2\\&=\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{5}{48}}\end{aligned}$$

(3)
$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{36}\cdot\frac{3}{16}-\left(\frac{5}{48}\right)^2}=\frac{\sqrt{\mathbf{131}}}{\mathbf{96}}$$

■

3 1，3回目の操作で青玉の個数は2個または0個． 研

2，4回目の操作で青玉の個数は3個または1個．

したがって，もらう硬貨の枚数は0，1，2枚のいずれかである．

2回目の操作で青玉3個である確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

したがって，2回目の操作で青玉1個である確率は

$$1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

2，4回目の操作で青玉3個，すなわち，もらう硬貨の総数が2枚である確率は

$$\frac{2}{9}\times 1\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{27}}$$

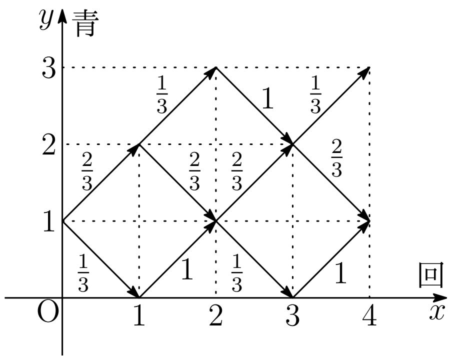
2，4回目の操作で青玉1個，すなわち，硬貨を1枚ももらわない確率は

$$\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{49}{81}$$

よって，もらう硬貨の総数が1枚である確率は

$$1-\left(\frac{2}{27}+\frac{49}{81}\right)=\boldsymbol{\frac{26}{81}}$$

補足 x 回目の操作で青玉が y 個である確率を $P(x,y)$ とすると



$$P(2,3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$
$$P(2,1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{7}{9}$$

4回の操作で硬貨を2枚もらう (青玉が2回3個になる) 確率は

$$P(2,3)\times 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

4回の操作で硬貨を1枚ももらわない確率は

$$\{P(2,1)\}^2=\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$$

■

$\boxed{4}$ (1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

よって，$2^n - 1$ は 3 の倍数である．

(2) $2^{p-1} - 1 = p^k$ (p は素数, k は 0 以上の整数)　$\cdots(*)$

(i) $p = 2$ のとき，$(*)$ は

$$1 = 2^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 0$$

(ii) $p \neq 2$ のとき，p は奇素数であるから，$p - 1$ は偶数である．

(1) の結果から，$2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数である．

$(*)$ より，p^k は 3 を因数にもつから

$$p = 3$$

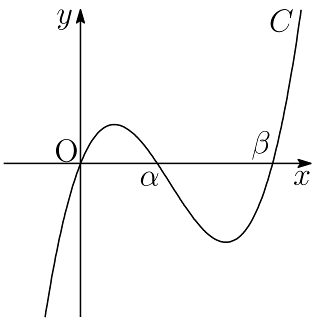
これを $(*)$ に代入すると

$$3 = 3^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 1$$

よって　　$\boldsymbol{(p,\ k) = (2,\ 0),\ (3,\ 1)}$　■

2.2　2016 年度

1 (1) C は x 軸との共有点の x 座標が $x=0,\ \alpha,\ \beta$ であるから，$C: y=f(x)$ の方程式は x^3 の係数に注意して $(0<\alpha<\beta)$



$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3+\frac{1}{2}\alpha\beta x^2$$

とおくと

$$F(0)=0,\quad F(\alpha)=-\frac{1}{12}\alpha^4+\frac{1}{6}\alpha^3\beta,\quad F(\beta)=-\frac{1}{12}\beta^4+\frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha f(x)\,dx-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_0^\alpha-\Big[\,F(x)\,\Big]_\alpha^\beta \\ &= 2F(\alpha)-F(\beta)-F(0) \\ &= 2\left(-\frac{1}{12}\alpha^4+\frac{1}{6}\alpha^3\beta\right)-\left(-\frac{1}{12}\beta^4+\frac{1}{6}\alpha\beta^3\right) \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3\beta-\frac{1}{6}\alpha\beta^3+\frac{1}{12}\beta^4} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= -\frac{2}{3}\alpha^3+\alpha^2\beta-\frac{1}{6}\beta^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\alpha-\beta)\{2\alpha(\beta-\alpha)+\beta^2\} \end{aligned}$$

$0<\alpha<\beta$ であるから　$2\alpha(\beta-\alpha)+\beta^2>0$

したがって

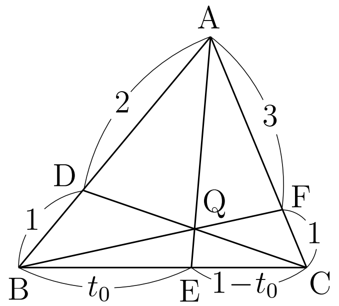
α	(0)	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	(β)
$\frac{dS}{d\alpha}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，S を最小にする α は　$\boldsymbol{\alpha=\frac{\beta}{2}}$　■

2 (1) チェバの定理により

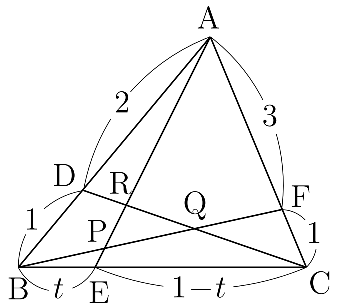
$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

これを解いて　$\boldsymbol{t_0=\frac{3}{5}}$



(2) △AEC および直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$



したがって　$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}=\frac{3}{t}$

よって　$k=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\frac{3}{3+t}}$

△BCD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{2}{3}=1$$

したがって　$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}=\frac{3(1-t)}{2t}$

よって　$\ell=\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CD}}=\frac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}=\boldsymbol{\frac{3(1-t)}{3-t}}$

(3) (2) の図について，△BCF および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1$$

したがって　$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=\frac{3(1-t)}{4t}\quad\cdots①$

$t=\frac{3}{5}$ のとき，P は Q に一致するので　$\frac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{QB}}=\frac{1}{2}\quad\cdots②$

よって　$\triangle\mathrm{BCQ}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(4) $t=\dfrac{3}{5}$ のとき，R は Q に一致するので，(2) の結果から 研

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}=\frac{3\left(1-\frac{3}{5}\right)}{3-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\mathrm{CQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3(1-t)}{3-t}-\dfrac{1}{2}=3-t:3-5t$

また，①，② から

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\frac{3(1-\mathrm{t})}{3(1-\mathrm{t})+4\mathrm{t}}-\frac{1}{3}=3+\mathrm{t}:3-5\mathrm{t}$$

$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{CQ}:\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=(3+t)(3-t):(3-5)^2$$

(3) の結果から　　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)}=\boldsymbol{\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}}$ ■

3 (1) 白玉を 1 度だけ取り出すので，赤玉を m 回 $(m=0,1,\cdots,n-1)$ 取り出すとすると，青玉を取り出す回数は $n-m-1$ であるから，到達点 $(x,\ y)$ は

$$x=m-1,\quad y=(n-m-1)-1=n-m-2$$

よって，到達点は　$\boldsymbol{(m-1,\ n-m-2)}$　$\boldsymbol{(m=0,1,\cdots,n-1)}$

(2) 赤玉，青玉，白玉を取り出す回数を，それぞれ i，j，k とすると，到達点 $(x,\ y)$ は $(i+j+k=n)$

$$x=i-k,\quad y=j-k$$

このとき，$k=n-i-j$ であるから

$$(*)\begin{cases} x=i-(n-i-j)=2i+j-n \\ y=j-(n-i-j)=i+2j-n \end{cases}$$

ここで

$$2i+j-n=2i'+j'-n,\quad i+2j-n=i'+2j'-n$$

とすると

$$2(i-i')+(j-j')=0,\quad (i-i')+2(j-j')=0$$

これを解くと　　$(i,\ j)=(i',\ j')$
したがって，$(i,\ j)\neq(i',\ j')$ のとき

$$(2i+j-n,\ i+2j-n)\neq(2i'+j'-n,\ i'+2j'-n)$$

このことから，$(i,\ j,\ k)$ の組合せの個数とその到達点の個数は一致する．
よって，求める到達点の個数は，赤玉，青玉，白玉の 3 種類の玉から n 個取り出す重複組合せの総数に一致するので

$${}_3\mathrm{H}_n={}_{3+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

(3) $(*)$ から

$$i=\frac{2x-y}{3}+\frac{n}{3},\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+\frac{n}{3}\qquad\cdots(**)$$

$n=3$ のとき，上式より

$$i=\frac{2x-y}{3}+1,\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+1$$

$(x,\ y)$ が D 内にあるとき $(k=3-i-j)$

$$(x,\ y,\ i,\ j,\ k)=(-1,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1),\ (1,-1,\ 2,\ 0,\ 1)$$

よって，求める確率は

$$P_3=\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{6}+\frac{3!}{1!1!1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{25}{72}}$$

(4) $n=3N$ のとき，$(**)$ より

$$i=\frac{2x-y}{3}+N,\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+N$$

$(x,\ y)$ が D 内にあるとき $(k=3N-i-j)$

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ i,\ j,\ k)=(-1,\ 1,\ N-1,\ N+1,\ N),\ (0,\ 0,\ N,\ N,\ N),\\ (1,-1,\ N+1,\ N-1,\ N)\end{aligned}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P_{3N}&=\frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\&\quad+\frac{(3N)!}{N!N!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^{N}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\&\quad\quad+\frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\&=\boldsymbol{\frac{(19N+6)(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^2(N+1)!}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 仮定から　$10^n \equiv a_n,\quad 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から　$10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって　$a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より　$\boldsymbol{a_1 = 10}$

(1) の結果を用いると，法 13 について

$$\begin{aligned} a_2 &\equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9 \\ a_3 &\equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12 \\ a_4 &\equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3 \\ a_5 &\equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4 \\ a_6 &\equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a_2 = 9,\ a_3 = 12,\ a_4 = 3,\ a_5 = 4,\ a_6 = 1}$

(3) 整数 p，q を $1 \leqq p \leqq 9$，$0 \leqq q \leqq 9$ とし，求める自然数 N を

$$N = p\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 10^2 + 6\cdot 10 + q$$

とおくと，法 13 に関して

$$\begin{aligned} N &\equiv p\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 10^2 + 6\cdot 10 + q \\ &\equiv p\cdot 4 + 2\cdot 3 + 9 + 6\cdot 10 + q = 4p + q + 75 \\ &\equiv 4p + q - 3 \end{aligned}$$

このとき，$N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0),\ (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1),\ (9,\ 6)$$

よって，求める自然数 N は

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

■

2.3 2017 年度

$\boxed{1}$ (1) 求める直線を $l : y = px + q$ とおく．C_1 と l の方程式から y を消去すると

$$2x^2 + 1 = px + q \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - px - q + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と l は接するので，方程式 $(*)$ の係数について

$$(-p)^2 - 4{\cdot}2(-q+1) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 + 8q - 8 = 0 \quad \cdots ①$$

同様に，C_2 と l の方程式から y を消去すると

$$-x^2 + a = px + q \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + px + q - a = 0 \quad \cdots (**)$$

C_2 と l は接するので，上の方程式の係数について

$$p^2 - 4{\cdot}1(q - a) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 - 4q + 4a = 0 \quad \cdots ②$$

①，② から $\quad p^2 = \dfrac{8}{3}(1-a)$，$q = \dfrac{1}{3}(a+2)$

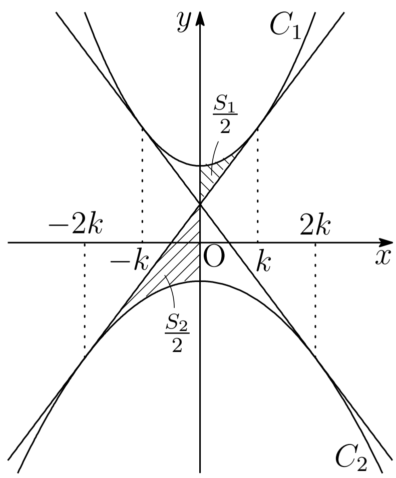
よって，求める 2 直線の方程式は

$$\boldsymbol{y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}\,x + \frac{1}{3}(a+2)}$$

(2) (1) の結果から，次の 2 式は平方式になることに注意して 研

$$2x^2 + 1 - (px + q) = 2\left(x - \frac{p}{4}\right)^2$$
$$px + q - (-x^2 + a) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$p = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}(1-a)}$ のとき，$k = \dfrac{p}{4}$ とおく．C_1，C_2 および 2 接線は y 軸に関して対称であることに注意して



$$\frac{S_1}{2} = \int_0^k 2(x-k)^2\,dx = \left[\frac{2}{3}(x-k)^3\right]_0^k = \frac{2k^3}{3},$$

$$\frac{S_2}{2} = \int_{-2k}^0 (x+2k)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x+2k)^3\right]_{-2k}^0 = \frac{8k^3}{3}$$

よって $\quad \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{16k^3}{3} \times \dfrac{3}{4k^3} = \boldsymbol{4}$ ■

2 (1) 3 点 O(0, 0)，A(1, 1)，B(s, t) について，△OAB が正三角形であるから，$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OB}^2=\mathrm{AB}^2$ より

$$1^2+1^2=s^2+t^2=(s-1)^2+(t-1)^2$$

整理すると　$s^2+t^2=2$，　$s+t=1$

これを解いて　$\boldsymbol{(s,\ t)=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}\right)}$　**(複号同順)**

(2) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると，自然数 p，q を用いて

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}\quad (p,\ q\ \text{は互いに素})$$

とおける．これから，$p=\sqrt{3}q$ の両辺を平方すると

$$p^2=3q^2\quad\cdots①$$

p^2 は 3 の倍数であるから，p は 3 の倍数である．

したがって，$p=3k$ (k は自然数) とおけ，これを ① に代入すると

$$(3k)^2=3q^2\quad \text{ゆえに}\quad q^2=3k^2$$

q^2 は 3 の倍数であるから，q も 3 の倍数である．このことは，p と q が互いに素であることに反する．よって，$\sqrt{3}$ は無理数である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ a)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(s,\ t)$ であるから，△OAB の面積により

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin 60^\circ=\frac{1}{2}|t-as|$$

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であることに注意して

$$\frac{1}{2}(a^2+1)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}|t-as|\quad \text{ゆえに}\quad \sqrt{3}=\frac{2|t-as|}{a^2+1}\quad\cdots(*)$$

a が有理数であるとき，2 数 s，t がともに有理数であるとすると，$(*)$ の右辺は有理数となり，(2) の結果に矛盾する．

よって，s と t のうち少なくとも 1 つは無理数である．■

3 (1) サイコロを1回投げるとき，勝敗が決まらない，すなわち，1または2の目が出る確率は

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

n回以下では勝敗が決まらないのは，n回とも1または2の目が出ることであるから，よって，求める確率p_nは

$$p_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n=\boldsymbol{\frac{1}{3^n}}$$

p_nが0.005より小さいとき

$$\frac{1}{3^n}<0.005=\frac{1}{200}\quad \text{ゆえに}\quad 3^n>200$$

$3^4=81$，$3^5=243$であるから，求める最小のnは　　$\boldsymbol{n=5}$

(2) サイコロを1回投げるとき，勝者が決まる，すなわち，3，4，5，6の目が出る確率は

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

さいころを投げた回数が3回以下でAが勝つのは，1回目または3回目でAが勝つことであるから，求める確率は

$$\frac{2}{3}+p_2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}\times\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{20}{27}}$$

(3) 求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\sum_{i=1}^{k}p_{2i}\times\frac{2}{3}&=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{3^{2i}}=\frac{2}{3}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{9}\right)^i\\&=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{9}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{9^{k+1}}\right)}\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) ユークリッドの互除法を用いて　$\boxed{研}$

$$\begin{aligned} 2017 &= 225 \times 8 + 217, \\ 225 &= 217 \times 1 + 8, \\ 217 &= 8 \times 27 + 1 \end{aligned}$$

よって，求める最大公約数は　**1**

(2) $225 = 3^2 \times 5^2$，$2017 = 15 \times 134 + 7$
全体集合を $U = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 134\}$ とし，その部分集合を

$$\begin{aligned} A &= \{3{\cdot}1,\ 3{\cdot}2,\ 3{\cdot}3,\ \cdots,\ 3{\cdot}44\}, \\ B &= \{5{\cdot}1,\ 5{\cdot}2,\ 5{\cdot}3,\ \cdots,\ 5{\cdot}26\} \end{aligned}$$

とすると

$$A \cap B = \{15{\cdot}1,\ 15{\cdot}2,\ 15{\cdot}3,\ \cdots,\ 15{\cdot}8\}$$

したがって，求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap \overline{B}) &= n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 134 - (44 + 26 - 8) = \mathbf{72} \end{aligned}$$

(3) $225 = 3^2 \times 5^2$，$15 = 3 \times 5$，$1998 = 2 \times 3^3 \times 37$，$111 = 3 \times 37$
求める数は 2017 以下で，$3 \times 5 \times 37$ の倍数は

$$\{555n \,|\, n = 1, 2, 3\}$$

ただし，n は 2，3，5 と互いに素であるから，求める数は　**555**　■

2.4 2018 年度

$\boxed{1}$ (1) 曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接するから，曲線の方程式の x^3 の係数および定数項に注意して

$$y = (x-c)^2\left(x + \frac{1}{c}\right) \qquad \cdots(*)$$

とおける．これを展開すると

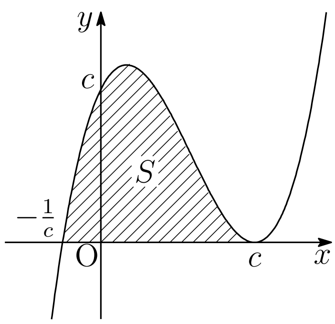
$$y = x^3 + \left(\frac{1}{c} - 2c\right)x^2 + (c^2 - 2)x + c$$

与えられた曲線の方程式と上式の同じ次数の項の係数を比較すると

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{c} - 2c, \quad b = c^2 - 2}$$

(2) $(*)$ により $(c > 0)$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{c}}^{c} \left(x + \frac{1}{c}\right)(c-x)^2\,dx \\ &= \frac{1}{12}\left(c + \frac{1}{c}\right)^4 \end{aligned}$$



$c > 0,\ \dfrac{1}{c} > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$c + \frac{1}{c} \geqq 2\sqrt{c\cdot\frac{1}{c}} = 2$$

上式において，等号が成立するのは

$$c = \frac{1}{c} \quad \text{すなわち} \quad c = 1$$

のときで，このとき S は最小となる．よって $\boldsymbol{c = 1}$

補足 定積分の公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる[1]． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

2 (1) $2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8\equiv 1\pmod 7$ であるから

$$2^n \text{ を 7 で割った余りは } \begin{cases} \boldsymbol{n\equiv 0 \pmod 3}\ \textbf{のとき} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{n\equiv 1 \pmod 3}\ \textbf{のとき} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{n\equiv 2 \pmod 3}\ \textbf{のとき} & \mathbf{4} \end{cases}$$

(2)
$$m=101101101101101101_{(2)}$$

これに (1) の結果を用いると，法 7 に関して

$$m=\sum_{k=0}^{5}(2^2+1)2^{3k}\equiv\sum_{k=0}^{5}5\cdot 1=30\equiv 2 \pmod 7$$

よって，求める余りは　**2**　■

3 (1) $L=\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より

$$\begin{aligned} L&=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 \\ &=|\vec{a}-\vec{x}|^2+|\vec{b}-\vec{x}|^2+|\vec{c}-\vec{x}|^2 \\ &=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2 \\ &=3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とし，$\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とおくと

$$\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\quad \text{ゆえに}\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\vec{g}$$

これを (1) に代入すると

$$\begin{aligned} L&=3|\vec{x}|^2-6\vec{g}\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2 \\ &=3(|\vec{x}|^2-2\vec{g}\cdot\vec{x}+|\vec{g}|^2)+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-3|\vec{g}|^2 \\ &=3|\vec{x}-\vec{g}|^2+\frac{1}{3}\{3|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2+3|\vec{c}|^2-|3\vec{g}|^2\} \end{aligned}$$

ここで
$$\begin{aligned} &3|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2+3|\vec{c}|^2-|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 \\ =&\ 2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+2|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a} \\ =&\ |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2 \\ =&\ |\vec{b}-\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2=(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2) \end{aligned}$$

したがって　$L=|\vec{x}-\vec{g}|^2+\dfrac{1}{3}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)$

よって，$\vec{x}=\vec{g}$，すなわち，P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心であるとき，
L は最小値 $\dfrac{1}{3}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)$ をとる．　■

$\boxed{4}$ a，b，c がそれぞれ不良品である事象をそれぞれ A，B，C とすると　$\boxed{研}$

$$P(A)=p,\ P_{\overline{A}}(B)=q,\ P_A(B)=3q,\ P_{\overline{B}}(C)=r,\ P_B(C)=5r$$

(1) $P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{1-P(A)}$，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ より

$$P(\overline{A}\cap B)=\{1-P(A)\}P_{\overline{A}}(B)=(1-p)q$$
$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=p\cdot 3q=3pq$$

ゆえに　$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$
$=3pq+(1-p)q=(1+2p)q$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=p+(1+2p)q-3pq=\boldsymbol{p+q-pq}\end{aligned}$$

(2) $P_{\overline{B}}(C)=\dfrac{P(\overline{B}\cap C)}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(\overline{B}\cap C)}{1-P(B)}$，$P_B(C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(B)}$ より

$$P(\overline{B}\cap C)=\{1-P(B)\}P_{\overline{B}}(C)=\{1-(1+2p)q\}r$$
$$P(B\cap C)=P(B)P_B(C)=(1+2p)q\cdot 5r=5(1+2p)qr$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(C)&=P(\overline{B}\cap C)+P(B\cap C)\\&=\{1-(1+2p)q\}r+5(1+2p)qr\\&=\{1+4(1+2p)q\}r=\boldsymbol{(1+4q+8pq)r}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，求める確率は

$$P_C(B)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{5(1+2p)qr}{(1+4q+8pq)r}=\boldsymbol{\frac{5(1+2p)q}{1+4q+8pq}}$$

■

2.5　2019年度

$\boxed{1}$ 硬貨を10回投げて，裏が出た回数をnとすると，出た数字10個の積は

$$8^n\cdot 3^{10-n}$$

これが8桁の数であるから　$10^7 \leqq 8^n\cdot 3^{10-n} < 10^8$

辺々の常用対数をとると　$7 \leqq n\log_{10}8 + (10-n)\log_{10}3 < 8$

$\log_{10}8 = 3\log_{10}2 = 3\times 0.3010 = 0.9030$，$\log_{10}3 = 0.4771$ より

$$7 \leqq 0.9030n + 0.4771(10-n) < 8$$

整理すると　$22290 \leqq 4259n < 32290$　ゆえに　$5 + \dfrac{995}{4259} \leqq n < 7 + \dfrac{2477}{4259}$

nは整数 $(0 \leqq n \leqq 10)$ であるから　$n = 6,\ 7$

よって，求める確率は

$${}_{10}\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = (210+120)\times\frac{1}{1024} = \boldsymbol{\frac{165}{512}}$$

■

$\boxed{2}$ $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 1$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 - 2kx + k$

$f(x)$ は極大値と極小値をもつから，$f'(x) = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$

$$\beta - \alpha = \frac{k+\sqrt{k^2-3k}}{3} - \frac{k-\sqrt{k^2-3k}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{k(k-3)} \quad \cdots ①$$

$$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$$

極大値，極小値は，それぞれ $f(\alpha)$，$f(\beta)$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_\beta^\alpha f'(x)\,dx = 3\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

条件により，$f(\alpha) - f(\beta) = 4|k|^3$ であるから

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 = 4|k|^3 \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = 2|k| \quad \cdots ②$$

①，② より　$2|k| = \dfrac{2}{3}\sqrt{k(k-3)}$　ゆえに　$k(8k+3) = 0$

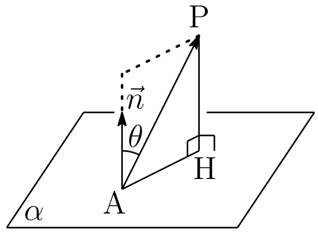
$k(k-3) > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{k = -\dfrac{3}{8}}$

■

3 (1) A(1, 2, 3)，B(3, 2, 3)，C(4, 5, 6)，P(6, p, q) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ 0,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (3,\ 3,\ 3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (5,\ p-2,\ q-3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトル，すなわち，α の法線ベクトルの1つを



$$\vec{n} = (0,\ 1, -1)$$

とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\mathrm{PH} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\cos\theta|,\quad \cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\vec{n}|}$$

よって　$\mathrm{PH} = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} = \dfrac{|0\cdot5 + 1\cdot(p-2) - 1\cdot(q-3)|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = \boldsymbol{\dfrac{|p-q+1|}{\sqrt{2}}}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = 3\sqrt{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の張る平行四辺形の面積を S とすると

$$S = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2} = \sqrt{2^2(3\sqrt{3})^2 - 6^2} = 6\sqrt{2}$$

四面体 ABCP の体積を V とすると [2]

$$V = \frac{1}{6}S\cdot\mathrm{PH} = \frac{1}{6}\cdot6\sqrt{2}\cdot\frac{|p-q+1|}{\sqrt{2}} = |p-q+1|$$

$(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$ より，$p-9 = \cos\theta$，$q-7 = \sin\theta$ とおくと

$$p = \cos\theta + 9,\quad q = \sin\theta + 7$$

したがって

$$\begin{aligned} V &= |p-q+1| = |(\cos\theta+9) - (\sin\theta+7) + 1| \\ &= |3 - (\sin\theta - \cos\theta)| = 3 - \sqrt{2}\sin(\theta - 45^\circ) \end{aligned}$$

ゆえに　$3-\sqrt{2} \leqq V \leqq 3+\sqrt{2}$

よって　最大値 $\boldsymbol{3+\sqrt{2}}$，最小値 $\boldsymbol{3-\sqrt{2}}$ ■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai_bun_2016.pdf $\boxed{3}$ の解説を参照.

4 (1) 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\begin{cases} f(x^2) = (x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3) = x^4f(x) - 3x^2g(x) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とすると

$$\begin{cases} 2m = 2+n & \cdots ① \\ 3n = \max(4+m,\ 2+n) & \cdots ② \end{cases}$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より　$3n = 4+m$　ゆえに　$m = 3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと　$m = n = 2$

(ii) $4+m < 2+n$ のとき，② より　$3n = 2+n$　ゆえに　$n = 1$
これを ① に代入すると，$m = \dfrac{3}{2}$ となり，不適．

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから，題意は成立する．

(2) $(*)$ の第 1 式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2+2)g(-x)+7$$

これと $(*)$ の第 1 式により　$g(-x) = g(x)$　$\cdots ③$
また，$(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4f(-x) - 3x^2g(-x) - 6x^2 - 2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4f(-x) - 3x^2g(x) - 6x^2 - 2$$

これと $(*)$ の第 2 式より　$f(-x) = f(x)$
また，$(*)$ に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 2g(0)+7,\quad g(0) = -2 \quad ゆえに \quad f(0) = 3$$

以上の結果から，$f(x) = ax^2+3$，$g(x) = px^2-2$ とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4+3 = (x^2+2)(px^2-2)+7 \\ px^6-2 = x^4(ax^2+3) - 3x^2(px^2-2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

整理すると　$\begin{cases} ax^4 = px^4 + 2(p-1)x^2 \\ px^6 = ax^6 - 3(p-1)x^4 \end{cases}$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = p,\quad p-1 = 0 \quad これを解いて \quad a = p = 1$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = x^2+3,\ \ g(x) = x^2-2}$　■

第 3 章　一般前期研究

九州大学の入試問題 (数学) の特徴として，毎年出題される「確率」「微積分」がある．旧課程の数学 A の分野に期待値 (確率変数の平均) があり，これをテーマとする九大 (経済工学部) らしい問題が多岐にわたり出題されていた．経済工学部で扱う金融工学が扱うテーマの中心に期待値 (期待金額) があり，これに由来する問題でもあった．現行課程では，期待値が数学 B の「確率分布と統計」の分野で扱うことになり，同分野が九州大学の出題の範囲外であるため,「確率」の出題内容がかなり限られてきた印象を持つ．こうした中，2018 年に出題された条件付き確率に関する問題は目新しい．この分野に関連する問題について研究しておく必要がある．具体的には「部品 a，b，c が不良品である 3 つの事象は互いに独立であるかどうか」を扱う問題がなどがその延長上にある．

文系であるが，2016 年研究に示したように外積などの教科書 $+\alpha$ の知識があった方がよい．問題によっては，緻密な計算力を要するものもある．普段からじっくり問題を考えることを心掛け，理由と結論を的確に記述する習慣を身に付ける必要がある．

3.1　2015 年度

3.1.1　3 番 研究

設問 n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ．　問 解

解答 1 回の操作で青玉の個数は 1 個だけ増減する．最初に青玉が 1 個 (奇数個) であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が 3 個 (奇数個) にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．

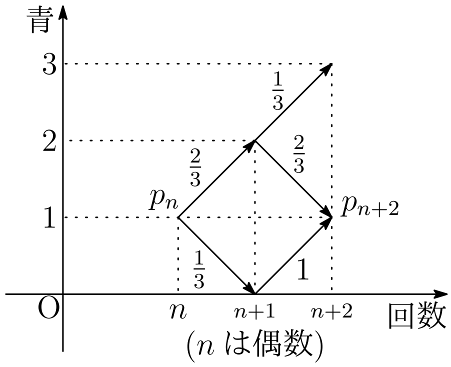
操作を n 回繰り返す中で袋の中の玉が 3 個とも青玉になることなしに，青玉の個数が 1 個である確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき

上に示したように奇数回目に青玉が 1 個になることはないから　$p_n = 0$

(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1\right) = \frac{7}{9}p_n$$



ゆえに　　$p_n = \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$

n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2} \times \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

参考 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ．　(九大理系)

$$\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{686}{6561}$$

3.2　2016 年

3.2.1　2 番 (4) 外積 (ベクトル積)

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと　問　解

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\cdot\frac{3}{4}\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=3(1-t):2t$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3(1-t)+2t}=\frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b}+2t\vec{c}\}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b}-3\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b}-3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え，外積の性質を用いると [1]

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって　$\triangle\mathrm{PQR}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}:1$

外積は高校数学の範囲外であるから，2 次試験では使えないが，センター試験では，非常に有効な計算法である．なお，外積 (ベクトル積) の演算について，次式が成り立つことに注意したい．

$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{b}$$

また，これに $\vec{c}=\vec{b}$ を代入すると　$\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

3.3　2017年

3.3.1　1番 (2) 研究

$y=kx^2\cdots$① は $y=x^2\cdots$② を x 軸を元に y 軸方向に k 倍だけ拡大したものであるが，① 上の点 $\mathrm{P}(t,\ kt^2)$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ をとると　問　解

$$(x,\ y)=k(t,\ kt^2)\quad ゆえに\quad x=kt,\quad y=(kt)^2$$

これから，点Qの描く軌跡は，$y=x^2$ である．

したがって，① と ② は相似であり，その相似比は $1:|k|$ である．

一般に，放物線は相似であり，2つの放物線

$$C_1: y=a_1x^2+b_1x+c_1,\quad C_2: y=a_2x^2+b_2x+c_2$$

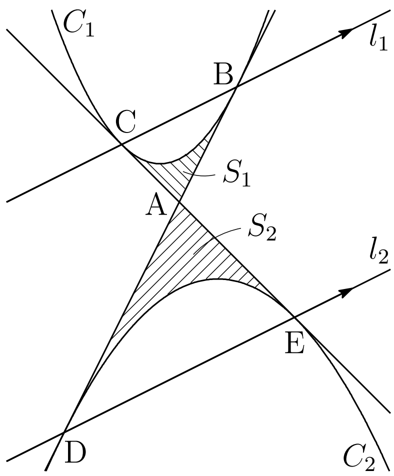
の相似比は $\dfrac{1}{|a_1|}:\dfrac{1}{|a_2|}$ である．

右の図のように，C_1，C_2 と2本の共通接線との接点をB，C，D，Eとすると，点Aは線分BDおよび線分CEを

$$\frac{1}{|a_1|}:\frac{1}{|a_2|}$$

に内分するである．また，2つの斜線部分の面積を S_1，S_2 とすると，面積比は相似比の2乗に比例するから

$$S_1:S_2=\frac{1}{{a_1}^2}:\frac{1}{{a_2}^2}$$



特に，$S_1=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$，$S_2=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ADE}$ である[2]．

本題の点Aは C_1 の頂点 $(0,\ 1)$ と C_2 の頂点 $(0,\ a)$ を $1:2$ に内分する点で

$$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{2+a}{3}\right)$$

また，C_1 上の点Pについて，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ をみたす点Qの軌跡が C_2 である．

点Aを通り，傾き m の直線 $y=mx+\dfrac{2+a}{3}$ が $C_1: y=2x^2+1$ と接するとき，2次方程式 $2x^2-mx+\dfrac{1-a}{3}=0$ の係数により

$$(-m)^2-4\cdot2\cdot\frac{1-a}{3}=0\quad ゆえに\quad m=\pm2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ の補足を参照．

3.3.2 4 番 (1) ユークリッドの互除法

n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x, y) と表記すると 問 解

$$(x, y)\,|\,x, \quad (x, y)\,|\,y$$

が成り立つ．

ユークリッドの互除法

2 整数 a，b について $(a > b > 0)$，a を b で割ったときの商を q，余りを c とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = (b, c)$$
$$c = 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = b$$

証明 $c \neq 0$ のとき，$a = bq + c$ より $(b, c)\,|\,a$ また，$(b, c)\,|\,b$ であるから，(b, c) は a と b の公約数，したがって

$$(b, c)\,|\,(a, b) \quad \cdots ①$$

同様に，$c = a - bq$ より $(a, b)\,|\,c$ また，$(a, b)\,|\,b$ であるから，(a, b) は b と c の公約数，したがって

$$(a, b)\,|\,(b, c) \quad \cdots ②$$

①，② より $(a, b) = (b, c)$

$c = 0$ のとき，自明． 証終

補足 さらに，b を c で割った余りが d であるとき $(b, c) = (c, d)$

すなわち $(a, b) = (b, c) = (c, d)$

2 つの整数 a_1，a_2 について $(a_1 > a_2 > 0)$，a_1 を a_2 で割った余りを a_3，さらに，a_2 を a_3 で割った余りを a_4，順次，a_k を a_{k+1} で割った余りを a_{k+2} とすると

$$(a_1, a_2) = (a_2, a_3) = (a_3, a_4) = \cdots = (a_k, a_{k+1}) = (a_{k+1}, a_{k+2}) = \cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列であるから，互除法を繰り返すことにより，a_1 と a_2 の最小公倍数を求めることができる．

3.4　2018 年

3.4.1　4 番 条件付き確率と事象の独立

A，B を事象とし，B における A の条件付き確率は　問　解

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

で定義される (大学などでは $P(A|B)$ と標記するのが一般的である)．

A と B が独立であるとき

$$P_B(A) = P(A) \quad \text{および} \quad P_A(B) = P(B)$$

が成立する．このとき，上の 2 式は同値である．実際，第 1 式から

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \quad \Longleftrightarrow \quad P_A(B) = P(B)$$

また，A と B が独立であることを，次式で示すことができる．

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

性質　A と B が独立ならば $\overline{A}$ と B も独立である

証明

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}P(B) = P(\overline{A})P(B) \end{aligned}$$

よって，$\overline{A}$ と B は独立である．　**証終**

A と B が独立であるから，性質により，A と $\overline{B}$ も独立である．
さらに，$\overline{A}$ と B が独立であるから，性質により，$\overline{A}$ と $\overline{B}$ も独立である．

したがって，A と B が独立であるとき，次は 3 つは独立である．

$$A \text{ と } \overline{B}, \quad \overline{A} \text{ と } B, \quad \overline{A} \text{ と } \overline{B}$$

最後の性質は，次から示すこともできる．

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\} = P(\overline{A})P(\overline{B}) \end{aligned}$$

参考　本題において，$P_A(B) = 3q$，$P(B) = (1 + 2p)q$ であるから，$p \neq 1$，$q \neq 0$ ならば，$P_A(B) \neq P(B)$ となり，A と B は独立ではない．