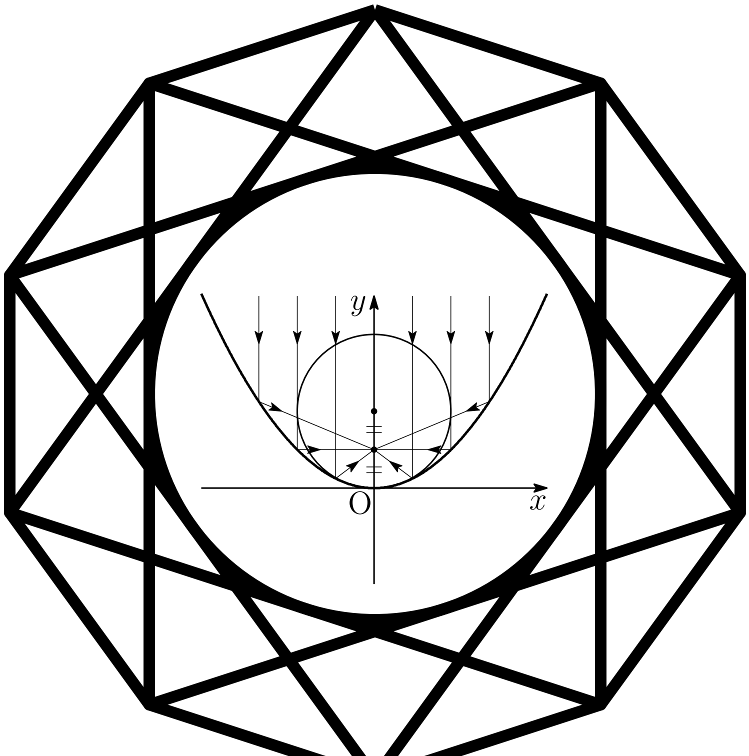
入試の軌跡

九州大学　文系

2001 − 2014

数　学



平成 31 年 2 月 22 日

Typed by LaTeX 2_ε

序

本書は，九州大学文学部・教育学部・法学部・経済学部 (経済・経営)・医学部 (保健 [看護]) 受験者のための入試問題集である．

本書には，平成 13 年 (2001 年) 度から平成 26 年 (2014 年) 度までの 2 次試験前期日程の数学問題をすべて掲載した．第 1 章には問題を掲載し，第 2 章には解答，第 3 章には解説を付けた．

また，年度ごとの問題および解答については，次のサイトに掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

本書の編集にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．

2. 本書は，電子文書 (PDF) での利用を想定し，ハイパーリンクを施した．利用する際には，全画面表示 (Ctrl+L) および描画領域に合わせる (Ctrl+3) と見やすくなる．ページスクロールには，(Ctrl+▲，Ctrl+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る (Alt+◀)，進む (Alt+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには ESC．

3. 本書の最新版は，次のサイトにある．

http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_bun.pdf

平成 26 年 3 月　編者

目 次

第 1 章　一般前期問題

2003 年度以前の入試は，必答問題 2 題と，選択問題 3 題を 1 グループとした 2 グループから 1 題ずつ選んで 120 分で解答する形式であった．2004 年度入試以降は選択問題はなくなり，必答問題 4 題を 120 分で解答する現在の形式になった．

2005 年度まで出題されていた複素数平面が 2015 年度から復活することになり，当時の頻出問題であったと比較的難易度が高かったことにも注意しておきたい．とくに，2014 年度入試においては，来年度からの新課程を意識した整数問題が出題されている．ユークリッドの互除法や合同式についても学習しておく必要があるようだ．

九大入試の特徴として，教科書にある公式の証明問題，教科書の典型的な問題についても確かな理解と応用力を問う問題が出題される．文系としてはめずらしく，論理的な展開能力が要求される．

出題分野

2001 年度 (1～2 必答，3～5 から 1 題選択，6～8 から 1 題選択)

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	微分法	関数の単調増加
2	やや難	数学 II	微分法	3 次関数の対称性
3	標準	数学 B	数列	漸化式
4	標準	数学 I	実数	整数問題
5	標準	数学 I	三角比	余弦定理
		数学 A	平面図形	方べきの定理
6	標準	旧課程	複素数平面	複素数平面上の軌跡
7	標準	数学 A	確率	期待値
		数学 C	確率分布	期待値の加法定理 (当時は数学 B で履修)
8	やや易	数学 B	コンピュータ	自然数を 2 で割り続けるアルゴリズム

2002 年度 (1〜2 必答，3〜5 から 1 題選択，6〜8 から 1 題選択)

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	図形と方程式	円の接線
			微分法	放物線の接線
			積分法	面積
2	難	数学 I	実数	整数問題
3	標準	数学 A	平面図形	最短経路
4	やや難	数学 B	数学的帰納法	三角関数の加法定理による数学的帰納法
5	やや難	数学 B	数列	漸化式
6	やや難	数学 B	空間のベクトル	三角形の面積
7	標準	旧課程	複素数平面	三角形の垂心
8	やや難	数学 A	確率	1 次元ランダム・ウォーク

2003 年度 (1〜2 必答，3〜5 から 1 題選択，6〜8 から 1 題選択)

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	積分法	2 次不等式の成立条件
2	標準	数学 II	図形と領域	絶対値のついた不等式の表す領域
3	やや難	数学 II	微分法	2 次関数の最大値と接線の方程式
4	やや難	数学 B	数列	漸化式
5	標準	数学 B	コンピュータ	フロー・チャート
6	標準	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの空間図形への応用
7	標準	旧課程	複素数平面	直線と曲線の共有点の個数
8	標準	数学 A	確率	面積比による確率
		数学 C	確率分布	2 項分布 (当時は数学 B で履修)

2004 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	微分法	接線の方程式
			積分法	面積
2	標準	旧課程	複素数平面	極形式
3	やや易	数学 B	平面上のベクトル	線分の内分比と面積比
4	標準	数学 A	確率	余事象の確率
		数学 C	確率分布	2 項分布 (当時は数学 B で履修)

2005 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	やや易	数学 II	積分法	面積
2	標準	数学 II	複素数と方程式	2 次方程式の虚数解
		旧課程	複素数平面	極形式
3	標準	数学 II	三角関数	三角不等式
			指数関数と対数関数	対数不等式
4	やや難	数学 A	確率	期待値

2006 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	微分法	接線の方程式
			積分法	面積
2	やや難	数学 B	数列	数学的帰納法，背理法
3	やや難	数学 B	空間のベクトル	ベクトルの大きさ
4	標準	数学 II	三角関数	三角関数のグラフ

2007 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 I	方程式・不等式	4 次方程式，4 次不等式
2	やや易	数学 B	空間のベクトル	四面体の体積の最小値
3	標準	数学 A	確率	正方形の頂点を移動する点の確率
4	標準	数学 I	図形と計量	三角形の成立条件

2008 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	三角関数	2 倍角の公式，数学的帰納法
2	やや易	数学 II	微分法	放物線の法線の方程式
3	やや易	数学 B	平面上のベクトル	内積の図形への応用
4	標準	数学 II	微分法	2 接線の方程式
		数学 B	数列	漸化式

2009 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 I	図形と計量	余弦定理
		数学 II	三角関数	角の大小
2	やや易	数学 B	平面上のベクトル	定点と半直線上の点との距離の最小値
3	標準	数学 A	確率	一列に並べた 6 枚のカードの確率
4	標準	数学 II	微分法	放物線の 2 接線
			積分法	面積

2010 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	やや易	数学 I	図形と計量	余弦定理
2	やや難	数学 A	確率	さいころを振ったときの得点の期待値
3	標準	数学 II	三角関数	2 倍角の公式
			微分法	3 次方程式の解の個数
4	やや易	数学 B	数列	自然数の和，平方和，立方和

2011 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	やや易	数学 II	積分法	放物線と面積
2	標準	数学 B	数列	周期関数とフェルマーの小定理
3	標準	数学 B	平面上のベクトル	内積の図形への応用
4	標準	数学 A	確率	カードの並べ替えの確率と期待値

2012 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	やや易	数学 B	空間のベクトル	内積，三角形の面積
2	やや難	数学 II	微分法	3 次関数の対称性，関数の増減
3	標準	数学 A	場合の数	1 次不定方程式
4	やや難	数学 A	確率	マルコフ連鎖

2013 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	やや易	数学 B	空間のベクトル	内積
2	標準	数学 II	図形と方程式	線形計画法
3	標準	数学 A	場合の数と確率	確率，期待値
4	やや難	数学 II	図形と方程式	不等式の表す領域
			積分法	面積

2014 年度

	難易度	科　目	分　野	出　題　内　容
1	標準	数学 II	図形と方程式	不等式の表す領域
			積分法	面積
2	標準	数学 A	論理と集合	無限降下法
3	やや難	数学 I	図形と計量	正弦定理
		数学 II	三角関数	加法定理
		数学 A	平面図形	重心と外心
4	標準	数学 A	場合の数と確率	期待値

出題分野 (2004-2014)

		04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
I	方程式と不等式				1							
	2 次関数											
	図形と計量				4		1	1				3
II	式と証明											
	複素数と方程式		2									
	図形と方程式										2 4	1
	三角関数		3	4		1	1	3				3
	指数関数と対数関数		3									
	微分法	1		1		2 4	4	3	1	2		
	積分法	1	1	1			4				4	1
A	場合の数と確率	4	4		3		3	2	4	3 4	3	4
	論理と集合											2
	平面図形											3
B	平面上のベクトル	3				3	2		3			
	空間のベクトル			3	2					1	1	
	数列			2		4		4	2			
	複素数平面 (旧課程)	2	2									

1〜4 は問題番号

1.1 2001 年度

$\boxed{1}$〜$\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$〜$\boxed{5}$ から 1 題選択，$\boxed{6}$〜$\boxed{8}$ から 1 題選択

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$ 3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) y 軸に平行な直線 $x=p$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=2,\quad a_{n+1}={a_n}^2-a_n+1 \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

で与える。$a_1,\ldots,a_n$ の積を P_n とおく。

(1) 各 n について $a_n>0$ であることを示せ。

(2) 各 n について $a_{n+1}=P_n+1$ であることを示せ。

(3) $S_n=\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$ とおく。S_1，S_2，S_3，S_4 を求めよ。

(4) 各 n について S_n を P_n で表せ。

4 (1) 自然数 a，b が互いに素であるとはどういうことか。

(2) 自然数 a，b が互いに素であるなら a^2，b^2 は互いに素であることを示せ。

(3) n を自然数とする。もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ。ただし，有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである。

(4) n が自然数のとき，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ。

5 r を 1 より小さい正の定数とする。平面上の点 A を端点とする半直線 l 上の点で A からの距離が $1-r$，1，$1+r$ となるものをそれぞれ B，C，D とする。BD を直径とする円を描き，A を端点としその円に接する半直線のひとつを m とする。m 上の点で A からの距離が $1-r$，1，$1+r$ となるものをそれぞれ E，F，G とする。E，F を通り l に接する円を描きその接点を P とする。また F，G を通り l に接する円を描きその接点を Q とする。

(1) A と P との間の距離 AP を r で表せ。

(2) CF を r で表せ。

(3) $\mathrm{PQ} = \mathrm{CF}$ を示せ。

6 複素数平面上の点 z を考える。

(1) 実数 a，c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2) 0 でない複素数 d に対して

$$dz(\overline{z}+1) = \overline{d}\,\overline{z}(z+1)$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか。

7 サイコロを n 回振って，出た目を小さい方から順に並べ，第 i 番目を X_i $(i=1,\cdots,n)$ とする。

(1) $n=7$ のとき，3 の目が 3 回，5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。

(2) 一般の n に対して，$X_1=2$ となる確率 $P(X_1=2)$ を求めよ。

(3) 一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。

(4) 一般の n に対して，期待値 $E(X_1+X_n)$ を求めよ。

8 m，n を自然数とする。次の算法を考える。

(a) $i=m$，$j=n$，$k=0$.

(b) $i=1$ ならば $\mathrm{Ans}=k+j$ として終了する.

(c) i の値が奇数なら $k=k+j$ とする.

(d) $i=[i/2]$.　(e) $j=2*j$.　(f) (b) にもどる.

(ここで，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。)

(1) $m=100$ のとき，3 周目と 4 週目の (b) における i，j，k の値を求めよ。たとえば 1 周目では $i=100$，$j=n$，$k=0$ である。

(2) 一般の m に対して，(b) における i，j，k の値について $i*j+k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。

(3) 一般の m に対して，Ans を求めよ。

1.2　2002 年度

$\boxed{1}$〜$\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$〜$\boxed{5}$ から 1 題選択，$\boxed{6}$〜$\boxed{8}$ から 1 題選択

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 原点を中心とする半径 r $(r > 0)$ の円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$ax + by = r^2$$

で与えられることを示せ。

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $C : y = x^2 + 1$ の両方に接する直線は 3 本ある。これら接線の方程式を求めよ。

(3) 問 (2) における 3 本の接線のうち，x 軸の正の部分と交わる接線を l_1，x 軸に平行な接線を l_2 とする。接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。たとえば $f(1) = 1$ であり，$a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15) = 24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$ が成り立つことを示せ。必要ならば，
$1 + r + r^2 + \cdots + r^m = \dfrac{r^{m+1} - 1}{r - 1}$ $(r \neq 1)$ を用いてよい。

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする。このとき $f(a) \geqq (p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

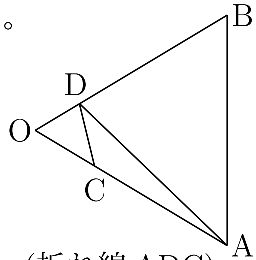
(3) $a = 2^2 r$，$b = 2^4 s$ $(r,\ s$ は正の奇数$)$ の形をした偶数 a，b を考える。

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$$

をみたす a，b を求めよ。

3 △AOB は OA = OB = 1 なる二等辺三角形とする。$\alpha = \angle\mathrm{AOB}$ とし，線分 OB に関して A と対称な点を A′ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha < 90^\circ$ とする。右図のように線分 OA 上に点 C をとる。点 C を固定し，線分 OB 上に点 D を折れ線 ADC の長さが最小となるようにとる。線分 OA′ 上に OC′ = OC をみたす点 C′ をとれば，線分 AC′ は点 D を通ることを示せ。



(折れ線 ADC)

(2) $\alpha < 45^\circ$ とする。線分 OA 上に点 E を，線分 OB 上に点 F を折れ線 AFE の長さが最小となるようにとる。このとき ∠AEF は直角となることを示せ。

(3) $\alpha < 60^\circ$ とする。線分 OA 上に点 G を，線分 OB 上に点 H を折れ線 AHGB の長さが最小となるようにとる。このとき，折れ線 AHGB の長さを α を用いて表せ。

4 次の問いに答えよ。

(1) n を正の整数とする。どんな角度 θ に対しても

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ。また，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

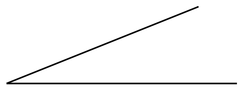
$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ。

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数になることを示せ。

(3) 整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ。また，$p_n(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

5 n を正の整数とする。平面を n 本の直線，または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える。ここで直線は両側に無限にのびているものとし，**1 回折れ線**とは，右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである。次の問いに答えよ。



(1 回折れ線)

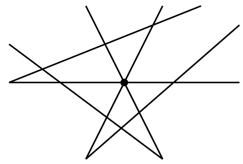
(1) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異なる n 本の直線のみで分割されているとする。

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の直線も交わる。

(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の直線も同一点では交わらない。

分割される平面の領域の個数を L_n で表す。$n \geqq 2$ のとき，L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ。また，$L_n\,(n \geqq 1)$ を求めよ。

(2) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異なる n 本の 1 回折れ線のみで分割されているとする。



(同一点で交わる3 本の 1 回折れ線)

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の 1 回折れ線も異なる 4 点で交わる。

(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の 1 回折れ線も同一点では交わらない (右図を参照せよ)。

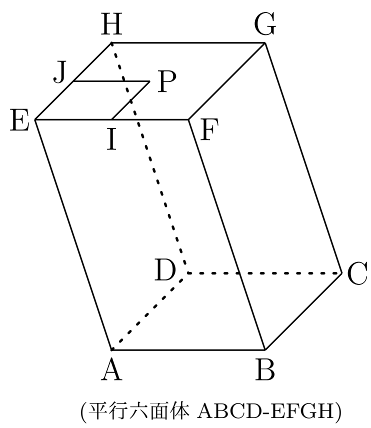
分割される平面の領域の個数を H_n で表す。H_3 を求めよ。

(3) $H_n\,(n \geqq 1)$ を求めよ。

6 空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) a を正の定数とし，右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = 2a$ とし，$\angle\mathrm{FBC} = \angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{EAB} = 120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x = |\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y = |\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，$\triangle$ACP の面積を a，x，y を用いて表せ。



(平行六面体 ABCD-EFGH)

(3) (2) で点 P が面 EFGH 上を動くとき，$\triangle$ACP の面積の最小値を求めよ。

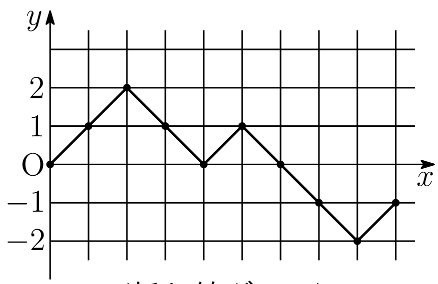
7 次の問いに答えよ。

(1) 複素数 α，β，γ，δ は $\alpha \neq \beta$，$\gamma \neq \delta$ をみたすとする。複素数平面上の 2 点 α，β を通る直線が，2 点 γ，δ を通る直線と直交するための必要十分条件は，複素数 $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ が純虚数であることを示せ。

(2) 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 をとり，$w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで三角形の**垂心**とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これら 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。

(3) 問 (2) において $w_2 = -\overline{z}_1 z_2 z_3$ とおく。$w_2 \neq z_1$ のとき，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで $\overline{z}_1$ は z_1 に共役な複素数である。

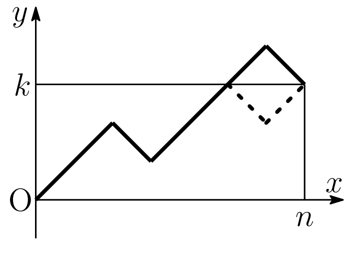
8 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という。与えられた格子点を第 1 番目とし，この点から右斜め 45°，または右斜め −45° の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ。同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点をとり，第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする。右図に原点 O と格子点 (9, −1) を結ぶ折れ線グラフの例を示す。次の問いに答えよ。



(折れ線グラフ)

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n+k$ が偶数であることを示せ。また，この必要十分条件がみたされているとき，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。

(2) n は 2 以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq n-2$ なる整数で，$n+k$ は偶数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいことを示せ。



(3) コインを 9 回投げる。1 回から i 回までの試行において，表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i,\ T_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, 9$，を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる。ただし，$T_0 = 0$ とする。$T_9 = 3$ が起きたとき，どの T_i $(i = 1, 2, \cdots, 7)$ も 3 にならない条件つき確率を求めよ。

1.3　2003 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$～$\boxed{\mathbf{2}}$ 必答，$\boxed{\mathbf{3}}$～$\boxed{\mathbf{5}}$ から 1 題選択，$\boxed{\mathbf{6}}$～$\boxed{\mathbf{8}}$ から 1 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 a，c を係数とする関数 $f(x)=ax^2+c$ について，次の条件を考える。

$(*)$　　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x) \geqq (x+1)^2$ が成立する。

(1) $a \geqq 2$ のとき，条件 $(*)$ を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ であることを示せ。

(2) $a \leqq 2$ のとき，条件 $(*)$ を満たす最小の c の値は $4-a$ であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ が条件 $(*)$ を満たしているとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を最小にする a，c と，そのときの定積分の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上で，不等式　$2|x-4|+|y-5| \leqq 3$,　$2\Big||x|-4\Big|+\Big||y|-5\Big| \leqq 3$

が表す領域を，それぞれ A，B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x |y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ a，b，c を定数とし，$a>0$ とする。$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。実数 p に対し，x の関数 $px-f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく。

(1) 2 つの関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が一致するとき，$f(x)$ を求めよ。

(2) 実数 x に対し，p の関数 $xp-g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく。$h(x)$ を求めよ。

(3) 直線 $y=px+q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y=f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は $g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$ であることを示せ。

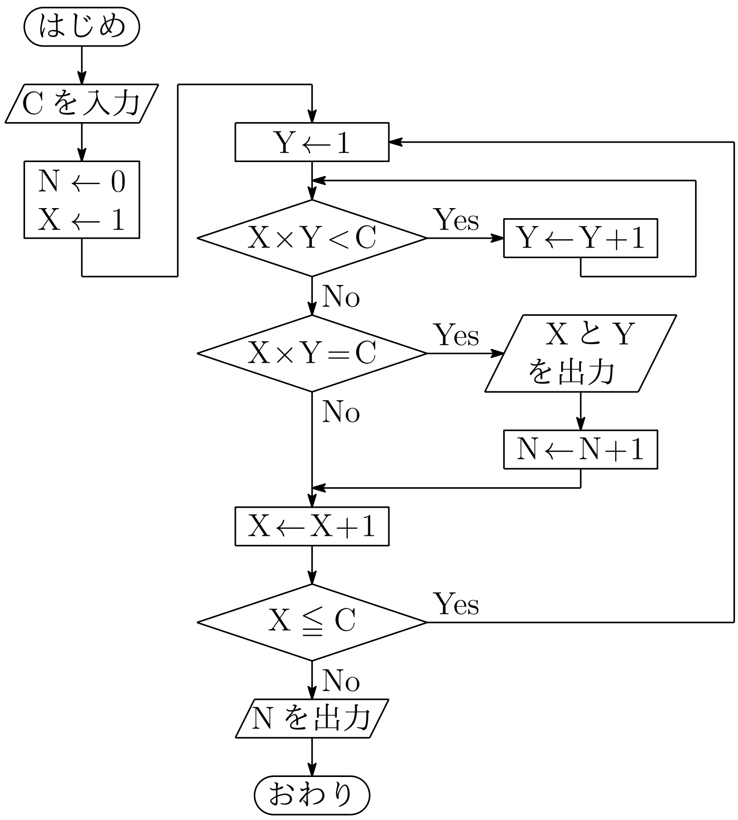
4 $\{m_k\}$ を公比 r の等比数列とする。2 次関数 $y = x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる。各自然数 k に対し，点 P_k から点 P_{k+1} を順次つぎのように定める。点 P_k を通り傾き m_k の直線を ℓ_k とし，この直線と C とのもう一つの交点を P_{k+1} とする。ただし，C と ℓ_k が接する場合は $\mathrm{P}_{k+1} = \mathrm{P}_k$ とする。点 P_k の x 座標を a_k とする。

(1) a_{k+1} を a_k と m_k で表せ。

(2) 数列 $\{a_k\}$ の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ。

(3) $a_1 = \dfrac{m_1}{1+r}$ とする。このとき，ある 2 次関数 $y = bx^2$ があって，すべての自然数 k に対し直線 ℓ_k がその 2 次関数のグラフに接することを示し，b を r で表せ。ただし，$m_1 \neq 0$，$r \neq -1, 0$ とする。

5 (1) 次の流れ図に対応するプログラムを実行する。$C = 105$ を入力したとき，X，Y および N の値を出力順にすべて示せ。



(2) 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。自然数 A，B，R を入力したとき，第 1 象限 (x 軸，y 軸は含まない) にあり，かつ中心が $(A,\ B)$ で半径が R の円の内部および周上にある格子点の個数と，それらの格子点のうちで原点からの距離が最大である格子点 (複数個あるときは x 座標が最大のもの) の座標を出力するプログラムの流れ図を，方針を記述してから作成せよ。

6 空間内に四面体 OABC があり，$\angle$AOB，$\angle$BOC，$\angle$COA はすべて 90° であるとする。辺 OA，OB，OC の長さを，それぞれ a，b，c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle$OGA，$\angle$OGB，$\angle$OGC がすべて 90° であるための条件を a，b，c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

7 $0 < a < 1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を ℓ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が ℓ 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2) 直線 ℓ を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。

8 座標平面上に (0, 0)，(1, 0)，(1, 1)，(0, 1) を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて，$y \leqq x(a-x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし，$0 < a \leqq 2$ とする。

(1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。

(2) 1 回目は $a = \dfrac{1}{2}$，2 回目は $a = \dfrac{3}{2}$ として，ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。

(3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であり，当たりの数の期待値が $\dfrac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。

1.4　2004年度

1 2つの関数

$$f(x) = -px^2 + 2 \quad (p > 0)$$
$$g(x) = |\,x\,| - 2$$

が与えられていて，放物線 $y = f(x)$ が2点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るとする。

(1) p の値を求めよ。

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた交点のうち，x 座標が最小になる点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする。このとき，点 A における $y = f(x)$ の接線 $y = h(x)$ を求めよ。また，この接線 $y = h(x)$ と $y = g(x)$ の，点 A とは異なる，交点 $\mathrm{B}(b,\ g(b))$ を求めよ。

(4) 次の連立不等式の定める図形の面積を求めよ。

$$a \leqq x \leqq b, \quad y \leqq h(x), \quad y \geqq f(x), \quad y \geqq g(x)$$

2 複素数平面上に複素数 $z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ をとり，$\alpha = z + 1$，$\beta = z - 1$ とおく。

(1) $|\,\beta\,| = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ を示せ。

(2) $\arg\beta = \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ$ を示せ。ただし，$0^\circ \leqq \arg\beta < 360^\circ$ とする。

(3) $\theta = 60^\circ$ とする。9つの複素数 $\alpha^m\beta^n$ $(m,\ n = 1, 2, 3)$ の虚部の最小値を求め，その最小値を与える $(m,\ n)$ のすべてを決定せよ。

3 $0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1$ とする。平行四辺形 ABCD の辺 BC を $\alpha : 1 - \alpha$ に内分する点を P とし，辺 CD を $1 - \beta : \beta$ に内分する点を Q とする。また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$ として次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 長さの比 $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}$ および $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(3) $\mathrm{AB} = 2$，$\mathrm{AD} = 1$，$\angle\mathrm{DAB} = 60^\circ$ とするとき，$\triangle\mathrm{AQR}$ の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に 6 個並んでいる。これらの 6 個の電球のスイッチを同時に入れたあと，左から電球を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1) 赤青青青青青，赤赤青青青青，$\cdots$ のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3) 色の変化がちょうど n 回 $(0 \leqq n \leqq 5)$ 起きる確率を求めよ。

(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

1.5 2005 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C : y = ax^2\ (x \geqq 0)$ を考える。曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) $a > 0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ t を実数とするとき，2 次方程式

$$z^2 + tz + t = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1) の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が (1) で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3) 複素数平面上で，点 z が (2) の図形 C 上を動くとき，

$$w = \frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が動く図形を求め，図示せよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば，$\left[\frac{3}{2}\right] = 1$，$[2] = 2$ である。このとき，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\dfrac{3}{2} + \log_2\sin\theta\right] \geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq 0 \leqq \left[\dfrac{3}{2} + \log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

4 1 つのさいころを 4 回投げて，出た目の数を順に x_1，x_2，x_3，x_4 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $x_1 < x_2$ となる確率を求めよ。

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ となる確率を求めよ。

(3) $x_1 < x_2$ かつ $x_2 \geqq x_3$ となる確率を求めよ。

(4) $x_k \geqq x_{k+1}$ となる最小の自然数 k の期待値を求めよ。ただし，$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ のときは $k = 4$ と定める。

1.6　2006年度

1 曲線 $C: y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ をとり，点 P における曲線 C の接線を l，点 P を通り l に垂直な直線を m とする。ただし，$t>0$ とする。接線 l と x 軸との交点を Q とし，直線 m と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ R_1，R_2 とする。また，$\triangle \mathrm{PQR}_1$ の面積を S_1 とし，曲線 C と y 軸および線分 PR_2 で囲まれる図形の面積を S_2 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 点 Q と点 R_1 の x 座標を t を用いて表せ。

(2) 面積 S_2 を t を用いて表せ。

(3) $S_1>S_2$ が成り立つ t の範囲を求めよ。

2 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，$a_1=b_1=1$ および，関係式

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2a_nb_n \\
b_{n+1} &= 2{a_n}^2+{b_n}^2
\end{aligned}
$$

をみたすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 3$ のとき，a_n は3で割り切れるが，b_n は3で割り切れないことを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

3 空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について次の問いに答えよ。ただし，h と k は実数とする。

(1) $h\vec{a}+\vec{b}$ が $\vec{a}$ と垂直であるとき，すべての実数 x に対して

$$|\,x\vec{a}+\vec{b}\,| \geqq |\,h\vec{a}+\vec{b}\,|$$

が成り立つことを示せ。ただし，$\vec{0}$ はすべてのベクトルと垂直であるとする。

(2) $h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるとき，すべての実数 x，y に対して

$$|\,x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}\,| \geqq |\,h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}\,|$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 4,-2)$，$\vec{c}=(-3,-6,\ 6)$ とするとき，$|\,x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}\,|$ の最小値を与える実数 x，y と，そのときの最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|$ について次の問いに答えよ。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。

(1) $f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) 実数 k に対し，$f(x)=k$ をみたす x の個数を求めよ。

1.7　2007年度

1 $f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ。

(2) 不等式 $f(n) \leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(3) 不等式 $f(n) \leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

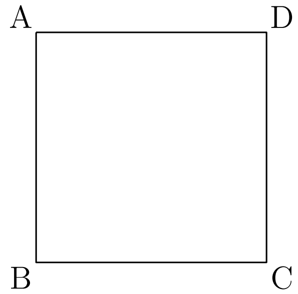
2 t を $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす数とし，空間内の4点 $\mathrm{A}(t,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ t)$，$\mathrm{P}\left(\frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t\right)$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形であることを示し，その面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直であることを示せ。

(3) 四面体 PABC の体積 $V(t)$ を求めよ。また $V(t)$ の最小値とその最小値を与える t の値を求めよ。

3 図のような一辺の長さが1の正方形 ABCD がある。この正方形の辺上の点 Q を，コインを投げて表が出れば反時計まわりに1，裏が出れば時計まわりに1動かす試行を考える。点 Q が頂点 A から出発してこの試行が繰り返し行われるものとする。このとき，次の問いに答えよ。



(1) 表の出る確率が $\frac{1}{2}$ のコインを投げて，上記の試行を2回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。同様に上記の試行を3回および4回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 表の出る確率 p が $\frac{1}{2}$ より大きいコインを投げて，上記の試行を2回繰り返すとき，頂点 A，B，C，D のうち点 Q が頂点 C にある確率が最大となることを示せ。同様に3回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となることを示せ。

4 3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$，$4-x$，2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より短くないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ。

(2) この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3) x が (1) で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ。

1.8 2008年度

1 自然数 n に対して，$a_n = (\cos 2^n)(\cos 2^{n-1}) \cdots (\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ。

(2) $a_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ。

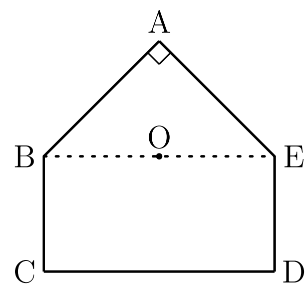
(3) $a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。

2 放物線 $C : y = x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2) y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。

3 図のような五角形 ABCDE(角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 BCDE をあわせた図形) において，辺 BC と辺 DE の長さは 1，辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする。線分 BE の中点を O とする。また，5 枚のカードがあり，それぞれに A，B，C，D，E と書いてある。カードをよくきって 1 枚引き，もとに戻す。この操作を n 回繰り返し，i 回目に引いたカードの文字を P_i とする。たとえば，i 回目に B を引いたとすると，$\mathrm{P}_i = \mathrm{B}$ である。このとき，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ の内積が 1 である確率を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ の内積を q_i とする。このとき，$q_1 q_2 \cdots q_n = 0$ となる確率を求めよ。

4 放物線 $C : y = x^2 - 1$ と $a_1 > 1$ を満たす実数 a_1 を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とするとき，a_2 を a_1 を用いて表せ。

(2) (1) で求めた a_2 に対して，C 上の点 $(a_2,\ {a_2}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とする。この操作を繰り返してできる数列を a_1，a_2，$\cdots$，$a_n \cdots$ とする。このとき，すべての n に対して $a_n > 1$ を示せ。

(3) $b_n = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)$ とおくとき，すべての n に対して，$b_{n+1} < {b_n}^2$ を示せ。

(4) $a_1 = 2$ のとき，$b_n < 10^{-12}$ となる n の値を 1 つ求めよ。ただし，必要があれば，$\log_{10} 2$ を 0.3010 として計算してよい。

1.9 2009 年度

$\boxed{1}$ $\angle$A が直角の二等辺三角形 ABC を考える。辺 BC の中点を M とし，線分 AM を $1:3$ に内分する点を P とする。また，点 P を通り辺 BC に平行な直線と，辺 AB，AC との交点をそれぞれ Q，R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos\angle\mathrm{QMR}$ を求めよ。

(2) $\angle\mathrm{QMR}$ の 2 倍と $\angle\mathrm{QMB}$ の大小を判定せよ。

$\boxed{2}$ 座標平面に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 6)$，B$(3,\ 4)$ をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2) $s = \dfrac{1}{2}$ とし，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

(3) $s = 1$ とし，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれている 6 枚のカードがある。これらをよくきった上で，左から右に一列に並べる。カードに書かれた数字を左から順に a，b，c，d，e，f とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a + b = c$ となる確率を求めよ。

(2) $a + b = c + d$ となる確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 曲線 $y = x^2$ の点 P$(a,\ a^2)$ における接線と点 Q$(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする。ただし，$a < 0 < b$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形 PRQS とする。折れ線 PSQ と曲線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PRQ} = 90^\circ$ をみたしながら P と Q が動くとき，(2) で求めた面積の最小値を求めよ。

1.10　2010 年度

1 三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t \geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1) CP^2 を a，b，c，t を用いて表せ。

(2) 点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき，t を求めよ。

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ。

2 次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし，出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ，もう 1 回サイコロを振って，2 つの目の合計を得点とすることができる。ただし，合計が 7 以上になった場合は 0 点とする。この取り決めによって，2 回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

(1) 競技者が常にサイコロを 2 回振るとすると，得点の期待値はいくらか。

(2) 競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか。

(3) 得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目を振るとよいか。

3 xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円を描き，その上半分を C とし，その両端を $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ とする。C 上の 2 点 N，M を $\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$ となるように取る。ただし，$\mathrm{N} \neq \mathrm{B}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{MAB}=\theta$ と置くとき，弦の長さ MB 及び点 M の座標を θ を用いて表せ。

(2) 点 N から x 軸に降ろした垂線を NP としたとき，PB を θ を用いて表せ。

(3) $t=\sin\theta$ とおく。条件 $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ を t を用いて表せ。

(4) $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ となるような点 M が唯一つあることを示せ。

4 以下の問いに答えよ。答えだけでなく，必ず証明も記せ。

(1) 和 $1+2+\cdots+n$ を n の多項式で表せ。

(2) 和 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ を n の多項式で表せ。

(3) 和 $1^3+2^3+\cdots+n^3$ を n の多項式で表せ。

1.11　2011年度

$\boxed{1}$ 放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t > 1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y = x$ との交点の座標を R とするとき，三角形 PRH の面積を t を用いて表せ。

(3) $x \geqq 1$ の範囲において，放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(4) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 = S_2$ であるとき，t の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 - {a_n}^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

をみたしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，a_{10} および a_{11} を求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1 = \tan\dfrac{\pi}{7}$ とする。$a_k = a_1$ をみたす 2 以上の自然数 k で最小のものを求めよ。

$\boxed{3}$ 平面上に直角三角形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする。また，点 O は $4\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$ をみたしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 辺 BC の中点を M とするとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = 10$ となることを示せ。

(3) $4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 = -4$ をみたす点を P とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ。

4 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1，2，3，4 と並べ，上の操作を 2 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1) カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶ確率を求めよ。

(2) カードが左から順に 4，3，2，1 と並ぶ確率を求めよ。

(3) 左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

(4) 左端のカードの数字の期待値を求めよ。

1.12 2012年度

1 原点をOとする座標空間に，3点A(1, 0, 0)，B(0, 0, 2)，C(−2, 1, 3)がある。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) △ABCにおいて，∠Bは $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ。

(2) 点Aから直線BCに下ろした垂線と直線BCとの交点をHとする。点Hの座標を求めよ。

(3) △OAHの面積を求めよ。

2 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ を考える。曲線 $C : y = f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を2本持つことを示せ。

(2) (1)において，傾きが t である2本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする (ただし $p < q$)。このとき，点Pと点Qは点A(−1, 0)に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき，2点P，Qの間の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときのP，Qの x 座標 p，q もそれぞれ求めよ。

3 100人の団体がある区間を列車で移動する。このとき，乗車券が7枚入った480円のセットAと，乗車券が3枚入った220円のセットBを購入して，利用することにした。以下の問いに答えよ。

(1) x が0以上の整数であるとき，次のことを示せ。

$\dfrac{1}{3}(100 - 7x)$ は，x を3で割ったときの余りが1の場合に整数であり，

それ以外の場合は整数ではない。

(2) 購入した乗車券は，余らせずすべて利用するものとする。このとき，セットAとセットBの購入の仕方をすべて挙げよ。

(3) 購入した乗車券は余ってもよいものとする。このとき，Aのみ，あるいはBのみを購入する場合も含めて，購入金額が最も低くなるのは，A，Bをそれぞれ何セットずつ購入するときか。またそのときの購入金額はいくらか。

4 いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T)　箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，
　　　　　箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n = 1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2) 試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n = 1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3) 試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

1.13　2013年度

1 一辺の長さが1の正方形OABCを底面とし，OP = AP = BP = CPをみたす点Pを頂点とする四角錐POABCがある。辺APを1 : 3に内分する点をD，辺CPの中点をE，辺BCを$t : (1-t)$に内分する点をQとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を用いて表せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$t$を用いて表せ。

(3) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の値を求めよ。

(4) 直線PQが平面ODEに垂直であるとき，tの値および線分OPの長さを求めよ。

2 座標平面上で，次の連立不等式の表す領域をDとする。

$$x + 2y \leqq 5, \quad 3x + y \leqq 8, \quad -2x - y \leqq 4, \quad -x - 4y \leqq 7$$

点P$(x,\ y)$が領域D内を動くとき，$x + y$の値が最大となる点をQとし，最小となる点をRとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点Qおよび点Rの座標を求めよ。

(2) $a > 0$かつ$b > 0$とする。点P$(x,\ y)$が領域D内を動くとき，$ax + by$が点Qでのみ最大値をとり，点Rでのみ最小値をとるとする。このとき，$\dfrac{a}{b}$の値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表　と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏裏　となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L，R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L，R，L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面上の円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=x-2$ は円 C に接することを示せ。また，接点の座標も求めよ。

(2) 円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 不等式 $y \geqq \dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域を D とする。また，不等式 $|x|+|y| \leqq 2$ の表す領域を A とし，不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ の表す領域を B とする。そして，和集合 $A\cup B$，すなわち領域 A と領域 B をあわせた領域を E とする。このとき，領域 D と領域 E の共通部分 $D\cap E$ を図示し，さらに，その面積を求めよ。

1.14　2014 年度

1 座標平面上の直線 $y=-1$ を ℓ_1，直線 $y=1$ を ℓ_2 とし，x 軸上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，次の条件を考える。

$$d(\mathrm{P},\ell_1) \geqq \mathrm{PO} \quad \text{かつ} \quad d(\mathrm{P},\ell_2) \geqq \mathrm{PA} \quad \cdots ①$$

ただし，$d(\mathrm{P},\ell)$ は点 P と直線 ℓ の距離である。

(1) 条件 ① を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(2) 条件 ① を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ。ただし，a の値は (1) で求めた範囲にあるとする。

2 以下の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a，b，c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a，b，c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は存在しないことを証明せよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 鋭角三角形 △ABC について，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする。このとき，

$$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C, \quad \mathrm{OE} = R\cos A$$

を証明せよ。

(2) G と O が一致するならば △ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3) △ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，

$$\mathrm{AD} = 3\mathrm{OE}, \quad \tan B\tan C = 3$$

を証明せよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨を 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1) A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

第 2 章　一般前期解答

問題冊子 (B5 で 12 ページ) は，見開きで問題が偶数ページ，下書き (計算スペース) が奇数ページに配置されており，問題ページの下側の余白を含め十分な計算スペースがある．解答用紙は，$\boxed{\mathbf{9}}$〜$\boxed{\mathbf{12}}$の番号が書かれた 4 枚の B4 用紙がはさみ込まれており，問題$\boxed{\mathbf{1}}$〜$\boxed{\mathbf{4}}$を順次指定された解答用紙に答えるようになっている (2004 年度以降の必答 4 題の出題形式)．

設問ごとに解答欄が仕切られているため，十分な解答スペースではなく，途中の計算などを書いていくスペースはない (解答用紙の裏面の使用は不可)．そのため，問題用紙の下書き欄で計算した結果を整理して「理由と計算結果・結論」を明示する必要がある．なお，問題冊子は，試験終了後に持ち帰ることができる．

出題者は受験生に簡潔な表現力を要求したものと考えられる．理学部数学科の採点担当者からも，定積分の途中計算などを細かく書く必要はないと聞いた．

対策

1. 標準的な問題を中心に 3 題とやや難の 1 題が例年の出題傾向である．配点はすべて 50 点ずつの計 200 点であるので 120 分で効率的に問題を解いていく必要がある．なお，文学部および医学部保健学科看護学専攻は 100 点満点に換算される．

2. 完答が難しい問題についても，前半の設問はどれも基本または標準的な問題が配置されているので，確実に部分点を狙っていく必要がある．

3. 採点者が読みやすい簡潔な答案の作成を普段から練習しておく．

2.1　2001 年度

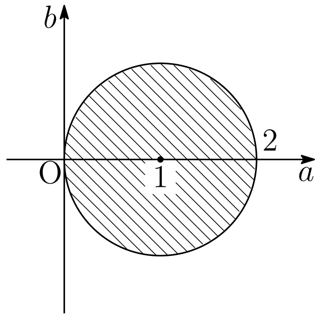
1 (1) $f(x)$ を微分すると，$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1$　　$\cdots(*)$

$a \neq 0$ のとき，すべての自然数 x に対して，$f'(x) \geqq 0$ となるための条件は

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると　$2a>0,\ \ D \leqq 0$

$D/4=(a+b)^2-2a(b+1)=a^2+b^2-2a \cdots$ ① により

$$a>0,\ \ (a-1)^2+b^2 \leqq 1$$



$a=0$ のとき　$f(x)=bx^2+(b+1)x$ となる．

これがつねに増加するためには　$b=0$

すなわち $f(x)=x$ となり，条件を満たす．

よって　$a>0$ のとき　$(a-1)^2+b^2 \leqq 1$

　　　　$a=0$ のとき　$b=0$

したがって　$(a-1)^2+b^2 \leqq 1$

よって，右の図のような円 $(a-1)^2+b^2=1$ の内部で，境界線を含む．

(2) $a=0$ のとき　$f(x)=bx^2+(b+1)x$

$b \geqq 0$ は，$x>-1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=2bx+b+1$

$b>0$ のとき，$f'(-1) \geqq 0$ であることが条件であるから

$$b>0,\ \ 2b(-1)+b+1 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0<b \leqq 1$$

$b=0$ のとき　$f(x)=x$ となり，これは条件を満たす．

よって　　　$\boldsymbol{0 \leqq b \leqq 1}$

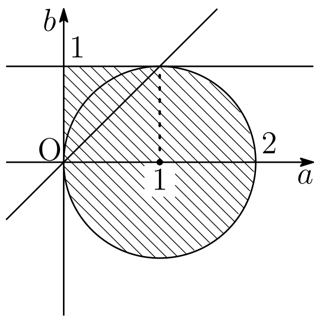
(3) $a \geqq 0$ は，$x>-1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$a=0$ の場合が (2) であり，$a>0$，$D \leqq 0$ の場合が (1) である．

したがって，$a>0$，$D>0$ の場合を求める．

$(*)$ より

$$f'(x)=2a\left(x+\frac{a+b}{2a}\right)^2-\frac{a^2+b^2-2a}{2a}$$



ゆえに　$-\dfrac{a+b}{2a} \leqq -1$，$f'(-1)=-b+1 \geqq 0$

$D>0$ であるから，① より　$a^2+b^2-2a>0$

これを解いて　$a>0$，$b \geqq a$，$b \leqq 1$，$(a-1)^2+b^2>1$

求める領域は，右の図のように (1)，(2) の結果および上式をまとめた領域で，境界線を含む．

2 (1) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$\dfrac{x+X}{2}=p,\ \dfrac{y+Y}{2}=q$

よって，求める点の座標は　$(\boldsymbol{2p-X,\ 2q-Y})$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c \\ &= \left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+f\left(-\frac{a}{3}\right) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

が成り立つ．G の点 $(-\frac{a}{3},\ f(-\frac{a}{3}))$ に関して $y=f(x)$ と対称なグラフは

$$2f\left(-\frac{a}{3}\right)-y=f\left(-\frac{2a}{3}-x\right)$$

ゆえに　$y=2f\left(-\dfrac{a}{3}\right)-f\left(-\dfrac{2a}{3}-x\right)$　$\cdots ②$

② のグラフは ① より

$$\begin{aligned} y &= 2f\left(-\frac{a}{3}\right)-\left\{\left(-\frac{2a}{3}-x+\frac{a}{3}\right)^3\right. \\ &\qquad \left.+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(-\frac{2a}{3}-x+\frac{a}{3}\right)+f\left(-\frac{a}{3}\right)\right\} \\ &= \left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+f\left(-\frac{a}{3}\right) \quad \cdots ②' \end{aligned}$$

①，②$'$ は一致するから，G は点 $(-\frac{a}{3},\ f(-\frac{a}{3}))$ に関して対称である．

(3) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$\dfrac{x+X}{2}=p,\ Y=y$

よって，求める点の座標は　$(\boldsymbol{2p-X,\ Y})$

(4) (3) の直線に関して，$(x,\ y)$ と対称な点 $(2x-p,\ y)$ が G 上にあるとき

$$y=(2p-x)^3+a(2p-x)^2+b(2p-x)+c$$

ゆえに　$y=-x^3+(a+6p)x^2-(12p^2+4ap+b)x+8p^3+4ap^2+2bp+c$

x^3 の係数から，G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でない．

3　(1) $a_{n+1} = {a_n}^2 - a_n + 1 \cdots$ ① より

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} \geqq a_n$$

$a_1 = 2$ であるから，すべての自然数 n に対して　$a_n \geqq 2 \cdots$ ②

よって，すべての自然数 n に対して　$a_n > 0$

(2) ① から　$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$　$\cdots$ ③

②，③ から，$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = a_n$ が成り立つから

$$\frac{a_2-1}{a_1-1} = a_1,\ \frac{a_3-1}{a_2-1} = a_2,\ \cdots,\ \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = a_n$$

これらの式の辺々を掛けて

$$\frac{a_2-1}{a_1-1} \times \frac{a_3-1}{a_2-1} \times \cdots \times \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = a_1a_2\cdots a_n$$

$$\frac{a_{n+1}-1}{a_1-1} = P_n$$

$a_1 = 2$ であるから，$a_{n+1} = P_n + 1$ が成り立つ．

(3) $a_1 = 2$，$a_2 = {a_1}^2 - a_1 + 1 = 2^2 - 2 + 1 = 3$

$a_3 = {a_2}^2 - a_2 + 1 = 3^2 - 3 + 1 = 7$

$a_4 = {a_3}^2 - a_3 + 1 = 7^2 - 7 + 1 = 43$

$$S_1 = \frac{1}{a_1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{5}{6}}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{a_3} = \frac{5}{6} + \frac{1}{7} = \mathbf{\frac{41}{42}}$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{a_4} = \frac{41}{42} + \frac{1}{43} = \mathbf{\frac{1805}{1806}}$$

(4) ②，③ より　$\dfrac{1}{a_{n+1}-1} = \dfrac{1}{a_n-1} - \dfrac{1}{a_n}$

(2) の結果から　$\dfrac{1}{P_n} = \dfrac{1}{P_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n}$　ゆえに　$\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{P_{n-1}} - \dfrac{1}{P_n}$

したがって　$\dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{P_1} - \dfrac{1}{P_n}$

上式の両辺に $\dfrac{1}{a_1}$ を加えると

$$S_n = \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_n} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{P_n} + \frac{1}{2} = \boldsymbol{1 - \frac{1}{P_n}}$$

4 (1) a，b は 1 以外に共通の約数をもたないことである．

(2) a，b を素因数分解して

$$a = {a_1}^{m_1}{a_2}^{m_2}\cdots{a_k}^{m_k}, \quad b = {b_1}^{n_1}{b_2}^{n_2}\cdots{b_l}^{n_l}$$

とする．a，b が互いに素であるならば，$a_1, a_2, \cdots a_k$ と $b_1, b_2, \cdots b_k$ のどの 2 つも一致しない．上式から

$$a^2 = ({a_1}^{m_1}{a_2}^{m_2}\cdots{a_k}^{m_k})^2, \quad b^2 = ({b_1}^{n_1}{b_2}^{n_2}\cdots{b_l}^{n_l})^2$$

このとき，a^2 は $b_1, b_2, \cdots b_k$ で割れない．また，b^2 も $a_1, a_2, \cdots a_k$ で割れない．よって，a^2 と b^2 は互いに素である．

(3) $\sqrt{n}$ が有理数であるとき　$\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$　(p, q は互いに素)

したがって　$n = \dfrac{p^2}{q^2}$

上式おいて，左辺は自然数であり，p，q は互いに素であるから

$$q^2 = 1 \quad ゆえに \quad q = 1，\sqrt{n} = p$$

よって，$\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数である．

(4) $\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数であるから，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ の中に有理数が 2 個以上あれば，それらの差で整数になるものがある．

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}+1} < 1$$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \leqq \frac{2}{\sqrt{3}+1} < 1$$

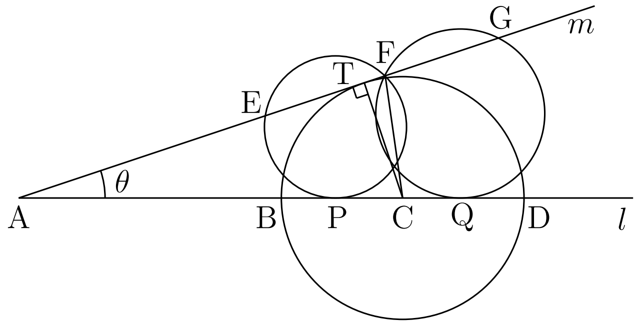
$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} < 1$$

上の 3 式より，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ のうち 2 個以上が有理数となることはない．したがって，有理数は 1 個以下である．
よって，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ の少なくとも 2 個が無理数である．

5　(1) 方べきの定理により

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AE}\cdot\mathrm{AF} = (1-r)\cdot 1 = 1-r$$

よって　$\mathbf{AP} = \boldsymbol{\sqrt{1-r}}$



(2) $\theta = \angle\mathrm{FAC}$ とおいて，$\triangle\mathrm{FAC}$ に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CF}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{CF} = \sqrt{2-2\cos\theta}$$

$\mathrm{CT} = \mathrm{AC}\sin\theta$ より

$$r = 1\cdot\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-r^2}$$

よって　$\mathbf{CF} = \boldsymbol{\sqrt{2-2\sqrt{1-r^2}}}$

(3) 方べきの定理により

$$\mathrm{AQ}^2 = \mathrm{AF}\cdot\mathrm{AG} = 1\cdot(1+r) = 1+r \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AQ} = \sqrt{1+r}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ} &= \mathrm{AQ} - \mathrm{AP} = \sqrt{1+r} - \sqrt{1-r} \\ \mathrm{PQ}^2 &= (\sqrt{1+r} - \sqrt{1-r})^2 \\ &= (1+r) - 2\sqrt{1+r}\sqrt{1-r} + (1-r) \\ &= 2 - 2\sqrt{1-r^2} \end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{PQ} = \sqrt{2-2\sqrt{1-r^2}}$

よって，上式および (2) の結果から　PQ=CF

6 (1) $az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ (a，c は実数) より

$$a^2z\overline{z}+a(\overline{b}z+b\overline{z})+b\overline{b}=b\overline{b}-ac$$

ゆえに　$(az+b)(a\overline{z}+\overline{b})=|b|^2-ac$

したがって　$|az+b|^2=|b|^2-ac$

$|b|^2-ac>0$ より　$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$

よって，z は**中心 $-\dfrac{b}{a}$，半径 $\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$ の円を描く．**

(2) $dz(\overline{z}+1)=\overline{d}\,\overline{z}(z+1)$ より

$$i(d-\overline{d})z\overline{z}+idz-i\overline{d}\,\overline{z}=0$$

i) $d\neq\overline{d}$ のとき (d は虚数)

$$a=i(d-\overline{d}),\quad b=-i\overline{d}\quad\cdots①$$

とおくと

$$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}=0$$

a は実数であり，① と $c=0$ を (1) の結果に代入すると

$$-\frac{b}{a}=-\frac{-i\overline{d}}{i(d-\overline{d})}=\frac{\overline{d}}{d-\overline{d}}$$

$$\frac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}=\frac{|b|}{|a|}=\frac{|-i\overline{d}|}{|i(d-\overline{d})|}=\frac{|d|}{|d-\overline{d}|}$$

よって，z は**中心 $\dfrac{\overline{d}}{d-\overline{d}}$，半径 $\dfrac{|d|}{|d-\overline{d}|}$ の円を描く．**

ii) $d=\overline{d}$ のとき (d は実数)

$d=\overline{d}\neq0$ より　$z(\overline{z}+1)=\overline{z}(z+1)$

したがって　$z=\overline{z}$　ゆえに，z は実数である．

よって，z は**実軸上の直線を描く．**

$\boxed{7}$ (1) 次の6通りに分類できる.

$$\begin{array}{ll}
X_1\,X_2\,3\,3\,3\,5\,5\ \text{のとき} & X_4=3\\
X_1\,3\,3\,3\,X_5\,5\,5\ \text{のとき} & X_4=3\\
X_1\,3\,3\,3\,5\,5\,X_7\ \text{のとき} & X_4=3\\
3\,3\,3\,X_4\,X_5\,5\,5\ \text{のとき} & X_4=3,4,5\\
3\,3\,3\,X_4\,5\,5\,X_7\ \text{のとき} & X_4=3,4,5\\
3\,3\,3\,5\,5\,X_6\,X_7\ \text{のとき} & X_4=5
\end{array}$$

よって，X_4 のとりうる値は　$\mathbf{3, 4, 5}$

(2) $P(X_1=2)=P(X_1\geqq 2)-P(X_1\geqq 3)=\boldsymbol{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

(3) $1\leqq k\leqq 6$ のとき　$P(X_1=k)=\left(\dfrac{7-k}{6}\right)^n-\left(\dfrac{6-k}{6}\right)^n$

$$\begin{aligned}
E(X_1)&=\sum_{k=1}^{6}kP(X_1=k)=\sum_{k=1}^{6}k\left\{\left(\frac{7-k}{6}\right)^n-\left(\frac{6-k}{6}\right)^n\right\}\\
&=\sum_{k=1}^{6}k\left(\frac{7-k}{6}\right)^n-\sum_{k=1}^{6}k\left(\frac{6-k}{6}\right)^n\\
&=\sum_{k=0}^{5}(k+1)\left(\frac{6-k}{6}\right)^n-\sum_{k=0}^{5}k\left(\frac{6-k}{6}\right)^n\\
&=\frac{1}{6^n}\sum_{k=0}^{5}(6-k)^n\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{6^n}(1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n)}
\end{aligned}$$

(4) $2 \leqq k \leqq 6$ のとき

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(X_n \leqq k) - P(X_n \leqq k-1) \\ &= \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

$P(X_n = 1) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ であるから，上式は $k = 1$ のときも成り立つ．

ゆえに，$1 \leqq k \leqq 6$ のとき　$P(X_n = k) = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{6}\right)^n$

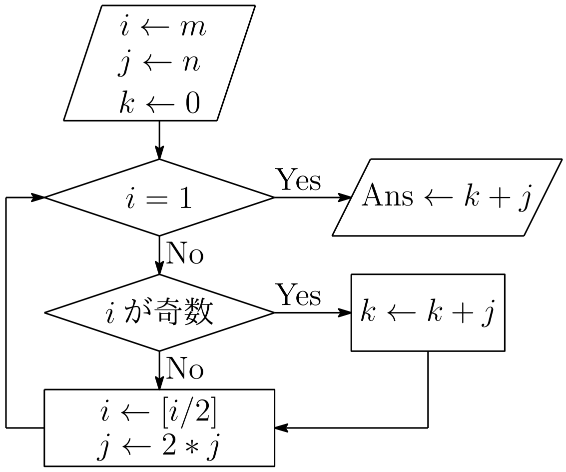
$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k-1}{6}\right)^n \\ &= 6 + \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{5}(k+1)\left(\frac{k}{6}\right)^n \\ &= 6 - \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{k}{6}\right)^n \\ &= 6 - \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \end{aligned}$$

よって，上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_n) &= E(X_1) + E(X_n) \\ &= \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n) \\ &\qquad\qquad + 6 - \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \\ &= \mathbf{7} \end{aligned}$$

8 (1) 右のフローチャートから

	i	j	k
1 周目	100	n	0
2 周目	50	$2n$	0
3 周目	**25**	$\boldsymbol{4n}$	**0**
4 周目	**12**	$\boldsymbol{8n}$	$\boldsymbol{4n}$



(2) i) i が奇数のとき，$[i/2] = \dfrac{i-1}{2}$ であるから

$k \leftarrow k + j$，$i \leftarrow \dfrac{i-1}{2}$，$j \leftarrow 2 * j$ より

$$i * j + k = \frac{i-1}{2} * (2 * j) + (j + k) = i * j + k$$

ii) i が偶数のとき，$[i/2] = \dfrac{i}{2}$ であるから

$i \leftarrow \dfrac{i}{2}$，$j \leftarrow 2 * j$ より

$$i * j + k = \frac{i}{2} * (2 * j) + k = i * j + k$$

i)，ii) より，$i * j + k$ は一定である．

(3) 1 周目の $i * j + k$ は　$m \times n + 0 = mn$

この値は i の値に関係なく不変であり，$i = 1$ のとき $k + j$ となる．

したがって，求める Ans は　$\boldsymbol{mn}$

2.2　2002 年度

1 (1) 接点を A$(a,\ b)$ とすると，A は円 $x^2+y^2=r^2$ の周上の点であるから

$$a^2+b^2=r^2$$

A を通り，OA に垂直な直線上の任意の点を P$(x,\ y)$ とすると
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ であるから

$$a(x-a)+b(y-b)=0 \quad すなわち \quad ax+by=a^2+b^2$$

したがって，接線の方程式は　$ax+by=r^2$

(2) $y=x^2+1$ を微分すると　$y'=2x$
C 上の点 $(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+1)=2t(x-t) \quad すなわち \quad 2tx-y-t^2+1=0$$

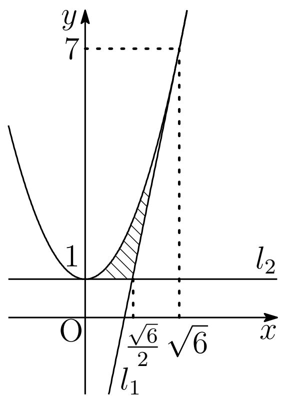
この直線が円 $x^2+y^2=1$ に接するとき，原点からこの直線までの距離が 1 であるから

$$\frac{|-t^2+1|}{\sqrt{(2t)^2+(-1)^2}}=1 \quad これを解いて \quad t=0,\ \pm\sqrt{6}$$

よって，求める 3 本の接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=1,\ \pm 2\sqrt{6}x-y-5=0}$$

(3) 求める面積 S は，右の図の斜線部の面積であるから



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{6}}\{(x^2+1)-1\}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot 6 \\ &= 2\sqrt{6}-\frac{3\sqrt{6}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}} \end{aligned}$$

補足 2009 九州大学 (文系) 前期 $\boxed{\mathbf{4}}$ を参照.

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}(\sqrt{6}-0)^3=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

2 (1) 正の奇数 b を，3 以上の素数 p_k と自然数 i_k を用いて

$$b = {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n} \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(b) &= (1 + p_1 + {p_1}^2 + \cdots + {p_1}^{i_1})(1 + p_2 + {p_2}^2 + \cdots + {p_2}^{i_2}) \\ &\qquad \cdots(1 + p_n + {p_n}^2 + \cdots + {p_n}^{i_n}) \\ &= \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \end{aligned}$$

$a = 2^m b$ より，$a = 2^m {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n}$ であるから，上の結果を利用して

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \\ &= (2^{m+1} - 1)f(b) \end{aligned}$$

(2) $p \geqq 2$ より，a は少なくとも pq，q の 2 個の約数にもつから

$$f(a) \geqq pq + q = (p + 1)q$$

等号が成り立つのは，a の約数が pq，q の 2 個，すなわち，pq は素数，$q = 1$ のときである．よって，等号は p が素数，$q = 1$ のときに限り成り立つ．

(3) $a = 2^2 r$，$b = 2^4 s$ を (1) の結果に適用すると

$$f(a) = (2^3 - 1)f(r), \quad f(b) = (2^5 - 1)f(s)$$

$f(a) = 2b$，$f(b) = 2a$ をみたすとき

$$(2^3 - 1)f(r) = 2{\cdot}2^4 s, \quad (2^5 - 1)f(s) = 2{\cdot}2^2 r$$

ゆえに　$7f(r) = 2^5 s, \quad 31f(s) = 2^3 r \quad \cdots①$

① から　$s = 7s', \quad r = 31r' \quad (s', r'$は自然数$) \quad \cdots②$

② を ① に代入すると

$$f(r) = 2^5 s' \cdots ③, \quad f(s) = 2^3 r' \cdots ④$$

② を (2) の結果に適用すると

$$f(s) \geqq (7 + 1)s' = 8s' \qquad \cdots ⑤$$
$$f(r) \geqq (31 + 1)r' = 32r' \quad \cdots ⑥$$

③，⑥ より $s' \geqq r'$ となり，④，⑤ より $r' \geqq s'$ となるから　$r' = s'$

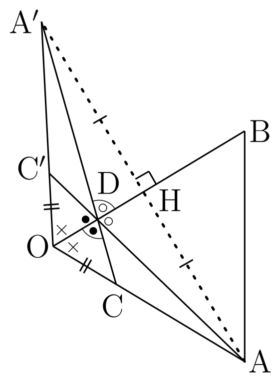
このとき，⑤，⑥ において等号が成り立つ．

ゆえに，(2) の結論から，$r' = s' = 1$ である．

したがって，② より，$r = 31$，$s = 7$ である．

よって　$a = 2^2{\cdot}31 = \mathbf{124}$，　$b = 2^4{\cdot}7 = \mathbf{112}$

3　(1) OB 上に点 P をとると



$$\begin{aligned} \mathrm{AP}+\mathrm{PC} &= \mathrm{A'P}+\mathrm{PC} \\ &\geqq \mathrm{AC} \end{aligned}$$

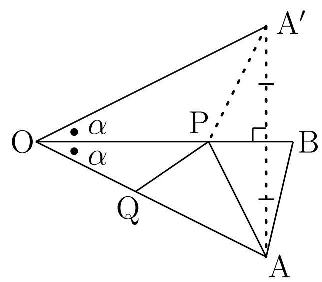
等号が成り立つのは，P を A′C と OB の交点とするときで，この点が D である．
A から OB に下ろした垂線を AH とすると

$$\angle \mathrm{AOH} = \angle \mathrm{A'OH}$$

$\triangle \mathrm{OCD} \equiv \triangle \mathrm{OC'D}$ より　$\angle \mathrm{CDO} = \angle \mathrm{C'DO}$　⋯①
$\triangle \mathrm{ADH} \equiv \triangle \mathrm{A'DH}$ より　$\angle \mathrm{ADH} = \angle \mathrm{A'DH}$　⋯②
OB と A′C の対頂角から　$\angle \mathrm{CDO} = \angle \mathrm{A'DH}$　⋯③

①，②，③ より　$\angle \mathrm{ADH} = \angle \mathrm{C'DO}$
よって，3 点 A，D，C′ は，同一直線上にあり，線分 AC′ は D を通る．

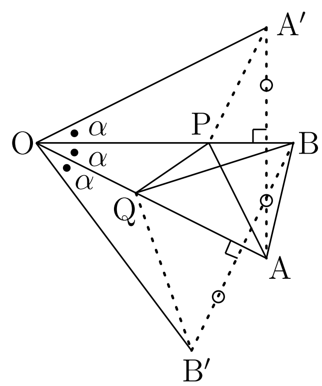
(2) 線分 OB 上に P，線分 OA 上に Q をとると



$$\begin{aligned} \mathrm{AP}+\mathrm{PQ} &= \mathrm{A'P}+\mathrm{PQ} \\ &\geqq \mathrm{A'Q} \end{aligned}$$

等号が成り立つのは，P を A′Q と OB の交点とするときで，この点が F である．
さらに，A′Q が最小となるのは，Q を A′ から OA に下ろした垂線の足とするときで，この点が E である．
よって，折れ線 AFE が最小となるとき，∠AEF は直角である．

(3) 線分 OA に関して B と対称な点を B′ とし，線分 OB 上に P，線分 OA 上に Q をとると



$$\begin{aligned} \mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB} &= \mathrm{A'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB'} \\ &\geqq \mathrm{A'B'} \end{aligned}$$

等号が成り立つのは，P を A′B′ と OB の交点，Q を A′B′ と OA の交点とするときで，このとき，P が H，Q が G である．よって，折れ線 AHGB の長さは

$$\boldsymbol{\mathrm{A'B'} = 2\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

4 (1) $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ であるから

これに，$A = n\theta$，$B = (n-2)\theta$ を代入すると

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos(n-1)\theta\cos\theta$$

よって $\quad \cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \quad \cdots(*)$

$\cos n\theta$ がある n 次式 $p_n(x)$ で表せることを数学的帰納法により示す．

i) $n = 1,\ 2$ のとき

$\cos\theta = x$ とすると，$\cos 2\theta = 2x^2 - 1$ であるから

$$p_1(x) = x,\quad p_2(x) = 2x^2 - 1$$

と定めると，$p_1(x)$ は1次式，$p_2(x)$ は2次式である．

ii) $n = k,\ k+1$ のとき

$\cos k\theta = p_k(\cos\theta)$，$\cos(k+1)\theta = p_{k+1}(\cos\theta)$ をみたす k 次式 $p_k(x)$，$k+1$ 次式 $p_{k+1}(x)$ が存在すると仮定すると，$(*)$ により

$$\cos(k+2)\theta = 2\cos\theta\cos(k+1)\theta - \cos k\theta$$

したがって，$p_{k+2}(x) = 2x\,p_{k+1}(x) - p_k(x)$ と定めると，$p_{k+2}(x)$ は，$k+2$ 次式で，次式が成り立つ．

$$\cos(k+2)\theta = p_{k+2}(\cos\theta)$$

i)，ii) より，すべての自然数 n に対して

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

をみたす n 次式 $p_n(x)$ が存在する．

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数であることを数学的帰納法により示す．

i) $n = 1,\ 2$ のとき

$p_1(x) = x$ は奇関数，$p_2(x) = 2x^2 - 1$ は偶関数である．

ii) $n = 2k-1,\ 2k$ のとき

$p_{2k-1}(x)$ は奇関数，$p_{2k}(x)$ は偶関数であると仮定すると，(1) の結果から $p_{2k+1}(x) = 2x\,p_{2k}(x) - p_{2k-1}(x)$ であるから

$$\begin{aligned} p_{2k+1}(-x) &= 2(-x)\,p_{2k}(-x) - p_{2k-1}(-x) \\ &= -2x\,p_{2k}(x) + p_{2k-1}(x) = -p_{2k+1}(x) \end{aligned}$$

よって，p_{2k+1} は奇関数である．

同様に，$p_{2k+2}(x)=2x\,p_{2k+1}(x)-p_{2k}(x)$ であるから

$$\begin{aligned}p_{2k+2}(-x)&=2(-x)\,p_{2k+1}(-x)-p_{2k}(-x)\\&=2x\,p_{2k+1}(x)-p_{2k}(x)=p_{2k+2}(x)\end{aligned}$$

よって，p_{2k+2} は偶関数である．

i)，ii) より，n が奇数ならば，$p_n(x)$ は奇関数．n が偶数ならば，$p_n(x)$ は偶関数である．

(3) n が奇数ならば，$p_n(x)$ は奇関数であるから，定数項は　0

n が偶数ならば，$p_n(x)$ は偶関数であるから，1 次の係数は　0

$p_{2m}(x)$ の定数項を a_m とし，$p_{2m-1}(x)$ の 1 次の係数を b_m とすると

$$p_1(x)=x,\ \ p_2(x)=2x^2-1\quad\text{これから}\quad a_1=-1,\ \ b_1=1$$

$p_{n+2}(x)=2x\,p_{n+1}(x)-p_n(x)$ に $n=2m-1,\ 2m$ を代入すると

$$\begin{aligned}p_{2m+1}(x)&=2x\,p_{2m}(x)-p_{2m-1}(x)\\p_{2m+2}(x)&=2x\,p_{2m+1}(x)-p_{2m}(x)\end{aligned}$$

上式の第 2 式から　$a_{m+1}=-a_m$　$\cdots$①

上式の第 1 式から　$b_{m+1}=2a_m-b_m$　$\cdots$②

① から　$a_m=a_1(-1)^{m-1}=-1\cdot(-1)^{m-1}=(-1)^m$

これを ② に代入すると

$$b_{m+1}=2(-1)^m-b_m\quad\text{ゆえに}\quad\frac{b_{m+1}}{(-1)^{m+1}}-\frac{b_m}{(-1)^m}=-2$$

したがって　$\dfrac{b_m}{(-1)^m}=\dfrac{b_1}{(-1)^1}-2(m-1)$　ゆえに　$b_m=-(2m-1)\cdot(-1)^m$

よって　$p_{2m}(x)$ の定数項は　$(-1)^m$，

$p_{2m-1}(x)$ の 1 次の係数は　$(2m-1)\cdot(-1)^{m-1}$

以上のことから，$p_n(x)$ の定数項 a_n および 1 次の係数 b_n は

$$a_n=\begin{cases}\mathbf{0} & (\boldsymbol{n}:\text{奇数})\\ (\mathbf{-1})^{\frac{\boldsymbol{n}}{2}} & (\boldsymbol{n}:\text{偶数})\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot(\mathbf{-1})^{\frac{\boldsymbol{n}-1}{2}} & (\boldsymbol{n}:\text{奇数})\\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{n}:\text{偶数})\end{cases}$$

$\boxed{5}$ (1) $n-1$ 本の直線で分割された領域に n 本目の直線を引くことにより，新たな交点が $n-1$ 個でき，分割される領域の個数が n 個増える．したがって

$$L_1 = 2, \quad \boldsymbol{L_n = L_{n-1} + n \ \ (n \geqq 2)}$$

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(L_{k+1} - L_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

ゆえに　$L_n - L_1 = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n - 1$

すなわち　$L_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

$L_1 = 2$ であるから，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{L_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)}$

(2) $H_1 = 2$ で，2 本目の 1 回折れ線を引くことで，4 個の交点ができ，分割される領域が 5 個増えるから　$H_2 = H_1 + 5 = 7$

さらに，3 本目の 1 回折れ線を引くことで，$4 \cdot 2$ 個の交点ができ，分割される領域が $4 \cdot 2 + 1$ 個増えるから　$H_3 = H_2 + 4 \cdot 2 + 1 = \boldsymbol{16}$

(3) n 本の 1 回折れ線で分割された領域に $n+1$ 本目の 1 回折れ線を引くことで，$4n$ 個の交点ができ，分割される領域が $4n+1$ 個増えるから

$$H_1 = 2, \quad H_{n+1} = H_n + 4n + 1$$

が成り立つ．

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(H_{k+1} - H_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)$

ゆえに　$H_n - H_1 = 2n^2 - n - 1$

すなわち　$H_n = 2n^2 - n + 1$

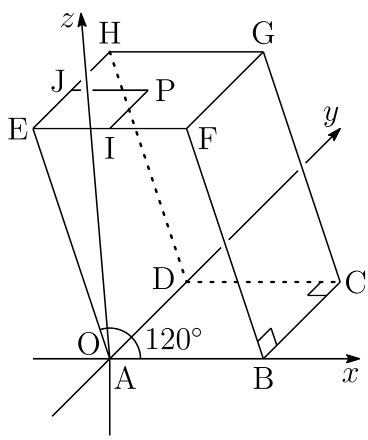
$H_1 = 2$ であるから，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{H_n = 2n^2 - n + 1}$

6　(1) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とすると，$0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\sin\theta>0$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\end{aligned}$$

(2) $\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$ より，四角形 ABCD は正方形であり，$\angle\mathrm{FBC}=90^\circ$ より，四角形 FBCD は長方形である．したがって，面 ABFE$\perp$BC．空間内で点 A，B，D，E の座標を A$(0,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ 1,\ 0)$，E$(-a,\ 0,\ \sqrt{3}a)$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-a,\ y,\ \sqrt{3}a)$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(x-a)^2+y^2+3a^2,$$
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x-a+y$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACP}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(x-y-a)^2+6a^2}}\end{aligned}$$

(3) $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ より，$-1\leqq x-y\leqq 1$ であるから，(2) の結果から

i) $0<a\leqq 1$ のとき

$x-y=a$ で $\triangle\mathrm{ACP}$ は，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}a}{2}}$ をとる．

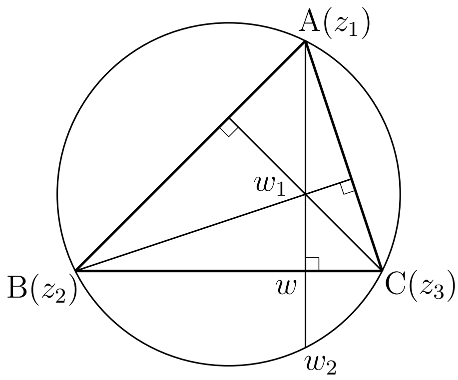
ii) $1<a$ のとき

$x-y=1$ で $\triangle\mathrm{ACP}$ は，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{7a^2-2a+1}}$ をとる．

7 (1) 2点 α，β を通る直線が，2点 γ，δ を通る直線と直交する条件は

$$\arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\pm 90^\circ \quad \text{すなわち} \quad \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}\text{は純虚数}$$

(2) $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ とおく．



点Aを通り，BCに垂直な直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right)}=0 \quad \cdots ①$$

$w_1=z_1+z_2+z_3$，$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ であることから，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}\right)}&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}\right)}\\&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\overline{z}_2+\overline{z}_3}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

したがって，w_1 は直線①上にある．

同様にして，w_1 が点Bを通り直線CAに垂直な直線な直線上の点，および点Cを通り直線ABに垂直な直線上の点であることを示すことができる．

よって，w_1 は△ABCの垂心である．

(3) 円 C の方程式は　$|z|=1$

$w_2=-\overline{z}_1z_2z_3$ より，$|w_2|=|\overline{z}_1||z_2||z_3|=1$

したがって，w_2 は円 C 上の点である．また，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}\right)}&=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\overline{z}_2\overline{z}_3-\overline{z}_1}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\&=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}-\overline{z}_1}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

よって，w_2 は，直線①と円 C の交点である．

8 (1) 原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，右斜め 45° の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め -45° の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．

$$\frac{n-k}{2}=\frac{n+k}{2}-k$$

であるから，$\dfrac{n+k}{2}$ が整数であればよい．したがって $n+k$ は偶数である．逆に $n+k$ が偶数，すなわち $n+k=2m$ をみたす整数 m が存在するとき，折れ線グラフは，右斜め 45° の方向に m 回，右斜め -45° の方向に $m-k$ 回 (または $n-m$ 回) 進む．

また，原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は　$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}}$

(2) 原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，最初に直線 $y=k$ と交わる格子点を $\mathrm{A}(a,\ k)$ とする $(0 \leqq a \leqq n-2)$．A と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数，A と格子点 $(n-1,\ k-1)$ を通る数は，直線 $y=k$ に関する対称性によりその数は等しくともに N とおく．また，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数はそれらの和で

$$N+N=2N$$

である．したがって，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数の 2 倍に等しい．

(3) 2 つの事象 A，B を $A: T_9=3$，B : すべての $i (i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ とすると

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap\overline{B})}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}$$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数は，(1) の結果より　${}_9\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A)=\dfrac{{}_9\mathrm{C}_6}{2^9}$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフで，少なくとも $(1,\ 3)$，$(2,\ 3)$，$\cdots$，$(7,3)$ を通る数は，(2) の結果から，O と $(8,\ 4)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍であるから，(1) の結果より　$2\times{}_8\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A\cap\overline{B})=\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{2^9}$

よって　　$P_A(B)=1-\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{{}_9\mathrm{C}_6}=1-\dfrac{2\times8\cdot7}{2\cdot1}\times\dfrac{3\cdot2\cdot1}{9\cdot8\cdot7}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

2.3　2003年度

1 (1) $g(x) = f(x) - (x+1)^2$ とおくと

$$g(x) = (a-1)\left(x - \frac{1}{a-1}\right)^2 + c - \frac{a}{a-1}$$

$a \geqq 2$ のとき，$a - 1 \geqq 1$ であるから，$0 < \dfrac{1}{a-1} \leqq 1$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$c - \dfrac{a}{a-1}$

したがって，条件 $(*)$ が成り立つための条件は

$$c - \frac{a}{a-1} \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geqq \frac{a}{a-1}$$

よって，最小の c の値は　$\dfrac{a}{a-1}$

(2) i) $1 < a \leqq 2$ のとき，$0 < a-1 \leqq 1$，$1 \leqq \dfrac{1}{a-1}$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

ii) $a = 1$ のとき，$g(x) = -2x + c - 1$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

iii) $a < 1$ のとき，$a - 1 < 0$，$\dfrac{1}{a-1} < 0$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

i)〜iii) より，条件 $(*)$ が成り立つための条件は

$$g(1) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geqq 4 - a$$

よって，最小の c の値は　$4 - a$

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax^2+c)\,dx = \frac{a}{3}+c$

i) $a \geqq 2$ のとき，$c \geqq \dfrac{a}{a-1}$ より

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &\geqq \frac{a}{3}+\frac{a}{a-1} = \frac{(a-1)+1}{3}+\frac{(a-1)+1}{a-1}\\ &= \frac{a-1}{3}+\frac{1}{a-1}+\frac{4}{3}\\ &\geqq 2\sqrt{\frac{a-1}{3}\times\frac{1}{a-1}}+\frac{4}{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{4+2\sqrt{3}}{3}$

等号が成り立つのは

$$\frac{a-1}{3} = \frac{1}{a-1},\quad c = \frac{a}{a-1}$$

$a \geqq 2$ より　$a = 1+\sqrt{3}$, $c = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

ii) $a \leqq 2$ のとき，$c \geqq 4-a$ より

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{a}{3}+4-a = -\frac{2}{3}a+4 \geqq -\frac{2}{3}\cdot 2+4 = \frac{8}{3}$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{8}{3}$

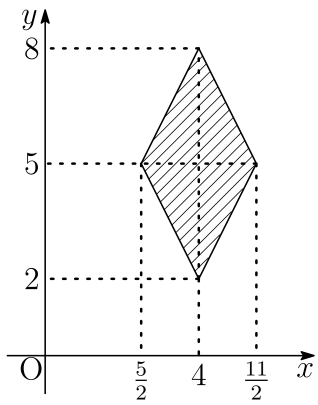
等号が成り立つのは　$a=2$，$c=4-a=2$

i)，ii) より，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ は

$\boldsymbol{a = 1+\sqrt{3}}$**，**$\boldsymbol{c = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}}$ をとる

2 (1) 不等式 $2|x| + |y| \leqq 3$ の表す領域は，4 点 $(\frac{3}{2},\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(-\frac{3}{2},\ 0)$，$(0, -3)$ を頂点とする四角形の周およびその内部である．

不等式 $2|x-4| + |y-5| \leqq 3$ の表す領域 A は，$2|x| + |y| \leqq 3$ の表す領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものであるから，A の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



(2) $f(x,\ y) = 2|x-4| + |y-5|$，$g(x,\ y) = 2\Big||x|-4\Big| + \Big||y|-5\Big|$ とおく．

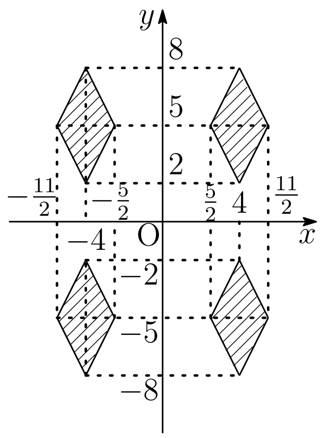
$f(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域 A の点 $(x_1,\ y_1)$ は，(1) の結果から $x_1 > 0$，$y_1 > 0$ であり，$g(x,\ y) = f(|x|,\ |y|)$ が成り立つから

$$g(\pm x_1, \pm y_1) = f(x_1,\ y_1) \leqq 3$$

$g(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域は B であるから

$$(x_1,\ y_1) \in A \quad \Longrightarrow \quad (\pm x_1, \pm y_1) \in B$$

したがって，B の表す領域は，A および A を x 軸，y 軸，原点に関して対称移動したものである．よって，B の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



(3) x，$|y|$ は正の整数であるから，領域 B 内の点において，これを満たす $(x,\ |y|)$ の組は，次のとおりである．

$$\begin{aligned}(x,\ |y|) =&(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\\ &(4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7),\ (4,\ 8),\\ &(5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6)\end{aligned}$$

$\log_x |y| = \dfrac{m}{n}$ (m，n は整数) とおくと

$$x^{\frac{m}{n}} = |y| \quad ゆえに \quad x^m = |y|^n \quad \cdots ①$$

素因数分解の一意性により，① を満たすものは

$$(x,\ |y|) = (4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 8),\ (5,\ 5)$$

よって，求める $(x,\ y)$ の組は次の 8 組である．

$$\boldsymbol{(x,\ y) = (4, \pm 2),\ (4, \pm 4),\ (4, \pm 8),\ (5, \pm 5)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)
$$\begin{aligned} px - f(x) &= px - (ax^2 + bx + c) \\ &= -ax^2 + (p-b)x - c \\ &= -a\left(x - \frac{p-b}{2a}\right)^2 + \frac{(p-b)^2}{4a} - c \end{aligned}$$

$-a < 0$ より，$px - f(x)$ の最大値 $g(p)$ は

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{(p-b)^2}{4a} - c \\ &= \frac{1}{4a}p^2 - \frac{b}{2a}p + \frac{b^2}{4a} - c \end{aligned}$$

したがって　$g(x) = \dfrac{1}{4a}x^2 - \dfrac{b}{2a}x + \dfrac{b^2}{4a} - c$

$f(x) = g(x)$ であるから

$$a = \frac{1}{4a},\quad b = -\frac{b}{2a},\quad c = \frac{b^2}{4a} - c$$

$a > 0$ より　$a = \dfrac{1}{2}$，$b = 0$，$c = 0$

よって　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{2}x^2}$

(2)
$$\begin{aligned} xp - g(p) &= xp - \left(\frac{1}{4a}x^2 - \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a} - c\right) \\ &= -\frac{1}{4a}p^2 + \frac{b+2ax}{2a}p + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= -\frac{1}{4a}\{p - (b+2ax)\}^2 + ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

$-\dfrac{1}{4a} < 0$ より，求める最大値 $h(x)$ は

$$\boldsymbol{h(x) = ax^2 + bx + c}$$

別解　条件から

$$px - f(x) \leqq g(p)\quad したがって\quad xp - g(p) \leqq f(x)$$

第 2 式から，p の関数 $xp - g(p)$ の最大値 $h(x)$ は

$$\boldsymbol{h(x) = ax^2 + bx + c}$$

(3) $y=px+q$ が $x=t$ で $y=f(x)$ に接するとき，2 式から y を消去すると

$$f(x)=px+q\cdots ①\quad \text{すなわち}\quad ax^2+(b-p)x+c-q=0\cdots ②$$

$x=t$ は，① の解であるから

$$f(t)=pt+q\cdots ③$$

$x=t$ は ② の重解であるから，$D=0$ より

$$(b-p)^2-4a(c-q)=0\quad \text{ゆえに}\quad q=-\frac{1}{4a}(p-b)^2+c$$

よって $$q=-g(p)\cdots ④$$

③，④ より $$\boldsymbol{pt-f(t)=g(p),\ q=-g(p)}\quad \cdots(*)$$

逆に，$(*)$ の第1式から

$$pt-(at^2+bt+c)=\frac{1}{4a}(p-b)^2-c$$
$$t^2-\frac{1}{a}(p-b)t+\frac{1}{4a^2}(p-b)^2=0$$

したがって $$\left(t-\frac{p-b}{2a}\right)^2=0$$

ゆえに $$t=\frac{p-b}{2a}\quad \text{よって}\quad p=2at+b\cdots ⑤$$

$(*)$ より $$q=-pt+f(t)\cdots ⑥$$

⑤，⑥ および $p=f'(t)$ であるから，直線 $y=px+q$ は

$$y=px-pt+f(t)\quad \text{すなわち}\quad y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

上式は，$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式である．

別解 ($px-f(x)$ の最大値が $g(p)$ であることを利用する)

$y=px+q$ が $x=t$ で $y=f(x)$ に接する．

$\Longleftrightarrow$ 2次方程式 $px+q=f(x)$ は $x=t$ を重解にもつ．

$\Longleftrightarrow$ 2次方程式 $px-f(x)=-q$ は $x=t$ を重解にもつ．

$\Longleftrightarrow$ 上に凸の放物線 $y=px-f(x)$ と直線 $y=-q$ は点 $(t,\ g(p))$ で接する．

$\Longleftrightarrow$ $pt-f(t)=g(p)$，$-q=g(p)$，すなわち $g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$

4 (1) $a_{k+1} \neq a_k$ のとき，m_k は直線 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の傾きであるから

$$m_k = \frac{{a_{k+1}}^2 - {a_k}^2}{a_{k+1} - a_k} = a_{k+1} + a_k$$

$a_{k+1} = a_k$ のとき，m_k は上式における $a_{k+1} \to a_k$ の極限値であるから

$$m_k = 2a_k$$

上の 2 式から　$m_k = a_{k+1} + a_k$　よって　$\boldsymbol{a_{k+1} = -a_k + m_k}$

(2) $m_k = m_1 r^{k-1}$ であるから　$a_{k+1} + a_k = m_1 r^{k-1}$

ゆえに　$$(-1)^{k+1}a_{k+1} - (-1)^k a_k = m_1(-r)^{k-1}$$

$k \geqq 2$ のとき　$$\sum_{j=1}^{k-1}\{(-1)^{j+1}a_{j+1} - (-1)^j a_j\} = m_1\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1}$$

$$(-1)^k a_k + a_1 = m_1\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1}$$

したがって　$$a_k = (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1} \quad \cdots(*)$$

i) $-r \neq 1$　すなわち　$r \neq -1$ のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1 \times \frac{1-(-r)^{k-1}}{1+r} \\ &= (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1 \end{aligned}$$

ii) $-r = 1$　すなわち　$r = -1$ のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1(k-1) \\ &= (-1)^k\{-a_1 + (k-1)m_1\} \end{aligned}$$

i)，ii) で得られた結果は，ともに $k = 1$ のときも成り立つので

$\boldsymbol{r \neq -1}$ **のとき**　$$\boldsymbol{a_k = (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1}$$

$\boldsymbol{r = -1}$ **のとき**　$$\boldsymbol{a_k = (-1)^k\{-a_1 + (k-1)m_1\}}$$

(3) $m_1 \neq 0$ より $a_1 = \dfrac{m_1}{1+r} \neq 0$．$r \neq -1$ より (2) の結果から

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1 \\ &= (-1)^{k+1}a_1 + \{(-1)^k + r^{k-1}\}a_1 \\ &= r^{k-1}a_1 \end{aligned}$$

$m_k = a_{k+1} + a_k$ および上式から $a_{k+1} = ra_k$ であるから

$$m_k = ra_k + a_k = (1+r)a_k$$

よって ℓ_k の方程式は

$$y - {a_k}^2 = (1+r)a_k(x - a_k) \quad \text{すなわち} \quad y = (1+r)a_k x - r{a_k}^2$$

直線 $y = (1+r)a_k x - r{a_k}^2$ について，$(1+r)a_k \neq 0$ であるから，これが $y = bx^2$ に接するとき，$b \neq 0$ である．2 式から y を消去し整理すると

$$bx^2 - (1+r)a_k x + r{a_k}^2 = 0$$

このとき

$$\begin{aligned} D &= (1+r)^2{a_k}^2 - 4br{a_k}^2 \\ &= \{(1+r)^2 - 4br\}{a_k}^2 \end{aligned}$$

$r \neq 0, -1$ であるから，$\boldsymbol{b = \dfrac{(1+r)^2}{4r}}$ とすると，$D = 0$ となる．
よって，任意の k に対して，直線 ℓ_k は放物線 $y = \dfrac{(1+r)^2}{4r}x^2$ に接する．

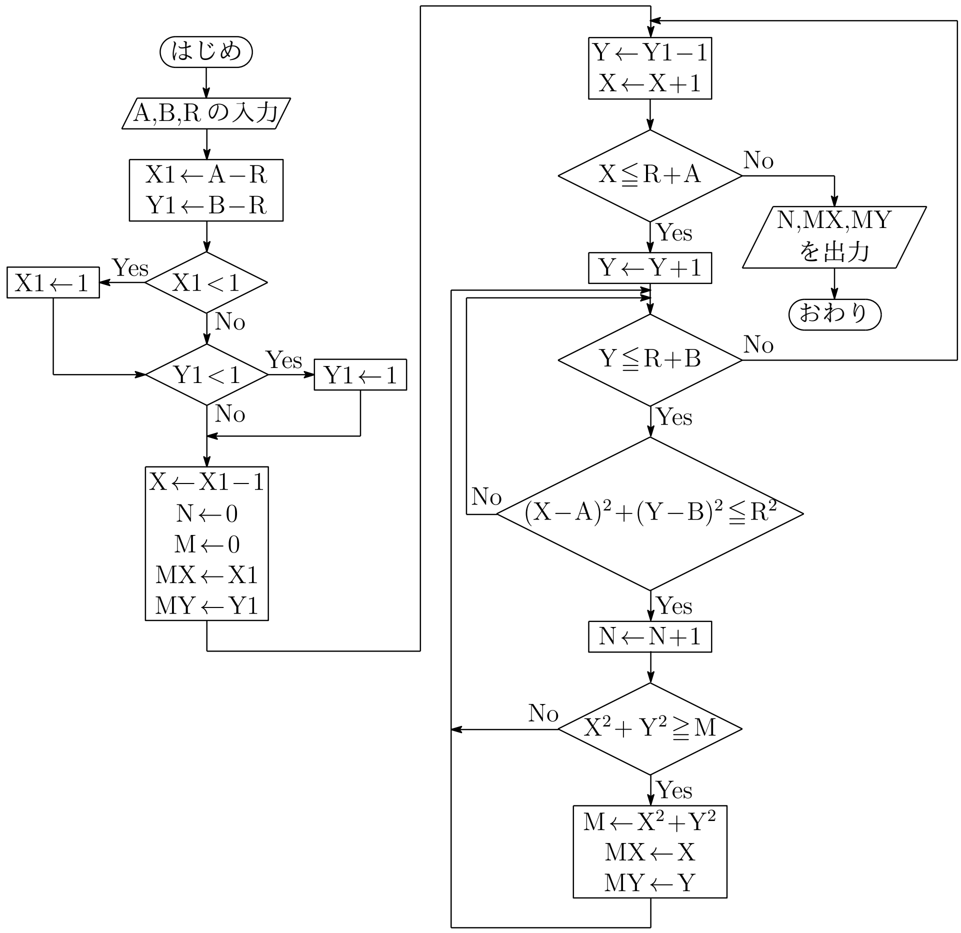
5 (1) 自然数 C に対して，$XY = C$ をみたす 2 つの自然数 $(X,\ Y)$ の組とその個数 N を求め，X を小さい順に出力するプログラムである．したがって，

$(\mathrm{X},\ \mathrm{Y}) = (1, 105),\ (3, 35),\ (5, 21),\ (7, 15),\ (15,\ 7),\ (21, 5),\ (35, 3),\ (105, 1)$
および $\mathrm{N} = 8$ が出力される．

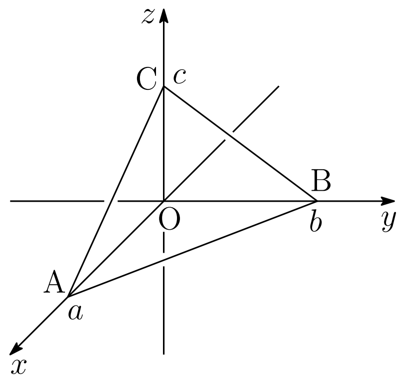
(2) $\mathrm{X1} = \max(\mathrm{A} - \mathrm{R},\ 1)$，$\mathrm{Y1} = \max(\mathrm{B} - \mathrm{R},\ 1)$ とし，$\mathrm{X1} \leqq x \leqq \mathrm{A} + \mathrm{R}$，$\mathrm{Y1} \leqq y \leqq \mathrm{B} + \mathrm{R}$ を満たす領域内の格子点 $(x,\ y)$ について，円の内部または周上にある格子点の個数を N，それらの格子点のうちで原点からの距離が最大である点の座標を $(\mathrm{MX}, \mathrm{MY})$ とする．

また，これらの点について，次の順に調べていく．

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{X1},\ \mathrm{Y1}) \to (\mathrm{X1},\ \mathrm{Y1}+1) \to \cdots \to (\mathrm{X1},\ \mathrm{B}+\mathrm{R})\\
\to&(\mathrm{X1}+1,\ \mathrm{Y1}) \to (\mathrm{X1}+1,\ \mathrm{Y1}+1) \to \cdots \to (\mathrm{X1}+1,\ \mathrm{B}+\mathrm{R})\\
&\cdots\\
\to&(\mathrm{A}+\mathrm{R},\ \mathrm{Y1}) \to (\mathrm{A}+\mathrm{R},\ \mathrm{Y1}+1) \to \cdots \to (\mathrm{A}+\mathrm{R},\ \mathrm{B}+\mathrm{R})
\end{aligned}
$$



6　(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$$

第 1 式から　$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)\cdot(-a,\ b,\ 0)=0$

ゆえに　$a^2=b^2$

第 2 式から　$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)\cdot(0,-b,\ c)=0$

ゆえに　$b^2=c^2$

よって，$a>0,\ b>0,\ c>0$ より

$$\boldsymbol{a=b=c}$$

(2) D は線分 BC を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P は直線 AD 上の A 以外の点であるから $(t\neq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

△APQ の重心が G であるから

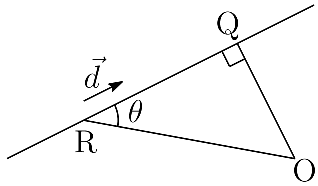
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\quad \text{すなわち}\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$=(-a,\ b,\ c)+\frac{t}{3}(3a,-2b,-c)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-a,\ b,\ c)$，$\vec{d}=(3a,-2b,-c)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{t}{3}\vec{d}\quad\cdots①$$



$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\vec{d}$ のベクトルのなす角を θ とすると
$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$，OQ が最小となるとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2|\vec{d}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d})^2}}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\vec{d}|}$$

上の 2 式から　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2|\vec{d}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d})^2}}{|\vec{d}|}$　$\cdots$②

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\vec{d}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{d}=0$ であるから，① をこれに代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d} + \frac{t}{3}|\vec{d}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{3(\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d})}{|\vec{d}|^2}$$

したがって　$t = \dfrac{3(3a^2+2b^2+c^2)}{9a^2+4b^2+c^2} \neq 0$

$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2|\vec{d}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\vec{d})^2 = b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2$ であるから，② より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{\sqrt{b^2c^2+4c^2a^2+a^2b^2}}{\sqrt{9a^2+4b^2+c^2}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{b^2c^2+4c^2a^2+a^2b^2}{9a^2+4b^2+c^2}}}$$

7 (1) $z = t + ai$ より

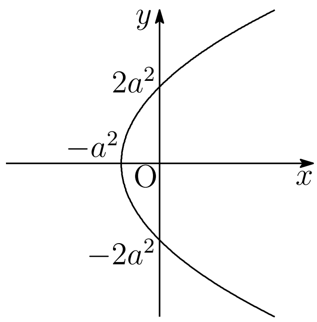
$$z^2 = (t+ai)^2 = (t^2 - a^2) + 2ati$$

$x = t^2 - a^2$, $y = 2at$ とおき，2式から t を消去すると

$$x = \frac{y^2}{4a^2} - a^2$$

ゆえに $\boldsymbol{4a^2(x + a^2) = y^2}$ $\cdots$①

よって，求める軌跡は右の図のようになる．



(2) m は ℓ を原点を中心に θ だけ回転させたものであるから

$$\begin{aligned} z(\cos\theta + i\sin\theta) &= (t+ai)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (t\cos\theta - a\sin\theta) + i(t\sin\theta + a\cos\theta) \end{aligned}$$

$x = t\cos\theta - a\sin\theta$, $y = t\sin\theta + a\cos\theta$ とおき，2式から t を消去すると

$$x\sin\theta - y\cos\theta + a = 0 \quad \cdots②$$

i) $\sin\theta = 0$ のとき
②は $y = \pm a$ の直線であり，①，②の共有点は1個

ii) $\sin\theta \neq 0$ のとき
①，②から x を消去して整理すると

$$(\sin\theta)y^2 - (4a^2\cos\theta)y - 4a^3(a\sin\theta - 1) = 0 \quad \cdots(*)$$

これは y に関する2次方程式であるから，その係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= 4a^4\cos^2\theta + 4a^3\sin\theta(a\sin\theta - 1) \\ &= 4a^3(a - \sin\theta) \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ に注意して

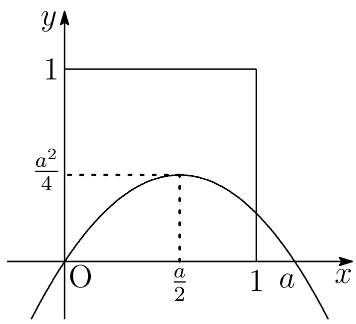
$-1 \leqq \sin\theta < a$ のとき $(*)$ の実数解は2個
$\sin\theta = a$ のとき $(*)$ の実数解は1個
$a < \sin\theta \leqq 1$ のとき $(*)$ の実数解は0個

i), ii) より，①，②の共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta < 0,\ 0 < \sin\theta < a} \text{ のとき} & \boldsymbol{2}\text{個} \\ \boldsymbol{\sin\theta = 0,\ a} \text{ のとき} & \boldsymbol{1}\text{個} \\ \boldsymbol{a < \sin\theta \leqq 1} & \boldsymbol{0}\text{個} \end{cases}$$

8 (1) 正方形の面積は　1

正方形の周および内部と放物線 $y = x(a-x)$ で囲まれた部分の面積を S とし，求める確率を $P(a)$ とすると　$P(a) = \dfrac{S}{1} = S$



i) $0 < a \leqq 1$ のとき

$$P(a) = \int_0^a x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a^3}{6}}$$

ii) $1 < a \leqq 2$ のとき

$$P(a) = \int_0^1 x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a}{2} - \frac{1}{3}}$$

(2) 求める確率は

$$P\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - P\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \left(1 - P\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot P\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{48}\left(1 - \frac{5}{12}\right) + \left(1 - \frac{1}{48}\right) \times \frac{5}{12} = \boldsymbol{\frac{121}{288}}$$

(3) 3 回ともはずれる確率は　$(1 - P(a))^3$ である．

少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であるから

$$1 - (1 - P(a))^3 \geqq \frac{19}{27} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \geqq \frac{1}{3} \quad \cdots ①$$

当たりの数の期待値 E は

$$E = \sum_{k=0}^{3} k\cdot{}_3\mathrm{C}_k (P(a))^k (1 - P(a))^{3-k} = 3P(a)$$

この期待値 E が $\dfrac{3}{2}$ 以下であるから

$$3P(a) \leqq \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

①，② から　$\dfrac{1}{3} \leqq P(a) \leqq \dfrac{1}{2}$

これを満たす a は (1) の ii) の場合について調べればよいので

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \leqq \frac{1}{2} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{\frac{4}{3} \leqq a \leqq \frac{5}{3}}$$

2.4　2004年度

1　(1) 放物線 $y=-px^2+2$ は，2点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るから

$$-p\cdot 18+2=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{p=\frac{1}{9}}$$

(2) $y=-\dfrac{1}{9}x^2+2$ と $y=|\,x\,|-2$ から y を消去すると

$$-\frac{1}{9}x^2+2=|\,x\,|-2 \quad \text{ゆえに} \quad |\,x\,|^2+9|\,x\,|-36=0$$

したがって　$(|\,x\,|+12)(|\,x\,|-3)=0$　すなわち　$x=\pm 3$

よって，求める交点の座標は　**(3, 1)，(−3, 1)**

(3) (2) の結果より，点Aの座標は　$(-3,\ 1)$

$f(x)=-\dfrac{1}{9}x^2+2$ を微分すると　$f'(x)=-\dfrac{2}{9}x$

$y=f(x)$ のAにおける接線の傾きは　$f'(-3)=-\dfrac{2}{9}\cdot(-3)=\dfrac{2}{3}$

よって，$y=f(x)$ のAにおける接線の方程式 $y=h(x)$ は

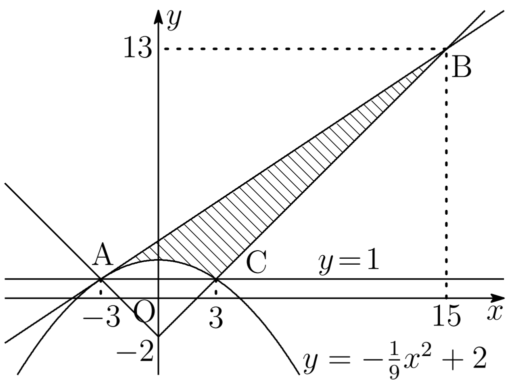
$$y-1=\frac{2}{3}(x+3) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\frac{2}{3}x+3}$$

$y=h(x)$，$y=g(x)$ の共有点の座標は

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x+3 \\ y=|\,x\,|-2 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad (x,\ y)=(-3,\ 1),\ (15,\ 13)$$

BはAと異なる点であるから　**B(15, 13)**

(4) (2) で求めた2交点で，Aと異なる点をCとし，直線ACと $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_1 とすると



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-3}^{3}\left\{\left(-\frac{1}{9}x^2+2\right)-1\right\}dx \\ &= -\frac{1}{9}\int_{-3}^{3}(x+3)(x-3)\,dx \\ &= 4 \end{aligned}$$

求める面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABC}-S_1=\frac{1}{2}\{3-(-3)\}(13-1)-4=\boldsymbol{32}$$

$\boxed{2}$ (1) $\beta = z - 1 = \cos\theta - 1 + i\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}|\,\beta\,| &= \sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta} = \sqrt{2(1-\cos\theta)}\\ &= \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$ であるから　　$|\,\beta\,| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$

(2) $\beta = \cos\theta - 1 + i\sin\theta = -2\sin^2\dfrac{\theta}{2} + 2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$\begin{aligned}&= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}+90^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+90^\circ\right)\right\}\end{aligned}$$

(1) の結果より $2\sin\dfrac{\theta}{2} = |\beta|$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$90^\circ < \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ < 180^\circ$ であるから　$\arg\beta = \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ$

(3) $\alpha = \cos\theta + 1 + i\sin\theta$

$$\begin{aligned}&= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から，$\theta = 60^\circ$ のとき

$$\alpha = \sqrt{3}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ),\quad \beta = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

ゆえに　$|\alpha^m\beta^n| = (\sqrt{3})^m$，$\arg(\alpha^m\beta^n) = 30^\circ\times m + 120^\circ\times n$

$\alpha^m\beta^n$ の虚部を I とすると　$I = (\sqrt{3})^m\sin(30^\circ\times m + 120^\circ\times n)$

$n = 1$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m\sin(30^\circ\times m + 120^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$n = 2$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m\sin(30^\circ\times m + 240^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$n = 3$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m\sin(30^\circ\times m + 360^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$I < 0$ となるのは，次の 4 通りで，そのときの I の値は

$(m,\ n) = (1,\ 2)$ のとき　$I = -\sqrt{3}$,

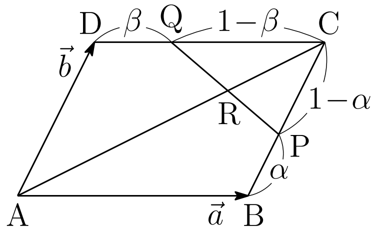
$(m,\ n) = (2,\ 2)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$ のとき　$I = -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

よって，$\boldsymbol{(m,\ n) = (2,2),\ (3,1),\ (3,2)}$ のとき，**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}}$ をとる．

$\boxed{3}$ (1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \\ &= \boldsymbol{\vec{a} + \alpha\vec{b}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DQ}} \\ &= \boldsymbol{\vec{b} + \beta\vec{a}}\end{aligned}$$



(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-\alpha\beta)\vec{a}, \quad -\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-\alpha\beta)\vec{b}$$

$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ より，$1-\alpha\beta \neq 0$ であるから

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}, \quad \vec{b} = \frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{a} + \vec{b} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta} + \frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta} \\ &= \frac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta} \\ &= \frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta} \times \frac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(1-\alpha)+(1-\beta)}\end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(1-\alpha)+(1-\beta)}$，　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}} = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}}$，　$\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}}$

(3)

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{AQR} &= \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}} \times \triangle\mathrm{AQC} \\ &= \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{DC}} \times \triangle\mathrm{ADC} \\ &= \frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta} \times (1-\beta) \times \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin 120^\circ \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(1-\alpha\beta)(1-\beta)}{2(2-\alpha-\beta)}}\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 起こりうる場合の総数は　2^6 (通り)

(1) 左端が赤色で，色の変化がちょうど 1 回起きる場合は，次の 5 通り．

「赤青青青青青」,「赤赤青青青青」,「赤赤赤青青青」,
「赤赤赤赤青青」,「赤赤赤赤赤青」

よって，求める確率は　$\dfrac{5}{2^6} = \mathbf{\dfrac{5}{64}}$

(2) 色の変化が 1 回も起きない場合は，次の 2 通り

「赤赤赤赤赤赤」,「青青青青青青」

色の変化が 1 回だけ起きる場合は，(1) の左端が赤である場合と，同様に左端が青である場合の 5×2 通りである．

したがって，色の変化が 1 回以下である確率は　$\dfrac{2 + 5 \times 2}{2^6} = \dfrac{3}{16}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{3}{16} = \mathbf{\dfrac{13}{16}}$

(3) 左端が赤色か青色の 2 通りに対して，色の変化が 2 個目，3 個目，$\cdots$，6 個目の 5 個の電球の中から変化する電球 n 個を選ぶ場合の数は

$$2 \times {}_5\mathrm{C}_n \ (\text{通り})$$

求める確率を $P(n)$ とすると $(0 \leqq n \leqq 5)$

$$P(n) = \frac{2 \times {}_5\mathrm{C}_n}{2^6} = \boldsymbol{\frac{{}_5\mathrm{C}_n}{32}}$$

(4) 求める期待値を E とすると，(3) の結果から

$$E = \sum_{n=0}^{5} n \cdot P(n) = \frac{1}{32}\sum_{n=0}^{5} n \cdot {}_5\mathrm{C}_n = \frac{1}{32} \times 5 \cdot 2^{5-1} = \mathbf{\frac{5}{2}}$$

補足

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n \cdot 2^{n-1}$$

2.5　2005 年度

1　(1) C 上の点を $\mathrm{X}(t,\ at^2)$ とすると $(t \geqq 0)$

$$\begin{aligned}\mathrm{AX}^2 &= t^2 + \left\{at^2 - \left(a + \frac{1}{2a}\right)\right\}^2 \\ &= a^2t^4 - 2a^2t^2 + \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 \\ &= a^2(t^2-1)^2 + 1 + \frac{1}{4a^2}\end{aligned}$$

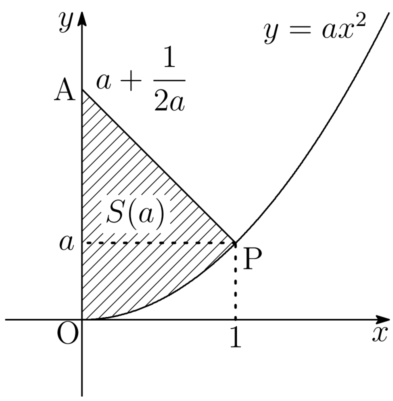
AX^2 は，$t^2 = 1$　すなわち　$t = 1$ のとき，AX^2 は最小値 $1 + \dfrac{1}{4a^2}$ をとる．

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{P}(1,\ a)}$，$\boldsymbol{\mathrm{AP} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4a^2}}}$

(2) $S(a) = \dfrac{1}{2}\left\{a + \left(a + \dfrac{1}{2a}\right)\right\} \times 1 - \displaystyle\int_0^1 ax^2\,dx$

$= a + \dfrac{1}{4a} - \dfrac{a}{3}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2a}{3} + \dfrac{1}{4a}}$



(3) $a > 0$ より，$\dfrac{2a}{3} > 0$，$\dfrac{1}{4a} > 0$ であるから，
相加平均および相乗平均の関係により

$$\frac{2a}{3} + \frac{1}{4a} \geqq 2\sqrt{\frac{2a}{3}\cdot\frac{1}{4a}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

等号が成り立つのは　$\dfrac{2a}{3} = \dfrac{1}{4a}$　すなわち　$a = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のときに限る．

よって，$S(a)$ は，$\boldsymbol{a = \dfrac{\sqrt{6}}{4}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ をとる．

2　(1) 2 次方程式 $z^2+tz+t=0\cdots$ ① が異なる 2 つの虚数解をもつとき，$D<0$ であるから

$$t^2-4{\cdot}1{\cdot}t<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{0<t<4}$$

このとき，方程式 ① の解は　$\boldsymbol{z=\dfrac{-t\pm\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}}$

(2) $z=z(t)$ とおくと，解と係数の関係により　$z+\overline{z}=-t$，$z\overline{z}=t$

上の 2 式から t を消去すると

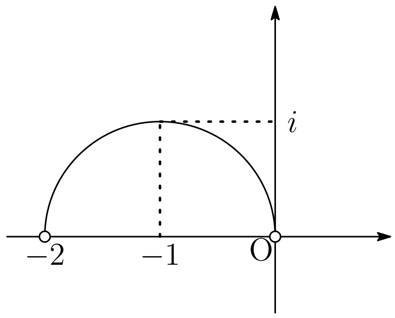
$$z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$

$$(z+1)(\overline{z}+1)=1$$

したがって　$|z+1|^2=1$

よって　$|z+1|=1$

ゆえに，$z(t)$ は，-1 を中心とする半径 1 の円周上で，虚部が正である点である．

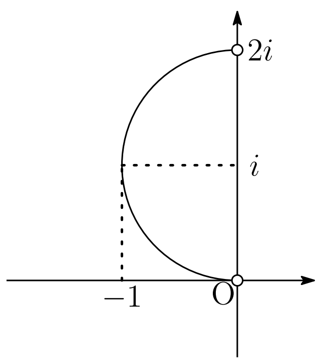


よって，$z(t)$ が描く図形 C は，右の図のようになる．

(3) (2) の結果から，$z=-1+(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(0^\circ<\theta<180^\circ)$

$$\begin{aligned} w&=\frac{iz}{z+1}=\frac{i\{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)\}}{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)+1}\\ &=\frac{-i+i(\cos\theta+i\sin\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta}\\ &=-i\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\ &=(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\ &=i+\cos(270^\circ-\theta)+i\sin(270^\circ-\theta) \qquad (90^\circ<270^\circ-\theta<270^\circ) \end{aligned}$$

よって，w が描く図形は，下の図のようになる．



3 (1) $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 1$ より $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 2$

したがって $\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 2$

ゆえに $\dfrac{5}{2}+\cos\theta < 3$ すなわち $\cos\theta < \dfrac{1}{2}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\boldsymbol{60^\circ < \theta < 180^\circ}$

(2) $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right] \geqq 1$ より

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\sin\theta \geqq \log_2\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって $\sin\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\boldsymbol{45^\circ \leqq \theta \leqq 135^\circ}$

(3) $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 0$ であるから $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 1$

したがって $\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 1$

ゆえに $\dfrac{5}{2}+\cos\theta < 2$ すなわち $\cos\theta < -\dfrac{1}{2}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $120^\circ < \theta < 180^\circ \quad \cdots①$

次に，$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right] \geqq 0$ であるから

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\sin\theta \geqq \log_2\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

したがって $\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\alpha \leqq \theta \leqq 180^\circ - \alpha \quad \cdots②$

①，② の共通範囲を求めて $\boldsymbol{120^\circ < \theta \leqq 180^\circ - \alpha}$

$\boxed{4}$ さいころを 4 回投げるとき，目の出方の総数は　6^4 (通り)

(1) $x_1 < x_2$ の目の出方の総数は　${}_6\mathrm{C}_2$ (通り)

x_3，x_4 の目の出方の総数は　6^2 (通り)

よって，求める確率は　$P(x_1 < x_2) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_2 \times 6^2}{6^4} = \boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ の目の出方の総数は　${}_6\mathrm{C}_3$ (通り)

x_4 の目の出方の総数は　6 (通り)

よって，求める確率は　$P(x_1 < x_2 < x_3) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_3 \times 6}{6^4} = \boldsymbol{\dfrac{5}{54}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} P(x_1 < x_2 \geqq x_3) &= P(x_1 < x_2) - P(x_1 < x_2 < x_3) \\ &= \frac{5}{12} - \frac{5}{54} = \boldsymbol{\frac{35}{108}} \end{aligned}$$

(4) $P(k=1) = P(x_1 \geqq x_2) = 1 - P(x_1 < x_2) = 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}$

$P(k=2) = P(x_1 < x_2 \geqq x_3) = \dfrac{35}{108}$

$P(k=4) = P(x_1 < x_2 < x_3 < x_4) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_4}{6^4} = \dfrac{5}{432}$

$$\begin{aligned} P(k=3) &= P(x_1 < x_2 < x_3) - P(x_1 < x_2 < x_3 < x_4) \\ &= \frac{5}{54} - \frac{5}{432} = \frac{35}{432} \end{aligned}$$

よって，求める期待値は

$$1 \times \frac{7}{12} + 2 \times \frac{35}{108} + 3 \times \frac{35}{432} + 4 \times \frac{5}{432} = \boldsymbol{\frac{73}{48}}$$

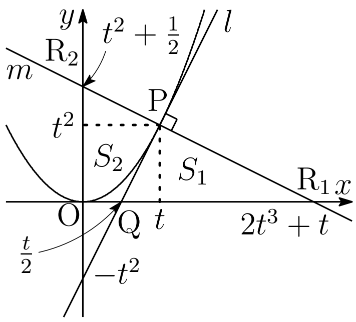
2.6 2006 年度

1 (1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$

$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における接線 l の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

ゆえに $y = 2tx - t^2$



Q の x 座標は，これに $y = 0$ を代入して

$$\boldsymbol{x = \frac{t}{2}}$$

$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，l に垂直な直線 m の方程式は

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

R_1 の x 座標は，これに $y = 0$ を代入して $\boldsymbol{x = 2t^3 + t}$

(2) S_2 は，$0 \leqq x \leqq t$ において，m と C で囲まれた部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}\left\{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) + t^2\right\} \times t - \int_0^t x^2\,dx \\ &= t^3 + \frac{t}{4} - \frac{t^3}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t} \end{aligned}$$

(3) $S_1 = \dfrac{1}{2}\left\{(2t^3 + t) - \dfrac{t}{2}\right\} \times t^2 = t^5 + \dfrac{1}{4}t^3$

これと (2) の結果から

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \left(t^5 + \frac{1}{4}t^3\right) - \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t\right) \\ &= \frac{t}{12}(12t^4 - 5t^2 - 3) \\ &= \frac{t}{12}(3t^2 + 1)(4t^2 - 3) \\ &= \frac{t}{12}(3t^2 + 1)(2t + \sqrt{3})(2t - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$t > 0$ であるから，$S_1 > S_2$ が成り立つとき

$$\frac{t}{12}(3t^2 + 1)(2t + \sqrt{3})(2t - \sqrt{3}) > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t > \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$\boxed{2}$ (1) 数学的帰納法により示す．

「a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れない」を (A) とする．

［1］ $n=3$ のとき

$$a_2 = 2{\cdot}1{\cdot}1 = 2, \qquad b_2 = 2{\cdot}1^2 + 1^2 = 3$$
$$a_3 = 2{\cdot}2{\cdot}3 = 12, \qquad b_3 = 2{\cdot}2^2 + 3^2 = 17$$

よって，$n=3$ のとき，(A) は成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき ($k \geqq 3$)，(A) が成り立つと仮定すると，
$a_k = 3M$，$b_k = 3N \pm 1$ とおけるから (M, N は整数)

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_kb_k = 2{\cdot}3M{\cdot}(3N \pm 1) \\ &= 3{\cdot}2M(3N \pm 1) \\ b_{k+1} &= 2{a_k}^2 + {b_k}^2 \\ &= 2(3M)^2 + (3N \pm 1)^2 \\ &= 18M^2 + (9N^2 \pm 6N + 1) \\ &= 3(6M^2 + 3N^2 \pm 2N) + 1 \end{aligned}$$

［1］，［2］から，$n \geqq 3$ について (A) が成り立つ．

(2) $b_1 = 1$，$b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$ より，b_n は奇数．以下を背理法により示す．
$a_2 = 2$，$b_2 = 3$ より，$2 \leqq n \leqq m$ のとき，a_n と b_n は互いに素であるが，
a_{m+1} と b_{m+1} は素数 p を約数にもつと仮定する ($p \geqq 3$)．
$a_{m+1} = 2a_mb_m$ より，次の 2 つに場合分けをする．

［1］ a_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - 2{a_m}^2 = {b_m}^2$ であるから，
b_m も p で割り切れる．

［2］ b_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - {b_m}^2 = 2{a_m}^2$ であるから，
a_m も p で割り切れる．

［1］，［2］より，a_m，b_m がともに p で割り切れて，仮定に反する．

よって，$n \geqq 2$ のとき，a_n，b_n は互いに素である．

3 (1) $h\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}$ は垂直であるから，$\vec{a}\cdot(h\vec{a}+\vec{b})=0$ より

$$\begin{aligned}|x\vec{a}+\vec{b}|^2 &= |(x-h)\vec{a}+(h\vec{a}+\vec{b})|^2\\ &= (x-h)^2|\vec{a}|^2+2(x-h)\vec{a}\cdot(h\vec{a}+\vec{b})+|h\vec{a}+\vec{b}|^2\\ &= (x-h)^2|\vec{a}|^2+|h\vec{a}+\vec{b}|^2\\ &\geqq |h\vec{a}+\vec{b}|^2\end{aligned}$$

よって　　$|x\vec{a}+\vec{b}| \geqq |h\vec{a}+\vec{b}|$

(2) $h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ と $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるから，$\vec{d}=h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ より，(1) と同様にして

$$\begin{aligned}|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|^2 &= |(x-h)\vec{a}+(y-k)\vec{b}+\vec{d}|^2\\ &= (x-h)^2|\vec{a}|^2+(y-k)^2|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2+2(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\\ &= |x-h|^2|\vec{a}|^2-2|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|+|y-k|^2|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2\\ &\qquad +2\{|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|-(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\\ &= (|x-h||\vec{a}|-|y-k||\vec{b}|)^2+|\vec{d}|^2\\ &\qquad +2\{|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|-(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\\ &\geqq |\vec{d}|^2\end{aligned}$$

よって　　$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}| \geqq |h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|$

(3)
$$\begin{aligned}\vec{d} &= h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}\\ &= h(1,\ 1,\ 1)+k(1,\ 4,-2)+(-3,-6,\ 6)\\ &= (h+k-3,\ h+4k-6,\ h-2k+6)\end{aligned}$$

$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ であるから

$$\begin{cases} h+k-1=0 \\ h+7k-13=0 \end{cases}\quad これを解いて\quad h=-1,\ k=2$$

(2) の結果から，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ は，$x=h$，$y=k$ すなわち $\boldsymbol{x=-1}$，$\boldsymbol{y=2}$ のとき最小となり，最小値は　$|-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|=|(-2,\ 1,\ 1)|=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

補足　(1) の $x\vec{a}+\vec{b}$ は点 $\mathrm{B}(\vec{b})$ を通り，方向ベクトルが $\vec{a}$ の直線である．$|x\vec{a}+\vec{b}|$ は原点からこの直線までの距離である．

(2) の $x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}$ は点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ を通り，接ベクトルが $\vec{a}$，$\vec{b}$ の平面である．$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ は原点からこの平面までの距離である．

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=0$ より，$\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}=0$ であるから

$$\sin x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad \sin x=0,\ 1$$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ より　$\boldsymbol{x=-\pi,\ 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$

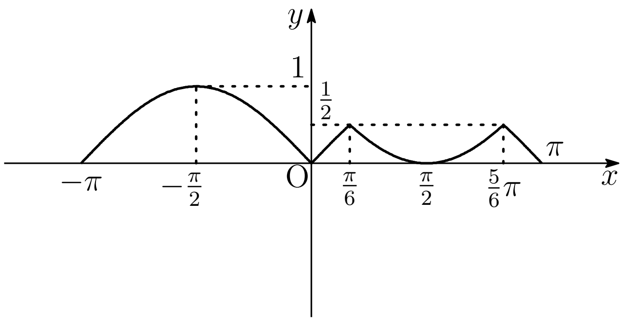
(2)　i) $\sin x-\dfrac{1}{2}\geqq 0$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$f(x)=\left|\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|=|\sin x-1|=1-\sin x$$

ii) $\sin x-\dfrac{1}{2}\leqq 0$　すなわち　$-\pi\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$f(x)=\left|\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)-\frac{1}{2}\right|=|\sin x|$$

i)，ii) から，グラフの概形は，次のようになる．



(3) $f(x)=k$ を満たす x の個数は，$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフの共有点の個数であるから，(2) のグラフより

$$\begin{cases} \boldsymbol{k<0,\ 1<k} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{k=1} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2}<k<1} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k=0,\ \frac{1}{2}} \text{ のとき} & \textbf{4 個} \\ \boldsymbol{0<k<\frac{1}{2}} \text{ のとき} & \textbf{6 個} \end{cases}$$

2.7　2007 年度

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=0$ より　$(x^2-2)(x^2-4x+2)=0$
これを解いて　　$x=\pm\sqrt{2},\ 2\pm\sqrt{2}$
よって，$f(x)=0$ の解を小さい順に並べると

$$\boldsymbol{-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}}$$

(2) $f(x)\leqq 0$ の解は，(1) の結果から

$$-\sqrt{2}\leqq x\leqq 2-\sqrt{2},\quad \sqrt{2}\leqq x\leqq 2+\sqrt{2}$$

したがって，$f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n は

$$-\sqrt{2}\leqq n\leqq 2-\sqrt{2},\quad \sqrt{2}\leqq n\leqq 2+\sqrt{2}$$

よって　　$\boldsymbol{n=-1,\ 0,\ 2,\ 3}$

(3) n が整数のとき，$f(n)$ は整数であるから，$f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n を，次の 2 つの場合に分けて求める．

i) $f(n)\leqq 0$ のとき，(2) の結果から　$n=-1,\ 0,\ 2,\ 3$
ii) $f(n)=1$ のとき　$(n^2-2)(n^2-4n+2)=1$
n^2-2 は整数であるから，上式から　$n^2-2=\pm1$
$n^2-2=1$ を満たす整数 n は存在しないから

$$n^2-2=n^2-4n+2=-1\quad \text{これを解いて}\quad n=1$$

i)，ii) から，求める整数 n は　　$\boldsymbol{n=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3}$

補足 (高次不等式)

$\alpha<\beta<\gamma<\delta$ とすると

1 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)<0$ の解は　$x<\alpha,\ \beta<x<\gamma$

2 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$ の解は　$\alpha<x<\beta,\ \gamma<x$

3 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)<0$ の解は　$\alpha<x<\beta,\ \gamma<x<\delta$

4 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)>0$ の解は　$x<\alpha,\ \beta<x<\gamma,\ \delta<x$

$\boxed{2}$ (1)

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{(1-t)^2+(t-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{2t^2-2t+2}\\ \mathrm{BC} &= \sqrt{(0-1)^2+(1-t)^2+(t-0)^2} = \sqrt{2t^2-2t+2}\\ \mathrm{CA} &= \sqrt{(t-0)^2+(0-1)^2+(1-t)^2} = \sqrt{2t^2-2t+2}\end{aligned}$$

ゆえに　$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$．よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形

したがって　$S(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{BC}\sin 60^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G の座標は

$$\left(\frac{t+1+0}{3},\ \frac{0+t+1}{3},\ \frac{1+0+t}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= \left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right) - \left(\frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t\right)\\ &= \frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1-t,\ t,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-t,\ 1,\ t-1)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}}{\cdot}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1){\cdot}(1-t,\ t,\ -1) = \frac{3-t}{9}(1-t+t-1) = 0\\ \overrightarrow{\mathrm{PG}}{\cdot}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1){\cdot}(-t,\ 1,\ t-1) = \frac{3-t}{9}(-t+1+t-1) = 0\end{aligned}$$

$t \neq 3$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PG}} \neq \vec{0}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}| = \dfrac{\sqrt{3}}{9}(3-t)$ であるから，(2) の結果から

$$\begin{aligned}V(t) &= \frac{1}{3}S(t)|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)\times\frac{\sqrt{3}}{9}(3-t)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{18}(-t^3+4t^2-4t+3)}\end{aligned}$$

$V(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned}V'(t) &= \frac{1}{18}(-3t^2+8t-4)\\ &= -\frac{1}{18}(t-2)(3t-2)\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		$\searrow$	極小 $\frac{49}{486}$	$\nearrow$	

増減表から，$V(t)$ は，$\boldsymbol{t=\dfrac{2}{3}}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{49}{486}}$ をとる．

$\boxed{3}$ (1) 試行を n 回繰り返したとき，点 Q が，頂点 A，B，C，D にある確率をそれぞれ，$P_n(\mathrm{A})$，$P_n(\mathrm{B})$，$P_n(\mathrm{C})$，$P_n(\mathrm{D})$ とすると

$$P_1(\mathrm{A}) = P_1(\mathrm{C}) = 0,\ P_1(\mathrm{B}) = P_1(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}$$

また，次式が成り立つ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$．

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\mathrm{A}) = P_{n+1}(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_n(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_n(\mathrm{D}) \\ P_{n+1}(\mathrm{B}) = P_{n+1}(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_n(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_n(\mathrm{C}) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P_2(\mathrm{A}) = P_2(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_1(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_1(\mathrm{D}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ P_2(\mathrm{B}) = P_2(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_1(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_1(\mathrm{C}) = \mathbf{0} \\ P_3(\mathrm{A}) = P_3(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_2(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_2(\mathrm{D}) = \mathbf{0} \\ P_3(\mathrm{B}) = P_3(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_2(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_2(\mathrm{C}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ P_4(\mathrm{A}) = P_4(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_3(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_3(\mathrm{D}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ P_4(\mathrm{B}) = P_4(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_3(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_3(\mathrm{C}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(2) 試行を n 回繰り返したときの確率を (1) と同様に定めると

$$P_1(\mathrm{A}) = P_1(\mathrm{C}) = 0,\ P_1(\mathrm{B}) = p,\ P_1(\mathrm{D}) = 1 - p$$

また，次式が成り立つ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$．

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\mathrm{A}) &= (1-p)P_n(\mathrm{B}) + pP_n(\mathrm{D}) \\ P_{n+1}(\mathrm{B}) &= pP_n(\mathrm{A}) + (1-p)P_n(\mathrm{C}) \\ P_{n+1}(\mathrm{C}) &= pP_n(\mathrm{B}) + (1-p)P_n(\mathrm{D}) \\ P_{n+1}(\mathrm{D}) &= (1-p)P_n(\mathrm{A}) + pP_n(\mathrm{C}) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P_2(\mathrm{A}) &= (1-p)P_1(\mathrm{B}) + pP_1(\mathrm{D}) = -2p^2 + 2p \\ P_2(\mathrm{B}) &= pP_1(\mathrm{A}) + (1-p)P_1(\mathrm{C}) = 0 \\ P_2(\mathrm{C}) &= pP_1(\mathrm{B}) + (1-p)P_1(\mathrm{D}) = 2p^2 - 2p + 1 \\ P_2(\mathrm{D}) &= (1-p)P_1(\mathrm{A}) + pP_1(\mathrm{C}) = 0 \end{aligned}$$

$p > \dfrac{1}{2}$ であるから　$P_2(\mathrm{C}) - P_2(\mathrm{A}) = (2p-1)^2 > 0$

よって，試行を 2 回繰り返すとき，点 Q が頂点 C にある確率が最大となる．

さらに

$$\begin{aligned}
P_3(\mathrm{A}) &= (1-p)P_2(\mathrm{B}) + pP_2(\mathrm{D}) \\
&= 0 \\
P_3(\mathrm{B}) &= pP_2(\mathrm{A}) + (1-p)P_2(\mathrm{C}) \\
&= p(-2p^2+2p) + (1-p)(2p^2-2p+1) \\
&= -4p^3+6p^2-3p+1 \\
P_3(\mathrm{C}) &= pP_2(\mathrm{B}) + (1-p)P_2(\mathrm{D}) \\
&= 0 \\
P_3(\mathrm{D}) &= (1-p)P_2(\mathrm{A}) + pP_2(\mathrm{C}) \\
&= (1-p)(-2p^2+2p) + p(2p^2-2p+1) \\
&= 4p^3-6p^2+3p
\end{aligned}$$

$p > \dfrac{1}{2}$ であるから　$P_3(\mathrm{D}) - P_3(\mathrm{B}) = (2p-1)^3 > 0$

よって，試行を 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となる．

$\boxed{4}$ (1) 辺の長さは正であるから　$x^2 - 2x > 0$　かつ　$4 - x > 0$

これを解いて　$x < 0,\ 2 < x < 4$　$\cdots$①

題意より　$\sqrt{x^2 - 2x} \geqq 4 - x$，　$\sqrt{x^2 - 2x} \geqq 2$

第 1 式から　$x^2 - 2x \geqq 16 - 8x + x^2$　ゆえに　$x \geqq \dfrac{8}{3}$　$\cdots$②

第 2 式から　$x^2 - 2x \geqq 4$　ゆえに　$x \leqq 1 - \sqrt{5},\ 1 + \sqrt{5} \leqq x$　$\cdots$③

3 辺の長さによる三角形の存在条件から　$\sqrt{x^2 - 2x} < (4 - x) + 2$

したがって　$\sqrt{x^2 - 2x} < 6 - x$　ゆえに　$x^2 - 2x < 36 - 12x + x^2$

これを解いて　$x < \dfrac{18}{5}$　$\cdots$④

①，②，③，④ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1 + \sqrt{5} \leqq x < \dfrac{18}{5}}$

(2) $2 - (4 - x) = x - 2$

(1) の結果から　$\sqrt{5} - 2 \leqq x - 2 < \dfrac{8}{5}$

また，$\sqrt{5} - 2 > 0$ であるから　$x - 2 > 0$　ゆえに　$2 - (4 - x) > 0$

すなわち　$2 > 4 - x$　よって，最短の辺の長さは　$4 - x$

余弦定理により　$\cos\theta = \dfrac{(x^2 - 2x) + 2^2 - (4 - x)^2}{2{\cdot}2\sqrt{x^2 - 2x}} = \dfrac{3(x - 2)}{2\sqrt{x^2 - 2x}}$

このとき，$x - 2 > 0$ であるから

$$\cos\theta = \frac{3(x - 2)}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(x - 2)^2}{x(x - 2)}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x - 2}{x}}}$$

(3) (2) の結果から　$\cos\theta = \dfrac{3}{2}\sqrt{1 - \dfrac{2}{x}}$

上式と (1) の結果から，$\cos\theta$ は $\boldsymbol{x = 1 + \sqrt{5}}$ のとき最小となり，最小値は

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(1 + \sqrt{5}) - 2}{1 + \sqrt{5}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}} = \boldsymbol{\frac{3(\sqrt{5} - 1)}{4}}$$

2.8　2008 年度

1　(1)　　$a_1 = \cos 2 \cos 1$

2 倍角の公式により　$\sin 4 = 2\sin 2\cos 2 = 2\cdot 2\sin 1\cos 1\cdot \cos 2$

したがって　$\dfrac{\sin 4}{4\sin 1} = \cos 2\cos 1$

よって　$a_1 = \dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$

(2) a_n の定義式から　$a_{n+1} = a_n \cos 2^{n+1}$　$\cdots$①

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}\cdots$(A) が成り立つことを数学的帰納法により証明する．

［1］$n=1$ のとき，(1) の結果より成り立つ．

［2］$n=k$ のとき

$$a_k = \frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}$$

が成り立つと仮定すると，① から

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \cos 2^{k+1} \\ &= \frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1} \times \cos 2^{k+1} \\ &= \frac{2\sin 2^{k+1}\cos 2^{k+1}}{2^{k+2}\sin 1} = \frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+2}\sin 1} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］から，すべての自然数 n に対して，(A) が成り立つ．

(3)　　$\sin 2^{n+1} \leqq 1$

$\sin 1 > \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　ゆえに　$\dfrac{1}{\sin 1} < \sqrt{2}$

上の 2 式を (A) に適用すると

$$a_n = \frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1} = \sin 2^{n+1} \times \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{\sin 1} < 1 \times \frac{1}{2^{n+1}} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

よって　$a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$

2　(1) $y' = 2x$ より，点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における C の接線のベクトルは　$(1,\ 2p)$
ゆえに，P における C の法線の方程式は

$$1(x-p)+2p(y-p^2)=0$$

よって　　$\boldsymbol{x+2py-2p^3-p=0}$

(2) (1) で求めた法線が点 $(0,\ a)$ を通るとき

$$2pa-2p^3-p=0 \quad \text{ゆえに} \quad p\left(p^2-\frac{2a-1}{2}\right)=0 \quad \cdots ①$$

① を p に関する 3 次方程式と考えると，この 3 次方程式の実数解の個数が求める法線の本数と一致する．したがって，次の 3 つに場合分けをする．

i) $\dfrac{2a-1}{2}<0$ すなわち $a<\dfrac{1}{2}$ のとき
すべての実数 p に対して　$p^2-\dfrac{2a-1}{2}>0$
したがって，① の実数解は　$p=0$ の 1 個

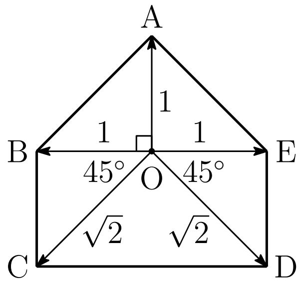
ii) $\dfrac{2a-1}{2}=0$ すなわち $a=\dfrac{1}{2}$ のとき
方程式は　$p^3=0$
したがって，① の実数解は　$p=0$ の 1 個

iii) $\dfrac{2a-1}{2}>0$ すなわち $a>\dfrac{1}{2}$ のとき
方程式は　$p\left(p+\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}\right)\left(p-\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}\right)=0$
したがって，① の実数解は　$p=0,\ \pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}$ の 3 個

i)，ii)，iii) より，法線の本数は

$$\boldsymbol{a \leqq \frac{1}{2}} \text{ **のとき 1 本，**} \quad \boldsymbol{a > \frac{1}{2}} \text{ **のとき 3 本**}$$

3　(1) 右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 45^\circ$$
$$= 1 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{1}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = 1$ となる $(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)$ の組は，次の 7 組である．

$$(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2) = (\mathrm{A},\ \mathrm{A}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{E}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{C},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{D},\ \mathrm{E}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{D})$$

よって，求める確率は　$\dfrac{7}{5^2} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{25}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = -2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　ゆえに　$q_i = -2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$

$q_i \neq 0$ となる P_i は，A，C，D の 3 組である．

したがって，$q_1q_2\cdots q_n \neq 0$ となる確率は　$\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

よって，$q_1q_2\cdots q_n = 0$ となる確率は　$\mathbf{1} - \left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)^{\boldsymbol{n}}$

$\boxed{4}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2-1)$ における接線の方程式は

$$y-({a_1}^2-1)=2a_1(x-a_1)\quad すなわち\quad y=2a_1x-{a_1}^2-1$$

この直線上に $(a_2,\ 0)$ があるから

$$0=2a_1a_2-{a_1}^2-1\quad ゆえに\quad 2a_1a_2={a_1}^2+1\quad \cdots ①$$

$a_1\neq 0$ より　$\boldsymbol{a_2=\dfrac{{a_1}^2+1}{2a_1}}$

(2) (1) と同様にして　$2a_na_{n+1}={a_n}^2+1\quad \cdots ②$

上式において，$a_n>0$ のとき　$a_{n+1}>0$

$a_1>0$ であるから，すべての自然数 n について　$a_n>0$

② から，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2+1}{2a_n}$ が成り立つので

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n^2+1}{2a_n}-1\quad ゆえに\quad a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}\quad \cdots ③$$

③ から $a_n>1$ のとき，$a_{n+1}>1$ が成り立つ．

$a_1>1$ であるから，すべての自然数 n について　$a_n>1$

(3) ③ および (2) の結果から

$$a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}<\frac{(a_n-1)^2}{2}$$

したがって　$\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-1)<\left\{\dfrac{1}{2}(a_n-1)\right\}^2$

よって，すべての自然数 n について　$b_{n+1}<{b_n}^2$

(4) (2) の結果から $b_n>0$ であるから，$c_n=\log_{10}b_n$ とおくと，$a_1=2$ より

$$c_1=\log_{10}b_1=\log_{10}\frac{1}{2}(a_1-1)=\log_{10}\frac{1}{2}(2-1)=-\log_{10}2$$

(3) の結果から　$c_{n+1}<2c_n$　ゆえに　$c_n<2^{n-1}c_1=-2^{n-1}\log_{10}2$

$b_n<10^{-12}$ のとき　$c_n<-12$ であるから

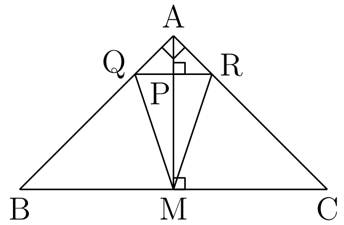
$$-2^{n-1}\log_{10}2<-12\quad ゆえに\quad 2^{n-1}>\frac{12}{\log_{10}2}$$

$\dfrac{12}{\log_{10}2}=39.8\cdots$，$2^5=32$，$2^6=64$ であるから，

求める n の値の一つは，$n-1=6$，すなわち　$\boldsymbol{n=7}$

2.9　2009 年度

$\boxed{1}$ (1) 求める三角比は，三角形の大きさに関係しないので，右の図において AP $= 1$ とすると



$$\mathrm{PM} = 3,\ \mathrm{PQ} = \mathrm{PR} = 1,\ \mathrm{QR} = 2,$$

$$\mathrm{MQ} = \mathrm{MR} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{QMR} = \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2^2}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{10 + 10 - 4}{2\cdot 10} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

(2) $\mathrm{MB} = 4$，$\mathrm{MQ} = \sqrt{10}$，$\mathrm{BQ} = 3\sqrt{2}$ であるから，余弦定理により

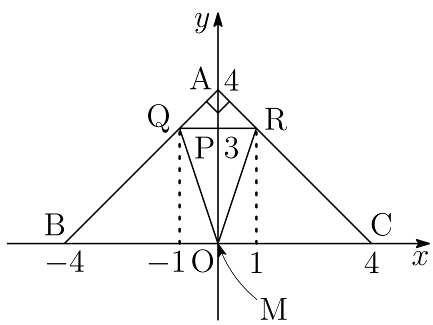
$$\cos\angle\mathrm{QMB} = \frac{4^2 + (\sqrt{10})^2 - (3\sqrt{2})^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{10}} = \frac{16 + 10 - 18}{2\cdot 4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

(1) の結果から　$\cos 2\angle\mathrm{QMR} = 2\cos^2\angle\mathrm{QMR} - 1 = 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$

ここで　$\dfrac{1}{\sqrt{10}} - \dfrac{7}{25} = \dfrac{5\sqrt{10} - 14}{50} = \dfrac{\sqrt{250} - \sqrt{196}}{50} > 0$

よって，$2\angle\mathrm{QMR}$，$\angle\mathrm{QMB}$ は鋭角であるから　$\boldsymbol{2\angle\mathrm{QMR} > \angle\mathrm{QMB}}$

別解 M は BC の中点であるから，M を原点にとる．このとき，求める三角比は，三角形の大きさに関係にしないので，右の図のように



$$\mathrm{A}(0,\ 4),\ \mathrm{B}(-4,\ 0),\ \mathrm{C}(4,\ 0),$$

$$\mathrm{P}(0,\ 3),\ \mathrm{Q}(-1,\ 3),\ \mathrm{R}(1,\ 3)$$

とすると，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = (-1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{MR}} = (1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{MB}} = (-4,\ 0)$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{QMR} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}||\overrightarrow{\mathrm{MR}}|} = \frac{-1\cdot 1 + 3\cdot 3}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\angle\mathrm{QMB} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}||\overrightarrow{\mathrm{MB}}|} = \frac{-1\cdot(-4) + 3\cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}\sqrt{4^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

2 (1) C は直線 AB 上にあるから，実数 α を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \alpha(2,\ 6) + (1-\alpha)(3,\ 4)\\ &= (3-\alpha,\ 4+2\alpha)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ 4) - (2,\ 6) = (1, -2)$ であるから

$$(3-\alpha)\cdot 1 + (4+2\alpha)\cdot(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = -1$$

したがって　　**C(4, 2)**

与式および上の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= s(2,\ 6) + t(3,\ 4) - (4,\ 2)\\ &= (2s+3t-4,\ 6s+4t-2)\end{aligned}$$

よって　　$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= (2s+3t-4)^2 + (6s+4t-2)^2\\ &= \boldsymbol{40s^2 + 25t^2 + 60st - 40s - 40t + 20}\end{aligned}$$

(2) $s = \dfrac{1}{2}$ を (1) の結果に代入して

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = 25t^2 - 10t + 10 = 25\left(t - \frac{1}{5}\right)^2 + 9 \quad (t \geqq 0)$$

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は，$t = \dfrac{1}{5}$ で最小値 **9** をとる．

(3) $s = 1$ を (1) の結果に代入して

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = 25t^2 + 20t + 20 = 25\left(t + \frac{2}{5}\right)^2 + 16 \quad (t \geqq 0)$$

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は，$t = 0$ で最小値 **20** をとる．

3 (1) $a+b=c$ を満たす $a<b$ の組は，次の 6 通り

$$
\begin{aligned}
&c=3 \text{ のとき} \quad (a,\ b)=(1,\ 2)\\
&c=4 \text{ のとき} \quad (a,\ b)=(1,\ 3)\\
&c=5 \text{ のとき} \quad (a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 3)\\
&c=6 \text{ のとき} \quad (a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4)
\end{aligned}
$$

このとき，$a>b$ の場合も含めて $6\times 2!$ 通りある．また，d，e，f の並べ方が $3!$ 通りあるので，求める確率は

$$\frac{6\times 2!\times 3!}{6!}=\mathbf{\frac{1}{10}}$$

(2) $a+b=c+d$ を満たす $a<b$，$c<d$ の組は，次の 14 通り

$$
\begin{aligned}
&a+b=5 \text{ のとき} \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 4,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1,\ 4)\\
&a+b=6 \text{ のとき} \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 5,\ 2,\ 4),\ (2,\ 4,\ 1,\ 5)\\
&a+b=7 \text{ のとき} \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 6,\ 2,\ 5),\ (2,\ 5,\ 1,\ 6),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1,\ 6,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 1,\ 6),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2,\ 5,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 2,\ 5)\\
&a+b=8 \text{ のとき} \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 6,\ 3,\ 5),\ (3,\ 5,\ 2,\ 6)\\
&a+b=9 \text{ のとき} \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 6,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 3,\ 6)
\end{aligned}
$$

このとき，$a>b$，$c>d$ の場合も含めて $14\times 2!\times 2!$ 通りある．また，e，f の並べ方が $2!$ 通りあるので，求める確率は

$$\frac{14\times 2!\times 2!\times 2!}{6!}=\mathbf{\frac{7}{45}}$$

$\boxed{4}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$.

点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a)\quad \text{ゆえに}\quad y=2ax-a^2\quad \cdots①$$

同様に，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線の方程式は　$y=2bx-b^2\quad\cdots②$

①，② を解いて　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\frac{a+b}{2},\ ab}\right)$

直線 PQ の方程式は

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=(a+b)x-ab$$

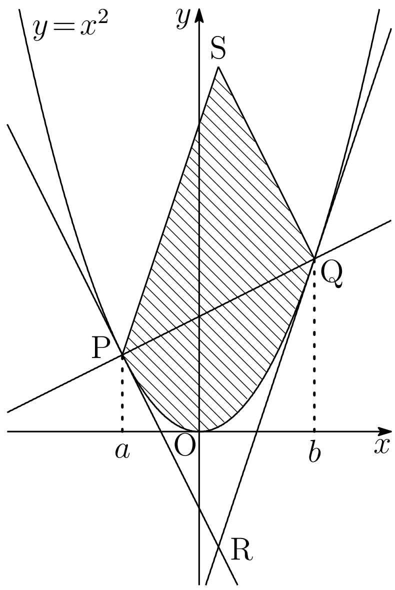
直線 PQ 上の x 座標が $\frac{a+b}{2}$ である点を M とすると　$\mathrm{M}\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a^2+b^2}{2}\right)$

このとき　$\mathrm{MR}=\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{1}{2}(b-a)^2$

よって　$\triangle\mathrm{PRQ}=\frac{1}{2}\mathrm{MR}\times(b-a)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(b-a)^2\times(b-a)=\boldsymbol{\frac{1}{4}(b-a)^3}$

(2) 直線 PQ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積は

$$\int_a^b\{(a+b)x-ab-x^2\}\,dx$$
$$=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(b-a)^3$$



$\triangle$PSQ の面積は $\triangle$PRQ の面積に等しいので，上式および (1) の結果から，求める図形の面積は

$$\frac{1}{6}(b-a)^3+\frac{1}{4}(b-a)^3=\boldsymbol{\frac{5}{12}(b-a)^3}$$

(3) $\angle\mathrm{PRQ} = 90^\circ$ のとき，直線 ①，② は直交するので

$$2a \times 2b = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{4b}$$

これを ② の結果に代入すると　$\dfrac{5}{12}\left(b + \dfrac{1}{4b}\right)^3$

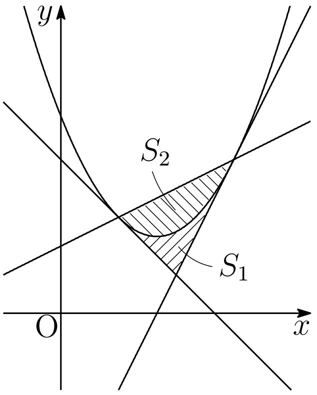
ここで，$b > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

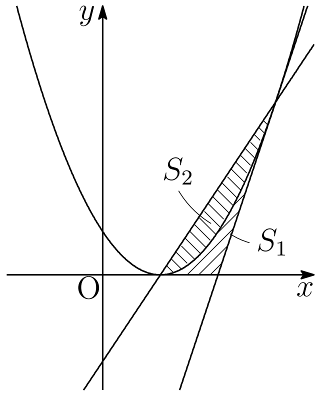
$$b + \frac{1}{4b} \geqq 2\sqrt{b \times \frac{1}{4b}} = 1$$

よって，求める最小値は　$\dfrac{5}{12}\cdot 1^3 = \mathbf{\dfrac{5}{12}}$

補足

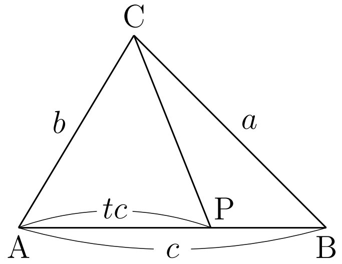
放物線と放物線の2本の接線で囲まれた図形の面積 S_1 と，その2つの接点を結ぶ直線と放物線で囲まれた図形の面積 S_2 の比は，$S_1 : S_2 = 1 : 2$ である．また，2本の接線の交点の x 座標は，2つの接点の中点の x 座標と等しい．





2.10 2010年度

$\boxed{1}$ (1) △ABC に余弦定理を適用すると



$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

△APC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CP}^2 = b^2 + (tc)^2 - 2b{\cdot}tc\cos A$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2 &= b^2 + (tc)^2 - 2b{\cdot}tc \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= b^2 + t^2c^2 - t(b^2+c^2-a^2) \\ &= \boldsymbol{ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{CP} = a$ を (1) の結果に代入すると

$$a^2 = ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2$$

ゆえに $\quad (t-1)(a^2-b^2+tc^2) = 0$

$t \geqq 0$ に注意して

$$\boldsymbol{b \geqq a} \text{ **のとき** } \quad \boldsymbol{t = 1,\ \frac{b^2-a^2}{c^2}}$$
$$\boldsymbol{b < a} \text{ **のとき** } \quad \boldsymbol{t = 1}$$

(3) AB 上にちょうど2つあるのは，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に (2) の条件を満たす t が2個あればよい．したがって，(2) の結果から

$b \geqq a$ のとき $(B \geqq A)$

$$\frac{b^2-a^2}{c^2} < 1 \quad \text{すなわち} \quad b^2 < c^2 + a^2 \quad \text{ゆえに} \quad B < 90^\circ$$

よって $\quad \boldsymbol{A \leqq B < 90^\circ}$

2　(1) サイコロを 2 回振るときの得点は，右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{21}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

$$\begin{aligned} E =& 0 \times \frac{21}{36} + 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} \\ & + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} \\ =& \mathbf{\frac{35}{18}} \end{aligned}$$

得　点

		2 回目					
		1	2	3	4	5	6
1 回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0

(2) (1) の場合において，最初の目が 6 であるとき，2 回目の目に関係なく 6 点であると考えればよいので，得点は右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{15}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

得　点

		2 回目					
		1	2	3	4	5	6
1 回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	6	6	6	6	6	6

$$E = 0 \times \frac{21}{36} + 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \mathbf{\frac{53}{18}}$$

(3) サイコロを投げて 1 回目，2 回目に出た目をそれぞれ i，j とする．1 回目 (最初) の目が n 以上であるとき ($1 \leqq n \leqq 6$)，2 回目を振らないとすると，そのときの得点の期待値 $E(n)$ は

$$E(n) = \frac{1}{6}\sum_{i=n}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1\leqq i<n \\ i+j\leqq 6}} (i+j)$$

また，$E(n+1)$ は ($1 \leqq n \leqq 5$)

$$E(n+1) = \frac{1}{6}\sum_{i=n+1}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1\leqq i<n+1 \\ i+j\leqq 6}} (i+j)$$

上の 2 式から，$1 \leqq n \leqq 5$ のとき

$$\begin{aligned}
E(n+1) - E(n) &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{n+j\leqq 6} (n+j) \\
&= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{k=n+1}^{6} k \\
&= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36} \times \frac{1}{2}(6-n)(n+7) \\
&= \frac{1}{72}(-n^2 - 13n + 42) \\
&= \frac{1}{72}\{42 - n(n+13)\}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&E(2) - E(1) > 0, \quad E(3) - E(2) > 0, \quad E(4) - E(3) < 0, \\
&E(5) - E(4) < 0, \quad E(6) - E(5) < 0
\end{aligned}$$

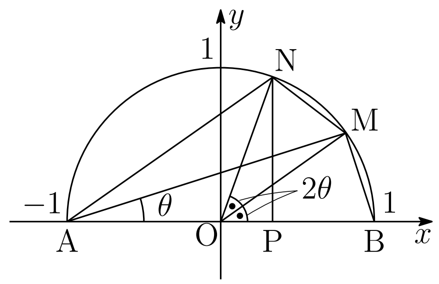
すなわち

$$E(1) < E(2) < E(3) > E(4) > E(5) > E(6)$$

したがって，得点の期待値を最大にするためには，最初に 3 以上の目が出たときに 2 回目を振らなければよい．

よって，2 回目を振るのは，最初の目が 1 または 2 のときである．

3 (1) $\angle\mathrm{AMB} = 90^\circ$ であるから



$$\mathrm{MB} = \mathrm{AB}\sin\theta = \boldsymbol{2\sin\theta}$$

$\angle\mathrm{BOM} = 2\theta$ であるから

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\cos 2\theta},\ \boldsymbol{\sin 2\theta})$$

(2) $\angle\mathrm{BON} = 4\theta$ であるから　$\mathrm{N}(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$

したがって　　$\mathbf{PB} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\cos 4\theta}$

(3) (1) の結果から　$\mathrm{MB} = 2t$

(2) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{PB} &= 1 - \cos 4\theta = 1 - (1 - 2\sin^2 2\theta)\\ &= 2\sin^2 2\theta = 2(2\sin\theta\cos\theta)^2\\ &= 8\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) = 8t^2(1 - t^2)\end{aligned}$$

$\mathrm{MB} = \mathrm{PB}$ より

$$2t = 8t^2(1 - t^2) \quad すなわち \quad t(4t^3 - 4t + 1) = 0$$

ここで，$0^\circ < \angle\mathrm{BON} \leqq 180^\circ$ であるから　$0^\circ < \theta \leqq 45^\circ$

したがって　　$0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，求める条件は　　$\boldsymbol{4t^3 - 4t + 1 = 0}$

(4) $f(t) = 4t^3 - 4t + 1 \left(0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおくと　$f'(t) = 12\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$	極小 $1 - \frac{8}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$1 - \sqrt{2}$

したがって，$0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において，$f(t) = 0$ の解は 1 個存在し，その解を t_0 とすると

$$\sin\theta = t_0 \quad (0 < \theta \leqq 45^\circ)$$

を満たす θ はただ 1 つ存在する．すなわち，$\mathrm{MB} = \mathrm{PB}$ となるような M がただ一つ存在する．

$\boxed{4}$ (1) $2k = k(k+1) - (k-1)k$ より

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1) - (k-1)k\}$$
$$= n(n+1)$$

よって　$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)}$$

(2) $3k^2 + 3k = k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)$ より

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$$
$$= n(n+1)(n+2)$$

これに (1) の結果を代入すると

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)(n+2)$$

よって　$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

(3) $4k^3 = k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2$ より

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}\{k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2\}$$
$$= n^2(n+1)^2$$

よって　$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

2.11　2011 年度

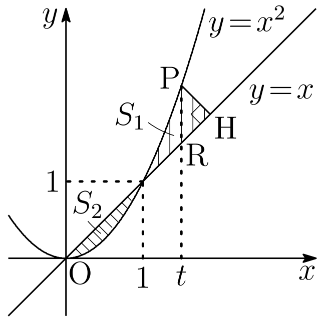
1　(1) 直線 PH は，点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，直線 $y=x\cdots$① に垂直な直線であるから

$$y-t^2=-(x-t)$$

すなわち　$y=-x+t^2+t\quad\cdots$②

H の座標は ①，② を解いて

$$\boldsymbol{\left(\frac{t^2+t}{2},\ \frac{t^2+t}{2}\right)}$$



(2) $\mathrm{R}(t,\ t)$ であるから

$$\triangle\mathrm{PRH}=\frac{1}{2}\mathrm{PH}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{PR}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2-t}{\sqrt{2}}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}(t^4-2t^3+t^2)}$$

(3) (2) の結果を用いて，求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1&=\int_1^t(x^2-x)\,dx+\triangle\mathrm{PRH}\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^t+\frac{1}{4}(t^4-2t^3+t^2)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

(4)
$$S_2=\int_0^1(x-x^2)\,dx=-\int_0^1x(x-1)dx=\frac{1}{6}$$

$S_1=S_2$ のとき，上式および (3) の結果より

$$\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\quad ゆえに\quad t^2(3t^2-2t-3)=0$$

$t>1$ に注意して　$\boldsymbol{t=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}}$

$\boxed{2}$ (1) 与えられた漸化式より

$$a_2 = \frac{2a_1}{1-{a_1}^2} = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{1-{a_2}^2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = -\sqrt{3}$$

$$a_4 = \frac{2a_3}{1-{a_3}^2} = \frac{2\cdot(-\sqrt{3})}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$$

したがって，a_2 以降は，交互に $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ の繰り返しであるから

$$\boldsymbol{a_{10} = \sqrt{3},\quad a_{11} = -\sqrt{3}}$$

(2)
$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \boldsymbol{2-\sqrt{3}}$$

(3) $a_n = \tan\theta_n$ とおくと　$a_{n+1} = \dfrac{2\tan\theta_n}{1-\tan^2\theta_n} = \tan 2\theta_n$

$a_1 = \tan\dfrac{\pi}{7}$ より

$$a_2 = \tan\frac{2}{7}\pi,\quad a_3 = \tan\frac{4}{7}\pi,\quad a_4 = \tan\frac{8}{7}\pi = \tan\frac{\pi}{7}$$

よって，$a_k = a_1$ をみたす最小の自然数 k は　**4**

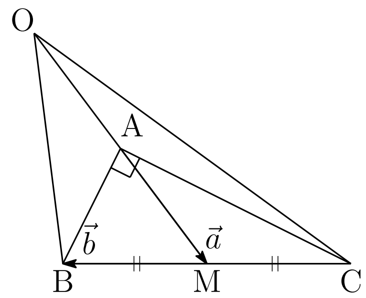
3 (1) $4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}\cdots$① より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$

M は BC の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$

上の 2 式より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

よって，点 A は OM の中点である．

(2) $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ であるから，(1) の結果から，A は BC を直径とする円周上の点である．
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\vec{a}-\vec{b}$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|2\vec{a}+\vec{b}|+|2\vec{a}-\vec{b}|^2=8|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=10$

(3) $4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=-4$ より

$$4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=-4$$
$$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2(4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2)=-4$$

上式に ①，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，および (2) の結果を代入し整理すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=1\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1}$$

$\boxed{4}$ (1) 1回の操作による球の取り出し方の総数は ${}_4C_2 = 6$ (通り)

カードが左から順に1，2，3，4と並ぶのは，2回とも同じ球の組合せであるから，求める確率は

$$\frac{6 \times 1}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2) カードが左から順に4，3，2，1と並ぶのは，1回目に $\{1, 4\}$，2回目 $\{2, 3\}$ の球を取り出す場合と1回目に $\{2, 3\}$，2回目に $\{1, 4\}$ を取り出す場合の2通りであるから，求める確率は

$$\frac{2}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

(3) 左端のカードの数字が1になるのは，次の i)，ii) の場合．

i) 1，2回目ともに $\{1,\ k\}$ $(k = 2, 3, 4)$ を取り出す確率は

$$\frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

ii) 1，2回目ともに1以外の球を取り出す確率は

$$\frac{({}_3C_2)^2}{6^2} = \frac{1}{4}$$

i) と ii) は互いに排反であるから，求める確率は $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

(4) 左端が X となる確率を $P(X)$ とすると，(3) の結果より $P(1) = \frac{1}{3}$

左端に2，3，4のカードが並ぶ確率は等しいから

$$P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1 - P(1)}{3} = \frac{2}{9}$$

よって，求める期待値は $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} kP(k) = 1\cdot\frac{1}{3} + (2+3+4)\cdot\frac{2}{9} = \mathbf{\frac{7}{3}}$

2.12　2012 年度

1　(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(1,\ 0,-2)$,　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 1,\ 1)$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{B}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\frac{1\cdot(-2)+0\cdot1+(-2)\cdot1}{\sqrt{5}\sqrt{6}}=\frac{-4}{\sqrt{30}}<0$$

よって　$\angle\mathrm{B}>\dfrac{\pi}{2}$

(2) 点 H は BC 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,\ 0,\ 2)+t(-2,\ 1,\ 1)=(-2t,\ t,\ t+2)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-2t,\ t,\ t+2)-(1,\ 0,\ 0)=(-2t-1,\ t,\ t+2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$(-2t-1)\cdot(-2)+t\cdot1+(t+2)\cdot1=0\quad これを解いて\quad t=-\frac{2}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$　よって　$\mathbf{H}\left(\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$ および (2) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1,\quad|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{2}{3}\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=2,\quad\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{4}{3}$$

よって，△OAH の面積は

$$\triangle\mathrm{OAH}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot2^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{5}}}{\mathbf{3}}$$

2 (1) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$ より，C 上の点 $(u,\ f(u))$ における接線の傾きが t であるとき，u は方程式

$$3x^2 + 6x + 1 = t \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 + 6x + 1 - t = 0 \quad \cdots①$$

の解である．この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = 3^2 - 3(1 - t) = 3t + 6$$

$t \geqq 0$ のとき，$D > 0$ であるから，① は異なる 2 つの実数解をもつ．
よって，C は傾きが t $(t \geqq 0)$ である接線を 2 本もつ．

(2) p，q は 2 次方程式 ① の解であるから，解と係数の関係により

$$p + q = -2, \quad pq = \frac{1 - t}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned}
f(p) + f(q) &= (p^3 + 3p^2 + p - 1) + (q^3 + 3q^2 + q - 1) \\
&= p^3 + q^3 + 3(p^2 + q^2) + p + q - 2 \\
&= (p + q)^3 - 3pq(p + q) + 3\{(p + q)^2 - 2pq\} \\
&\qquad\qquad + (p + q) - 2 \\
&= (-2)^3 - 3 \times \frac{1 - t}{3} \times 2 + 3\left\{(-2)^2 - 2 \times \frac{1 - t}{3}\right\} \\
&\qquad\qquad + (-2) - 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ゆえに $\quad \dfrac{p + q}{2} = -1, \quad \dfrac{f(p) + f(q)}{2} = 0$

よって，2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称である．

(3) $\mathrm{PQ}^2 = (p-q)^2 + \{f(p) - f(q)\}^2$ であるから，まず

$$\begin{aligned} f(p) - f(q) &= (p^3 + 3p^2 + p - 1) - (q^3 + 3q^2 + q - 1) \\ &= p^3 - q^3 + 3(p^2 - q^2) + p - q \\ &= (p-q)\{(p^2 + pq + q^2) + 3(p+q) + 1\} \\ &= (p-q)\{(p+q)^2 - pq + 3(p+q) + 1\} \\ &= (p-q)\left\{(-2)^2 - \frac{1-t}{3} + 3(-2) + 1\right\} \\ &= \frac{1}{3}(t-4)(p-q) \end{aligned}$$

次に　$(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = (-2)^2 - 4 \times \dfrac{1-t}{3} = \dfrac{4}{3}(t+2)$

したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= (p-q)^2 + \{f(p) - f(q)\}^2 \\ &= (p-q)^2 + \frac{1}{9}(t-4)^2(p-q)^2 \\ &= (p-q)^2\left\{1 + \frac{1}{9}(t-4)^2\right\} \\ &= \frac{4}{3}(t+2)\left\{1 + \frac{1}{9}(t-4)^2\right\} = \frac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50) \end{aligned}$$

$g(t) = \dfrac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50)$ $(t \geqq 0)$ の最小値を求めればよいから

$$g'(t) = \frac{4}{9}(t-1)(t-3)$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\frac{200}{27}$	$\nearrow$	8	$\searrow$	$\frac{200}{27}$	$\nearrow$

上の増減表により，$g(t)$ は，$t = 0,\ 3$ で最小値 $\dfrac{200}{27}$ をとる．

ゆえに，PQ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{10\sqrt{6}}{9}}$ である．

$p,\ q$ $(p < q)$ は方程式 ① の解であるから

$t = 0$ のとき，$3x^2 + 6x + 1 = 0$ を解いて

$$\boldsymbol{p = \frac{-3-\sqrt{6}}{3},\quad q = \frac{-3+\sqrt{6}}{3}}$$

$t = 3$ のとき，$3x^2 + 6x - 2 = 0$ を解いて

$$\boldsymbol{p = \frac{-3-\sqrt{15}}{3},\quad q = \frac{-3+\sqrt{15}}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)
$$\frac{1}{3}(100-7x)=\frac{1}{3}(99-6x+1-x)=33-2x-\frac{x-1}{3}$$

上式が整数であるのは，$x-1$ が 3 の倍数，すなわち x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に限る．

(2) A を x セット，B を y セット，合計 100 枚の乗車券を購入すると

$$7x+3y=100 \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{1}{3}(100-7x)$$

ここで，y は整数であるから，(1) の結果より，k を 0 以上の整数とすると，$x=3k+1\cdots$① とおける．このとき

$$y=\frac{1}{3}\{100-7(3k+1)\}=31-7k\cdots②$$

y は 0 以上の整数であるから　$31-7k \geqq 0$　ゆえに　$k \leqq 4$

$k=0,1,2,3,4$ であるから ①，② より，A，B それぞれの組合せは

$$\textbf{(A, B) = (1, 31), (4, 24), (7, 17), (10, 10), (13, 3)}$$

(3) セット A とセット B を組み合せて購入金額が最も低くなるのは，同じ購入枚数であれば，セット A を最大に組み合せた場合である．A だけで 15 セット (乗車券 105 枚) 購入した場合は

$$480 \times 15 = 7200 \text{ (円)}$$

100 枚以上 104 枚以下の枚数の乗車券を A と B で組み合せる場合，B セットが 3 枚入りであるから

$$100 + 3 = 103, \quad 101 + 3 = 104$$

したがって，乗車券を 100 枚，101 枚，102 枚購入する場合について調べればよい．

i) 乗車券を 100 枚購入する場合，(2) の結果から，A を 13 セット，B を 3 セット購入するとき，購入金額は最小になり，その金額は

$$480 \times 13 + 220 \times 3 = 6900 \text{ (円)}$$

ii) 乗車券を 101 枚購入する場合，A を x_1 セット，B を y_1 セット購入するとき

$$7x_1 + 3y_1 = 101 \quad \text{ゆえに} \quad y_1 = \frac{1}{3}(101 - 7x_1) = 33 - 2x_1 - \frac{x_1 - 2}{3}$$

x_1 は 0 以上の整数 k_1 を用いて，$x_1 = 3k_1 + 2$ とおけるので，
$y_1 = 29 - 7k_1$ となり，y_1 は 0 以上の整数であるから，$0 \leqq k_1 \leqq 4$
購入金額が最小となるのは，$k_1 = 4$，すなわち A を 14 セット，B を 1 セット購入するときで，その金額は

$$480 \times 14 + 220 \times 1 = 6940 \text{ (円)}$$

iii) 乗車券を 102 枚購入する場合，A を x_2 セット，B を y_2 セット購入するとき

$$7x_2 + 3y_2 = 102 \quad \text{ゆえに} \quad y_2 = \frac{1}{3}(102 - 7x_2) = 34 - 2x_1 - \frac{x_2}{3}$$

x_2 は 0 以上の整数 k_2 を用いて，$x_2 = 3k_2$ とおけるので，
$y_2 = 34 - 7k_2$ となり，y_2 は 0 以上の整数であるから，$0 \leqq k_2 \leqq 4$
購入金額が最小となるのは，$k_2 = 4$，すなわち A を 12 セット，B を 6 セット購入するときで，その金額は

$$480 \times 12 + 220 \times 6 = 7080 \text{ (円)}$$

以上のことから，**A を 13 セット，B を 3 セット**購入したとき，購入金額は最小となり，その金額は **6900 円**である．

$\boxed{4}$ (1) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れると，箱 B には黒玉 2 個と白玉 2 個が入っている．

箱 A に黒玉が 1 個入っている (箱 B から白玉 2 個を取り出す) 確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

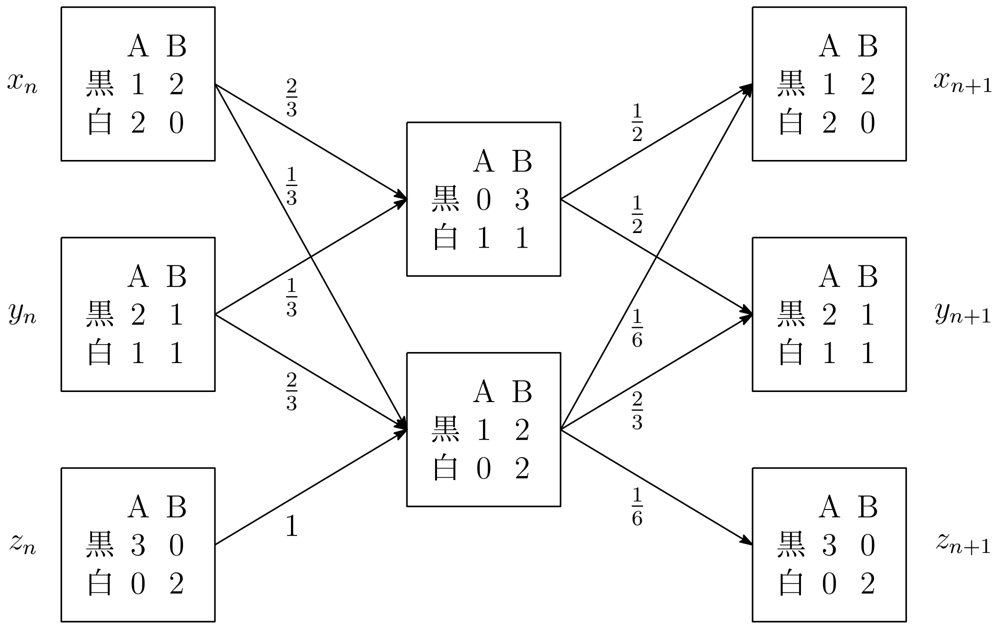
箱 A に黒玉が 2 個入っている (箱 B から黒玉 1 個と白玉 1 個を取り出す) 確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

箱 A に黒玉が 3 個入っている (箱 B から黒玉 2 個を取り出す) 確率 p_3 は

$$p_3 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) 試行 T を n 回行ったとき，箱 A に黒玉が 1 個，2 個，3 個ある確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n とすると



$$x_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)x_n + \left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\right)y_n + 1\times\frac{1}{6}z_n$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)x_n + \left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)y_n + 1\times\frac{2}{3}z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}\times\frac{1}{6}y_n + 1\times\frac{1}{6}z_n$$

$x_1 = p_1$，$y_1 = p_2$，$z_1 = p_3$ であるから　$x_1 = \dfrac{1}{6}$，　$y_1 = \dfrac{2}{3}$，　$z_1 = \dfrac{1}{6}$

$$x_{n+1} = \frac{7}{18}x_n + \frac{5}{18}y_n + \frac{1}{6}z_n$$
$$y_{n+1} = \frac{5}{9}x_n + \frac{11}{18}y_n + \frac{2}{3}z_n$$
$$z_{n+1} = \frac{1}{18}x_n + \frac{1}{9}y_n + \frac{1}{6}z_n$$

したがって

$$x_2 = \frac{7}{18}x_1 + \frac{5}{18}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{7}{18} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{18} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$
$$y_2 = \frac{5}{9}x_1 + \frac{11}{18}y_1 + \frac{2}{3}z_1 = \frac{5}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{11}{18} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{18}$$
$$z_2 = \frac{1}{18}x_1 + \frac{1}{9}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{1}{18} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

$q_1 = x_2$，$q_2 = z_2$，$q_3 = z_2$ であるから

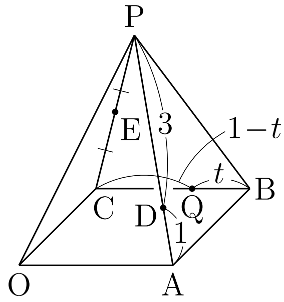
$$\boldsymbol{q_1 = \frac{5}{18},\quad q_2 = \frac{11}{18},\quad q_3 = \frac{1}{9}}$$

(3) 求める確率は z_3 であるから，(2) の結果より

$$z_3 = \frac{1}{18}x_2 + \frac{1}{9}y_2 + \frac{1}{6}z_2 = \frac{1}{18} \times \frac{5}{18} + \frac{1}{9} \times \frac{11}{18} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \boldsymbol{\frac{11}{108}}$$

2.13 2013年度

1 (1) Dは線分APを1 : 3に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{1+3}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OP}}}$$

Eは線分CPの中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\boldsymbol{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}}\end{aligned}$$

(3) OP = AP であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\angle\mathrm{POA}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\angle\mathrm{POA}=1\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(4) (3)と同様にして $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\}\\&=3(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-(t+2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=\frac{5}{2}-\frac{7}{2}t-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=0\quad\cdots①\\2\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\}\\&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=0\quad\cdots②\end{aligned}$$

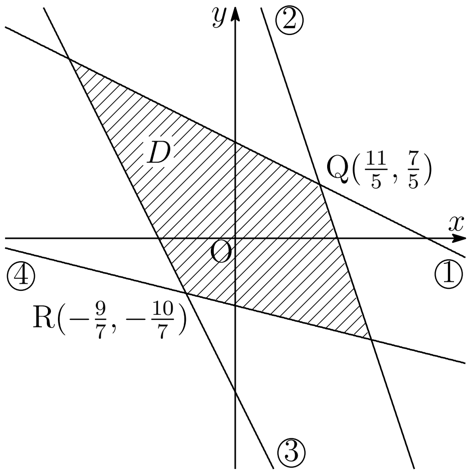
①，②より $\boldsymbol{t=\frac{1}{3}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\frac{4}{3}$ すなわち $\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

2 (1) $x+2y=5\cdots$①，$3x+y=8\cdots$②，$-2x-y=4\cdots$③，$-x-4y=7\cdots$④

とおく．D の表す領域は，図の斜線部分で，境界線を含む．直線 $x+y=k$ を l とする．l は傾き -1 の直線で，①，② の直線の傾きは，それぞれ $-\frac{1}{2}$，-3 であり，

$$-3<-1<-\tfrac{1}{2}$$

ゆえに，D 内の点 $\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$ で，k は最大となる．



また，③，④ の傾きは，それぞれ -2，$-\frac{1}{3}$ であり，

$$-2<-1<-\tfrac{1}{4}$$

ゆえに，D 内の点 $\left(-\dfrac{9}{7}, -\dfrac{10}{7}\right)$ で，k は最小となる．

よって　$\mathbf{Q}\left(\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}\right)$，　$\mathbf{R}\left(-\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}}, -\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{7}}\right)$

(2) 直線 $ax+by=k'$ を l' とする．

l' は傾き $-\dfrac{a}{b}$，切片 $\dfrac{k'}{b}$ の直線である．$b>0$ であるから，k' が最大・最小となるのは，それぞれ $\dfrac{k'}{b}$ が最大・最小となるときである．

k' が Q で最大値をとるとき，l' と ①，② の傾きから

$$-3<-\frac{a}{b}<-\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}<\frac{a}{b}<3 \qquad \cdots(*)$$

k' が R で最小値をとるとき，l' と ③，④ の傾きから

$$-2<-\frac{a}{b}<-\frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{4}<\frac{a}{b}<2 \qquad \cdots(**)$$

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{a}{b}$ の符号に注意し，$(*)$，$(**)$ の共通範囲を求めて

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2}$$

$\boxed{3}$ (1) 1 回目，2 回目に出た目を，それぞれ i，j とすると，$|i-j|$ 枚の硬貨は 1 回だけ反転し，それ以外の硬貨は反転しないか，2 回反転する．
したがって，この操作による表の枚数は $6-|i-j|$ である．
ゆえに表が 1 枚となるとき

$$6-|i-j|=1 \quad \text{すなわち} \quad |i-j|=5$$

これをみたすのは，$(i,\ j)=(1,\ 6),\ (6,\ 1)$ の 2 組である．
よって，求める確率は　$\dfrac{2}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$

(2) L および R において出た目を，それぞれ i，j とし，これらの操作による表の枚数を $LR(i,\ j)$ とする．

i) $2 \leqq i+j \leqq 6$ のとき，$(i+j)$ 枚の硬貨は 1 回だけ反転し，残りの硬貨は反転しないから　$LR(i,\ j)=6-(i+j)$

ii) $7 \leqq i+j \leqq 12$ のとき，$(i+j-6)$ 枚の硬貨は 2 回反転し，残りの硬貨は 1 回だけ反転するから　$LR(i,\ j)=i+j-6$

i),ii) より，$LR(i,\ j)=|i+j-6|$ となり，求める期待値は

$$\frac{1}{6^2}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6} LR(i,\ j)=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|i+j-6|=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|j-(7-i)+1|$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|j-i+1|$$

$$=\frac{1}{36}\left(\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}|j-i+1|+\sum_{1\leqq j<i\leqq 6}|j-i+1|+\sum_{1\leqq i=j\leqq 6}|j-i+1|\right)$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i+1)+\sum_{1\leqq j<i\leqq 6}(i-j-1)+6\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i+1)+\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i-1)+6\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(2j-2i)+6\right\}=\frac{1}{36}\sum_{j=2}^{6}\sum_{i=1}^{j-1}(2j-2i)+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{j=2}^{6}\{2j(j-1)-j(j-1)\}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{j=1}^{6}(j^2-j)+\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\left(\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\right)+\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{19}{9}}$$

別解 $LR(i,\ j)=|i+j-6|$ の値は，右の表のようになる．したがって，求める期待値は

$j \backslash i$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	4	3	2	1	0	1
2	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
4	1	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5	6

$$\frac{1\cdot10+2\cdot8+3\cdot6+4\cdot4+5\cdot2+6}{6^2}$$
$$=\frac{76}{36}=\boldsymbol{\frac{19}{9}}$$

(3) この操作により，すべての硬貨が表となるのは，L，R の操作が終わった時点で，次の (a)〜(f) の場合である．

(a)　裏表表表表表　(b)　裏裏表表表表　(c)　裏裏裏表表表
(d)　裏裏裏裏表表　(e)　裏裏裏裏裏表　(f)　裏裏裏裏裏裏

最初の L，R の操作で出た目をそれぞれ i，j とする．
(a)〜(e) となる $(i,\ j)$ の組は，順次，

$$(6,\ 5),\ (6,\ 4),\ (6,\ 3),\ (6,\ 2),\ (6,\ 1)$$

(f) となる $(i,\ j)$ の組は，$i+j=6$ をみたす 5 通り．
(a)〜(f) について，最後の L の操作における目の出方は，順次，1〜6 である．よって，求める確率は

$$\frac{5+5}{6^3}=\boldsymbol{\frac{5}{108}}$$

4 (1) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ と $y=x-2$ から y を消去すると

$$(x-1)^2+\{(x-2)-1\}^2=2 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2=0$$

ゆえに，$x=2$ で重解をもち，このとき $y=x-2$ より $y=0$
よって，直線 $y=x-2$ は円 C に点 $\mathbf{(2,\ 0)}$ で接する．

(2) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ と $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ から y を消去し，整理すると

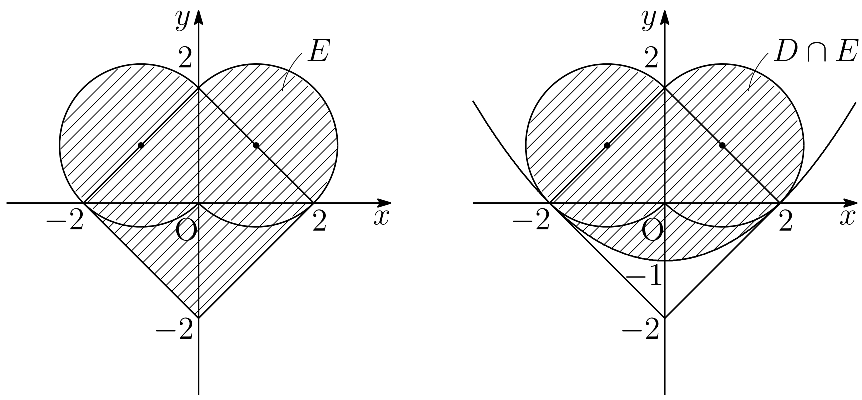
$$x^4-32x+48=0 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2\{(x+2)^2+8\}=0$$

ゆえに，$x=2$ で 2 重解をもち，このとき $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ より $y=0$
よって，求める共有点の座標は　$\mathbf{(2,\ 0)}$

(3) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，A の表す領域は，x 軸，y 軸および直線 $x+y=2$ で囲まれた図形の内部および境界線である．このとき，$(x,\ y)$ に対して，x 軸，y 軸，原点に関して，それぞれ対称な点 $(x, -y)$，$(-x,\ y)$，$(-x, -y)$ も不等式 $|x|+|y| \leqq 2$ をみたす．したがって，A の表す領域は，4点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(-2,\ 0)$，$(0, -2)$ を頂点とする四角形の内部およびその周上である．

$x \geqq 0$ のとき，B の表す領域は，y 軸の右側で，円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ の内部とその境界線である．このとき，$(x,\ y)$ に対して，y 軸と対称な点 $(-x,\ y)$ も不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ をみたす．

したがって，$A \cup B$ の表す領域 E および $D \cap E$ の表す領域は，次のようになる．ただし，境界線を含む．



3点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(-2,\ 0)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4$$

放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の x 軸の下側の部分の面積は

$$-\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)dx = \frac{8}{3}$$

2点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$ を直径とする円の半径は $\sqrt{2}$ である．

よって，求める面積は

$$4+\frac{8}{3}+\pi(\sqrt{2})^2 = \boldsymbol{\frac{20}{3}+2\pi}$$

2.14　2014 年度

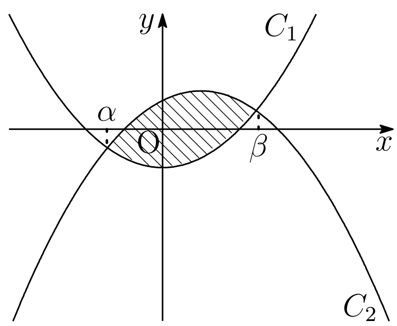
1　(1) $d(\mathrm{P}, \ell_1) = |y+1|$，$d(\mathrm{P}, \ell_2) = |y-1|$ であるから，① より

$$|y+1| \geqq \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{かつ} \quad |y-1| \geqq \sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

これらを整理すると

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad y \leqq -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}$$

上の 2 式を同時にみたす領域が存在する条件は，2 つの放物線



$$C_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$
$$C_2 : y = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}$$

が共有点をもつことであるから，2 次方程式

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}$$

すなわち　$x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1 = 0 \quad \cdots (*)$

が実数解をもてばよい．したがって，係数について

$$(-a)^2 - 4{\cdot}1\left(\frac{1}{2}a^2 - 1\right) \geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-2 \leqq a \leqq 2}$$

(2) $(*)$ の方程式の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

$$x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)$$
$$\beta - \alpha = \sqrt{4-a^2}$$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left\{-\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\right\} dx \\ &= -\int_\alpha^\beta \left(x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1\right) dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}(4-a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ (1) 自然数 a を 3 で割った商を k，余りを r とすると $(r=0,\ 1,\ 2)$

$r=0$ のとき $\quad a^2=(3k)^2=3\cdot 3k^2$

$r=1$ のとき $\quad a^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$

$r=2$ のとき $\quad a^2=(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$

よって，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．

(2) 自然数 a，b，c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすとき，a^2+b^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果から a^2，b^2 がともに 3 の倍数である．

このとき，自然数 l，m を用いて

$$a=3l, \quad b=3m$$

とおける．したがって

$$(3l)^2+(3m)^2=3c^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2=3(l^2+m^2)$$

c^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果により，c も 3 の倍数である．

よって，a，b，c はすべて 3 で割り切れる．

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c が存在すると仮定すると，(2) の結果から

$$a=3^nA, \quad b=3^nB, \quad c=3^nC$$

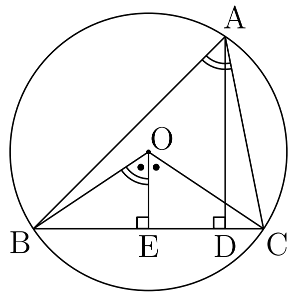
とおける (n は自然数，3 つの自然数 A，B，C の少なくとも 1 つは 3 で割り切れない)．このとき

$$\begin{aligned}(3^nA)^2+(3^nB)^2&=3(3^nC)^2\\ A^2+B^2&=3C^2\end{aligned}$$

上式および (2) の結果から，A，B，C はすべて 3 で割り切れることになり，A，B，C の仮定に反する．

よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は存在しない．

3 (1) 直角三角形 ABD において



$$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}\sin B \quad \cdots ①$$

正弦定理を △ABC に適用すると

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin C} = 2R \text{ より} \quad \mathrm{AB} = 2R\sin C \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C \quad \cdots ③$$

$A < 90^\circ$ より，円周角と中心角の定理により　$\angle\mathrm{BOC} = 2A$

また，$\triangle\mathrm{BOE} \equiv \triangle\mathrm{COE}$ であるから　$\angle\mathrm{BOE} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BOC} = A$

$\mathrm{OB} = R$ であるから △BOE において　$\mathrm{OE} = R\cos A \quad \cdots ④$

(2) △ABC の重心 G は，中線 AE 上にあるから，G と O が一致するとき，直線 AE は辺 BC の垂直二等分線であるから　$\mathrm{CA} = \mathrm{AB}$

同様に，辺 CA の中点を F とすると，$\mathrm{OF}\perp\mathrm{CA}$

G は，中線 BF 上にあるから，G と O か一致するとき，直線 BF は辺 CA の垂直二等分線であるから　$\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$

よって，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ より，△ABC は正三角形である．

別解 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

O と G が一致するとき，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ であるから $\vec{a}+\vec{b} = -\vec{c}$ より

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (-\vec{c})\cdot(-\vec{c}) \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

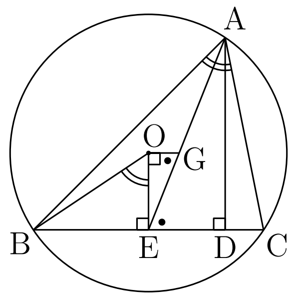
$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R$ であるから　$2\vec{a}\cdot\vec{b} = -R^2$

同様にして　$2\vec{b}\cdot\vec{c} = 2\vec{c}\cdot\vec{a} = -R^2$

このとき　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 3R^2$

同様にして　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2 = 3R^2$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$ より，△ABC は正三角形である．



(3) OG//BC より，$\triangle$EGO $\backsim$ $\triangle$AED
EG : GA $= 1 : 2$ であるから

$$\text{OE} : \text{AD} = 1 : 3 \quad \text{ゆえに} \quad \text{AD} = 3\text{OE}$$

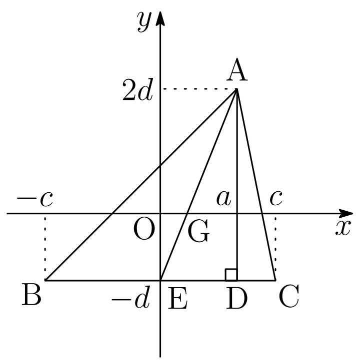
③，④ を上式に代入すると

$$2R\sin B\sin C = 3R\cos A$$

$A + B + C = \pi$ より $\cos A = -\cos(B + C)$ であるから

$$\begin{aligned} 2\sin B\sin C &= -3\cos(B + C) \\ &= -3(\cos B\cos C - \sin B\sin C) \end{aligned}$$

ゆえに　$3\cos B\cos C = \sin B\sin C$　よって　$\tan B\tan C = 3$



別解 O を座標平面上の原点とし，x 軸を辺 BC と平行にとり，A$(a,\ b)$ とし，B と C は y 軸に関して対称であるから，B$(-c, -d)$，C$(c, -d)$ とする．OG//BC より，G は x 軸上にあるから，$\triangle$ABC の重心 G の y 座標について

$$\frac{b + (-d) + (-d)}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2d$$

したがって

$$\text{OE} = |d|,\ \ \text{AD} = 3|d| \text{ より} \quad \text{AD} = 3\text{OE}$$

$$\text{BD} = |a + c|,\ \ \text{CD} = |c - a|$$

$\triangle$ABC は鋭角三角形であるから，$|a| < |c|$ に注意して

$$\tan B\tan C = \frac{\text{AD}}{\text{BD}} \times \frac{\text{AD}}{\text{CD}} = \frac{3|d|}{|a + c|} \times \frac{3|d|}{|c - a|} = \frac{9d^2}{c^2 - a^2} \quad \cdots (*)$$

ここで，$\text{OA}^2 = \text{OC}^2$ であるから

$$a^2 + (2d)^2 = c^2 + (-d)^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2 - a^2 = 3d^2 \quad \cdots (**)$$

$d \neq 0$ であるから，$(**)$ を $(*)$ に代入すると　$\tan B\tan C = 3$

4　(1) A さん，B さんが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額をそれぞれ X，Y とすると

X	0	5	10	15	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	5	10	15	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

よって，A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q は

$$p = \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \mathbf{\frac{3}{8}}$$

$$q = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2) (1) の X，Y に対して，ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額を Z とすると，Z およびその確率 $P(Z)$ を表にすると

合計金額 Z

$X \backslash Y$	**0**	**5**	**10**	**15**
0	15	0	0	0
5	30	15	5	5
10	30	25	15	10
15	30	25	20	15

合計金額の確率 $P(Z)$

$X \backslash Y$	**0**	**5**	**10**	**15**
0	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$
5	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$
10	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$
15	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$

したがって

$$P(Z=0) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$$

$$P(Z=5) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32}$$

$$P(Z=10) = \frac{3}{32}$$

$$P(Z=15) = q = \frac{8}{32}$$

$$P(Z=20) = \frac{1}{32}$$

$$P(Z=25) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32}$$

$$P(Z=30) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$$

よって，求める期待値 E は

$$E = 5 \times \frac{6}{32} + 10 \times \frac{3}{32} + 15 \times \frac{8}{32} + 20 \times \frac{1}{32} + 25 \times \frac{4}{32} + 30 \times \frac{7}{32} = \mathbf{\frac{255}{16}}$$

第 3 章　一般前期解説

基礎力の充実

九州大学の文系数学は，文系にはめずらしく，公式を覚え使い方を理解するだけにとどまらず，公式の証明及び活用能力を問う問題が出題される．

- 円の接線の公式の証明 (2002 $\boxed{\mathbf{1}}$)
- $\triangle$ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ． (2002 $\boxed{\mathbf{6}}$)
- 自然数の和，平方和，立方和の和の公式の証明 (2010 $\boxed{\mathbf{5}}$)

理系との共通問題の中には，論証力が要求される問題も出題されている．

- 1 次元ランダム・ウォーク (2002 $\boxed{\mathbf{8}}$)
- 数列 (数学的帰納法，背理法) (2006 $\boxed{\mathbf{2}}$)
- 確率 (マルコフ連鎖) (2012 $\boxed{\mathbf{4}}$)

文系であるが，外積などの教科書 $+\alpha$ の知識があった方がよい．次の空間ベクトルに関しては，ライバルに差をつけることができる知識でもある．

- 空間のベクトル (外積，三角形の面積) (2002 $\boxed{\mathbf{6}}$)
- 空間のベクトル (外積，法線ベクトル) (2003 $\boxed{\mathbf{6}}$)

整数論が根底にある問題が出題され，今後この傾向を注視していく必要がある．

- 周期関数とフェルマーの小定理 (2011 $\boxed{\mathbf{2}}$)

問題によっては，緻密な計算力を要するものもある．普段からじっくり問題を考えることを心掛け，理由と結論を的確に記述する習慣を身に付ける必要がある．

3.1 2001 年度

$\boxed{1}$ 数学 II：微分法 (関数の単調増加)

(1) $f(x) = \dfrac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ がつねに増加するためには，$f(x)$ が 3 次関数または 1 次関数であり，最高次の係数が正であることが必要条件である．$f(x)$ が 3 次関数であるとき，$f'(x) = 0$ の判別式 D について，$D \leqq 0$ である．

(2) $a = 0$ のとき，$f(x) = bx^2 + (b+1)x$ となる．$f(x)$ が $x > -1$ でつねに増加するためには，$f(x)$ が 2 次関数であるとき，$b > 0$，$f'(-1) \geqq 0$ であり，$f(x)$ が 1 次関数であるとき，1 次の係数が正である．

(3) $a \geqq 0$ は，$f(x)$ が $x > -1$ でつねに増加するための必要条件である．$a > 0$ のとき，$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると，次のような場合分けをして求めるとよい．

i) $a = 0$ の場合，(2) で求めた．
ii) $a > 0$，$D \leqq 0$ の場合，(1) で求めた．
iii) $a > 0$，$D > 0$ の場合，これを求める必要がある．

よって，i)〜iii) をまとめた領域を図示すればよい．

$\boxed{2}$ 数学 II：微分法 (3 次関数の対称性)

(1) 2 点 $(x,\ y)$，$(X,\ Y)$ の中点が $(p,\ q)$ であることから導かれる．

(2) 点対称であるのは，奇関数であるから，ax^2 の項に注意して

$$x^3 + ax^2 = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a^2}{3}\left(x + \frac{a}{3}\right) + \frac{2a^3}{27}$$
$$bx + c = b\left(x + \frac{a}{3}\right) - \frac{ab}{3} + c$$

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおくと，上式から

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \\ &= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + f\left(-\frac{a}{3}\right) \end{aligned}$$

したがって，$y = f(x)$ は G の点 $(-\frac{a}{3},\ f(-\frac{a}{3}))$ に関して対称である．

(3) 2 点 $(x,\ y)$，$(X,\ Y)$ の中点が $(p,\ Y)$ であることから導かれる．

(4) (別解)G が y 軸に平行なある直線 l に関して対称であるとき，G と l の交点をPとする．Pにおける G の接線の傾きが0でないと仮定すると，G は l に関して対称であるから，G はPにおいて自己交差し，G が3次関数であることに反する．したがって，G はPにおいて $f'(x)=0$ となる．G 上に $f'(x)=0$ となるP以外の点P$'$ が存在すると仮定すると，l に関してP$'$ と対称な点P$''$ が存在することになり，G 上に $f'(x)=0$ となる点が3点存在することになる．このことは G が3次関数であることに反する．したがって，$f'(x)=0$ となる点はPに限り，G は単調増加の関数である．G 上にPと異なる点Qをとり，l に関してQと対称な点Q$'$ が存在する．このとき，3点Q，P，Q$'$ を結ぶ曲線部分は単調増加ではないので，矛盾を生じる．よって，題意は成立する．

3 数学B：数列 (漸化式)

(1) $a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2 \geqq 0$ を利用する．

(2) $\dfrac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=a_n$ が成り立つことから

$$\frac{a_2-1}{a_1-1}=a_1,\ \frac{a_3-1}{a_2-1}=a_2,\ \cdots,\ \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=a_n$$

これらの式の辺々を掛けると，$a_{n+1}-1=P_n$ を得る．

(3) 漸化式に順次代入するとよい．

(4) 漸化式から，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$ であるから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$$

(2) の結果から $a_{n+1}-1=P_n$ であるから，上式から

$$\frac{1}{P_n}=\frac{1}{P_{n-1}}-\frac{1}{a_n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_n}=\frac{1}{P_{n-1}}-\frac{1}{P_n}$$

これを n について，加えるとよい．

また，(3) の結果から，結論を推測し数学的帰納法により証明してもよい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 I：実数 (整数問題)

(1) 2つの整数が1と -1 以外に共通の約数を持たないことであり，2つの整数の最大公約数が1であることと同値である．

(2) a，b の素因数分解を考えるとよい．

(3) $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$　(p, q は互いに素) とおいて，$q = 1$ であることを導く．

(4) 次式の値が1より小さいことを示せばよい．

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad \sqrt{n+2} - \sqrt{n}, \quad \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数学 I：図形と計量 (余弦定理)，数学 A：平面図形 (方べきの定理)

(1) 3点 P，E，F を通る円と2直線 l，m に方べきの定理を適用する．

(2) $\triangle$FAC に余弦定理を適用する．

(3) 3点 Q，F，G を通る円と2直線 l，m に方べきの定理を適用する．
さらに (1)，(2) の結果を利用する．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 旧課程：複素数平面 (複素数平面上の軌跡)

(1) 典型的で平易な問題であるが，こうした問題の次に必ず関連性がある発展問題が控えているのが九大入試 (数学) の特徴である．

(2) $dz(\overline{z}+1) = \overline{d}\,\overline{z}(z+1)$ より

$$(d - \overline{d})z\overline{z} + dz - \overline{d}\,\overline{z} = 0$$

これに i を掛けると

$$i(d - \overline{d})z\overline{z} + idz - i\overline{d}\,\overline{z} = 0$$

i) $d \neq \overline{d}$ のとき (d は虚数)

$$a = i(d - \overline{d}), \quad b = -i\overline{d}$$

とおくと，a は実数であり，

$$az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} = 0$$

このとき，(1) の結果が利用でき，本題のポイントである．

ii) $d = \overline{d}$ のとき (d は実数)
$d = \overline{d} \neq 0$ より　$z(\overline{z}+1) = \overline{z}(z+1)$
したがって　$z = \overline{z}$　ゆえに，z は実数である．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 数学 A：確率 (期待値)，数学 C：確率分布 (期待値の加法定理)

(1) 簡単な場合分けにより処理できる．

(2) $P(X_1 = 2) = P(X_1 \geqq 2) - P(X_1 \geqq 3)$ である．

(3) $E(X_1)$ の計算を $\sum$ を駆使して行う．

(4) 確率変数の和の期待値について，$E(X_1 + X_n) = E(X_1) + E(X_n)$ が成り立つ．この部分だけが確率分布からの出題である (当時は，数学 B で確率分布を履修)．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 数学 B：コンピュータ (自然数を 2 で割り続けるアルゴリズム)

(1) フローチャートを作成しなくとも，順次，値を代入すればよい，

(2) i が奇数と偶数のときで場合分けをすればよい．

(3) (2) の結果を利用すればよい．

3.2 2002 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 II：図形と方程式 (円の接線)，微分法 (放物線の接線)，積分法 (面積)

(1) 九大入試 (数学) の出題パターンで教科書にある公式の証明問題.

(2) $y = x^2 + 1$ 上の点 $(t,\ t^2 + 1)$ における接線の方程式を求め，その直線が円に接する場合を考える.

(3) 定積分の基本問題．C と l_1，l_2 との接点の x 座標が，それぞれ 0，$\sqrt{6}$ であるから，l_1 と l_2 の交点の x 座標は $\dfrac{0+\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 I：実数 (整数問題)

(1) 一般的な約数の総和の問題で，教科書等にも登場している.

(2) $p \geqq 2$ より，a は少なくとも pq，q の 2 個の約数にもつことに気付けば平易な問題である.

(3) 平易な問題の後には，必ずそれを利用する発展問題があるといういつもの出題パターンである．論理的な展開の中で (2) の結果を利用する必要がある.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 A：平面図形 (最短経路)

(1) 基本題であるが，丁寧な論証が必要である.

(2) 折れ線の最短の長さを求める頻出問題である.

(3) (2) と同系の問題で，後半は基本.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 B：数学的帰納法 (三角関数の加法定理による数学的帰納法)

(1) 数学的帰納法による証明.

(2) 数学的帰納法による証明.

(3) 数列の漸化式を用いて証明する.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数学 B：数列 (漸化式)

(1) $L_1 = 2$，$L_n = L_{n-1} + n\ (n \geqq 2)$ が成り立つことがポイント.

(2) 具体的に調べるとよい.

(3) (2) の結果をもとに，H_n の漸化式を導く.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 数学 B：空間のベクトル (三角形の面積)

(1) これも九大入試の特徴の一つである．教科書にある公式の証明問題．

(2) 外積は，強力な計算手段であるから知っていれば，結論を先読みすることもできる．外積について次のページに掲載してあるので，是非学習しておいてもらいたい．しかし，外積は高校数学の範囲外であり，入試では使ってはならない．外積と内積の関係式 $|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ により，以下のように，実際の計算と答案を使い分けるとよい．

実際の計算

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-a,\ y,\ \sqrt{3}a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\times\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (\sqrt{3}a, -\sqrt{3}a,\ y-x+a)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\times\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = (y-x+a)^2+6a^2$$

よって

$$\triangle\mathrm{ACP} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\times\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(x-y-a)^2+6a^2}}$$

答案

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-a,\ y,\ \sqrt{3}a)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = (x-a)^2+y^2+3a^2$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x-a+y \text{ であるから}$$
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACP} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(x-y-a)^2+6a^2}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果および $-1 \leqq x-y \leqq 1$ であるから，a の値により場合分けをするとよい．

外積 (ベクトル積)

2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積 (ベクトル積)** と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表す (内積をスカラー積とも言う)．すなわち

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

このとき，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

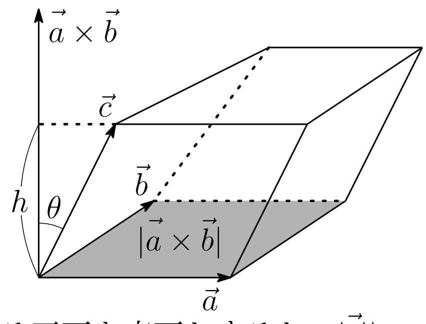
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．

$\boxed{7}$ 旧課程：複素数平面 (三角形の垂心)

(1) 2 点 α，β を通る直線，2 点 γ，δ を通る直線について
2 直線が平行 $\Longleftrightarrow \dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ は実数，　2 直線が垂直 $\Longleftrightarrow \dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ は純虚数

(2) $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ とすると，点 A を通り，BC に垂直な直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right)}=0 \quad \cdots ①$$

$w_1=z_1+z_2+z_3$ がこの直線上にあることを示せばよい．
また，w_1 が点 B を通り直線 CA に垂直な直線な直線上の点，および点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点であることを示すことができる．
よって，w_1 は △ABC の垂心であることが分かる．

(3) 円 C の方程式は　$|z|=1 \quad \cdots ②$
$w_2=-\bar{z}_1z_2z_3$ が，直線 ①，円 ② 上にあることを示せばよい．

$\boxed{8}$ 数学 A：確率 (1 次元ランダム・ウォーク)

(1) 原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，
右斜め 45° の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め $-45°$ の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．
よって，原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は

$${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} \quad \text{または} \quad {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-k}{2}}$$

(2) 原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，最初に直線 $y=k$ と交わる格子点を $\mathrm{A}(a,\ k)$ とする $(0 \leqq a \leqq n-2)$．A と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数，A と格子点 $(n-1,\ k-1)$ を通る数は，直線 $y=k$ に関する対称性によりその数は等しいことに気付く必要がある．

(3) 条件つき確率の問題で，解答にはその一般的な解答を示した．具体的な値での設問であるから，数え上げによる別解を次のページに示した．

1 次元ランダム・ウォーク

設問は，1 次元ランダム・ウォーク (Random walk)[離散型] の最も基本的なモデルである．(3) の条件つき確率は，下の 2 つの表における原点と点 (9, 3) を結ぶ折れ線グラフの数から

$$\mathbf{\frac{28}{84} = \frac{1}{3}}$$

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	9										1
	8									1	
	7								1		9
	6							1		8	
	5						1		7		36
	4					1		6		28	
	3				1		5		21		**84**
	2			1		4		15		56	
	1		1		3		10		35		126
k	0	1		2		6		20		70	
	-1		1		3		10		35		126
	-2			1		4		15		56	
	-3				1		5		21		84
	-4					1		6		28	
	-5						1		7		36
	-6							1		8	
	-7								1		9
	-8									1	
	-9										1

折れ線グラフの数

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	3										**28**
	2			1		3		9		28	
	1		1		3		9		28		90
k	0	1		2		6		19		62	
	-1		1		3		10		34		117
	-2			1		4		15		55	
	-3				1		5		21		83
	-4					1		6		28	
	-5						1		7		36
	-6							1		8	
	-7								1		9
	-8									1	
	-9										1

すべての $i(i = 1, 2, \cdots, 7)$ で $T_i \neq 3$ の数

(1) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ である．また，(2) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいから，n のときはじめて k になるグラフの数は

$${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n} \cdot {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$$

これは，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの本数の $\dfrac{k}{n}$ 倍．

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{k}{n}$ となる．

3.3　2003 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 II：積分法 (2 次不等式の成立条件)

(1) 平方完成を行い，頂点が定義域内にあることを確認し，その最小値が 0 以上であることから結果が導かれる．

(2) a の値による場合分けを行う 2 次関数の典型的な問題．

(3) a の値による場合分けを行い，相加平均および相乗平均の関係を用いる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 II：図形と領域 (絶対値のついた不等式の表す領域)

(1) 不等式 $2|x-4|+|y-5| \leqq 3$ の表す領域 A は，$2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したもの．

(2) $f(x,\ y) = 2|x-4|+|y-5|$，$g(x,\ y) = 2\Big||x|-4\Big| + \Big||y|-5\Big|$ とおくと，$f(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域 A の点 $(x_1,\ y_1)$ は，(1) の結果から $x_1 > 0$，$y_1 > 0$ であり，$g(x,\ y) = f(|x|,\ |y|)$ が成り立つことに注意する．

(3) 素因数分解の一意性を利用した整数問題．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 II：微分法 (2 次関数の最大値と接線の方程式)

(1) $px - f(x)$ を平方完成し，$g(p)$ を求める．さらに $g(p)$ を $g(x)$ に書き直す．$f(x) = g(x)$ が恒等式であるから，係数を比較し，a，b，c の値を求める．

(2) (1) の結果から，$px - f(x) \leqq g(p)$ であるから　$xp - g(p) \leqq f(x)$
したがって，p の関数 $xp - g(p)$ の最大値は $f(x)$ である．
よって　$h(x) = f(x)$

(3) 別解に示したように (1) の結果を利用する方法がよい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 B：数列 (漸化式)

(1) $a_{k+1} \neq a_k$ の場合と $a_{k+1} = a_k$ の場合を調べる．

(2) $\{m_k\}$ は等比数列であるから $m_k = m_1 r^{k-1}$ を (1) で求めた漸化式に代入し，r の値による場合分けを行う．

(3) 計算結果が $a_1 = \dfrac{m_1}{1+r}$ であることが，計算がかなり集約される．

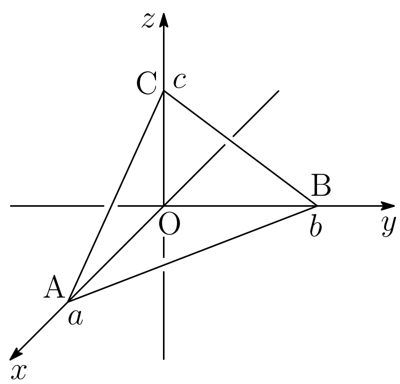
$\boxed{\mathbf{5}}$ 数学 B：コンピュータ (フロー・チャート)

(1) 105 を 2 数の積に分解するアルゴリズム．

(2) 解答には，最初に $\mathrm{X1} = \max(\mathrm{A}-\mathrm{R},\ 1)$，$\mathrm{Y1} = \max(\mathrm{B}-\mathrm{R},\ 1)$ とするあるが，これを省略してもよい．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 数学 B：空間のベクトル (ベクトルの空間図形への応用)

(1) 3 点 A,B,C を通る平面の方程式およびその法線ベクトルを利用した方が自然な結論が得られる．



$\angle$AOB，$\angle$BOC，$\angle$COA はすべて 90° であるから座標空間に 3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ を定めると，$\triangle$ABC の重心 G の座標は

$$\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$$

3 点 A,B,C を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

この平面の法線ベクトル $\vec{n}$ は　$\vec{n}=\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{c}\right)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}/\!/\vec{n}$ であるから，定数 k を用いて

$$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)=k\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)\quad \text{ゆえに}\quad a^2=b^2=c^2=3k$$

よって，$a>0,\ b>0,\ c>0$ より　$\boldsymbol{a=b=c}$

(2) 本題は，以下のように外積 (ベクトル積) を用いた計算が簡単である．

D は線分 BC を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P は直線 AD 上の A 以外の点であるから $(t\neq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$\triangle$APQ の重心が G であるから

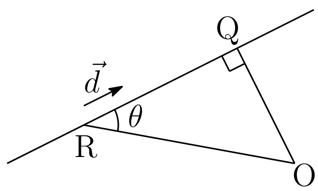
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\quad \text{すなわち}\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$=(-a,\ b,\ c)+\frac{t}{3}(3a,-2b,-c)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-a,\ b,\ c)$，$\vec{d}=(3a,-2b,-c)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{t}{3}\vec{d}\quad\cdots①$$



$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\vec{d}$ のベクトルのなす角を θ とすると
$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$，OQ が最小となるとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\sin\theta, \qquad \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\vec{d}|}$$

上の 2 式から　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} \quad \cdots ②$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \vec{d}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \vec{d} = 0$ であるから，① をこれに代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d} + \frac{t}{3}|\vec{d}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{3(\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d})}{|\vec{d}|^2}$$

したがって　$t = \dfrac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2} \neq 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d} = (bc,\ 2ca, -ab)$ であるから，② より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{\sqrt{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}}{\sqrt{9a^2 + 4b^2 + c^2}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}}$$

法ベクトル

座標平面 (2 次元) における直線 $ax + by + c = 0$(1 次元) および座標空間 (3 次元) における平面 $ax + by + cz + d = 0$(2 次元) の法ベクトル (法線ベクトルともいう) は，それぞれ $(a,\ b)$，$(a,\ b,\ c)$ である．また，法ベクトルの次元は $2-1$ および $3-2$ で，ともに 1 次元である．

直線 $ax + by + c = 0$，平面 $ax + by + cx + d = 0$ は，n 次元空間における $n-1$ 次元の多様体であり，法ベクトルの次元は 1(多様体の余次元) である．

したがって，これらの多様体 (ここでは，直線と平面) は同形であり，関連する公式も同形である．

たとえば，点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ から平面 $ax + by + cz + d = 0$ までの距離は

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であり，点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離と同形である．

$\boxed{7}$ 旧課程：複素数平面 (直線と曲線の共有点の個数)

(1) $z = t + ai$ に対し，$z^2 = x + yi$ とおく．2 式から t を消去して，x，y の関係式を導く．

(2) m の方程式を求め，場合分けにより，(1) で求めた曲線との共有点の個数を求める．

$\boxed{8}$ 数学 A：確率 (面積比よる確率)，数学 C：確率分布 (2 項分布)

(1) 確率が面積比により求まる．

(2) 余事象の確率および期待値の問題．なお，期待値 E は 2 項分布による公式 $E = np$ を利用してもよい．当時は，確率分布を数学 B で履修していた．

3.4　2004 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 II：微分法 (接線の方程式)，積分法 (面積)

(1) $y = f(x)$ は y 軸に関して対称な放物線であるから，$(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ の一方を代入すればよい．

(2) $x^2 = |x|^2$ が成り立つことに注意して，連立方程式を解く．

(3) (2) の結果による接線の方程式，さらに 2 直線の交点を求める基本題．

(4) 三角形の面積および，放物線と AC を通る直線で囲まれた部分の面積を求めた方がよい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 旧課程：複素数平面 (極形式)

(1) $|\beta|$ に半角の公式を適用する．

(2) (1) の結果に注意しながら，極形式に変形する．

(3) $\alpha^m\beta^n$ の最小値について，m か n のいずれかを固定して順次求めていく．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 B：平面上のベクトル (線分の内分比と面積比)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DQ}}$ と考える．

(2) (1) の結果を利用しながら求める典型的な問題．

(3) 面積比と線分の比に注意しながら求めればよい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 A：確率 (余事象の確率)，数学 C：確率分布 (2 項分布)

(1) まず個別の事例について考え，全体的な場合の数を求めればよい．

(2) 色の変化が 1 回も起きない場合，および色の変化が 1 回だけ起きる場合の確率を考える．求める確率は，これらの余事象の確率である．

(3) 色の変化する場所を選ぶ組合せとして考えるとよい．

(4) (3) の結果に次式を適用するだけである．当時は，2 項分布を数学 B で履修していた．

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot{}_n\mathrm{C}_k = n\cdot 2^{n-1}$$

3.5 2005 年度

1 数学 II：積分法 (面積)

(1) 定点 A と放物線上の点の最短距離を求める基本題.

(2) 台形の面積から放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を引く.

(3) (2) の結果に相加平均および相乗平均の関係を適用すればよい.

2 数学 II：複素数と方程式 (2 次方程式の虚数解)，旧課程：複素数平面 (極形式)

(1) 判別式 < 0 であることに注意して，解の公式を利用する.

(2) 円の方程式で表す.

(3) 極形式を用いる.

3 数学 II：いろいろな関数 (三角不等式，対数不等式)

(1) ガウス記号について，$[x] \leqq 2$ ならば $x < 3$ であることに注意する.

(2) ガウス記号について，$[x] \geqq 1$ ならば $x \geqq 1$ であることに注意する.

(3) 緻密な場合分けを要する問題.

4 数学 A：確率 (期待値)

(1) $x_1 < x_2$ の目の出方の総数は ${}_6\mathrm{C}_2$ (通り)

x_3，x_4 の目の出方の総数は 6^2 (通り)

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ の目の出方の総数は ${}_6\mathrm{C}_3$ (通り)

x_4 の目の出方の総数は 6 (通り)

(3) (1)，(2) の結果から $P(x_1 < x_2 \geqq x_3) = P(x_1 < x_2) - P(x_1 < x_2 < x_3)$

(4) (1)〜(3) の結果を利用しながら

$$P(k=1),\ P(k=2),\ P(k=3),\ P(k=4)$$

の値を導き，期待値を求める.

3.6　2006 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 II：微分法 (接線と法線)，積分法 (面積)

(1) 接線および法線の方程式を求める頻出問題．これらの直線と x 軸との共有点の座標を求める基本問題．

(2) $0 \leqq x \leqq t$ において，直線 m と曲線 C で囲まれた図形の面積．

(3) $S_1 - S_2$ は簡単に因数分解ができ，$t > 0$ に注意して $S_1 - S_2 > 0$ を満たす t の値の範囲を求めることができる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 B：数列 (数学的帰納法，背理法)

(1) (数学的帰納法) 3 で割り切れる数 a_k，3 で割り切れない数 b_k を

$$a_k = 3M,\quad b_k = 3N \pm 1 \quad (M,\ N \text{ は整数})$$

とおいて証明する．

(2) (背理法) $2 \leqq n \leqq m$ のとき，a_n と b_n は互いに素であるが，a_{m+1} と b_{m+1} は素数 p を約数にもつと仮定し ($p \geqq 3$)，矛盾を導く．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 B：空間のベクトル (ベクトルの大きさ)

(1) $|x\vec{a} + \vec{b}|^2 = |(x-h)\vec{a} + (h\vec{a} + \vec{b})|^2$ とし，右辺を計算する．

(2) $\vec{d} = h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ とし，(1) と同様に，次式の右辺を計算する．

$$|x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}|^2 = |(x-h)\vec{a} + (y-k)\vec{b} + \vec{d}|^2$$

(3) (2) の結果において，等号が成り立つとき

$$\begin{cases} |x-h||\vec{a}| - |y-k||\vec{b}| = 0 \\ |x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}| - (x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \end{cases}$$

$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ であるから，第 2 式より，$x - h = 0$ または $y - k = 0$ となる．
よって，第 1 式により　$x - h = 0$，$y - k = 0$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 II：三角関数 (三角関数のグラフ)

(1) $\left|\sin x - \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{2} = 0$ を解けばよい．

(2) 区間による場合分けを行い，グラフの概形を描く．

(3) $y = f(x)$ と $y = k$ とおいて，その共有点の個数を求めるのが常套手段．

3.7 2007 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 I：方程式・不等式 (4 次方程式，4 次不等式)

(1) 求める 4 次方程式の解は，ここでは 2 つの 2 次方程式の解である．

(2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸との位置関係から，$f(n) \leqq 0$ をみたす整数 n を求める．

(3) (2) の結果および $f(n) = 1$ をみたす整数 n を求める．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 B：空間のベクトル (四面体の体積の最小値)

(1) $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ となり，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形．

(2) 定石どおりに $\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ を示す．

(3) (1)，(2) の結果から，$V(t) = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{PG}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 A：確率 (正方形の頂点を移動する点の確率)

(1) 対称性に注意する．

(2) 漸化式は簡単に導くことができ，順次代入し計算し評価する．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 I：図形と計量 (三角形の成立条件)

(1) 条件および三角形の成立条件に注意しながら解く必要がある．

(2) (1) の結果に注意して，余弦定理に適用する．

(3) (1) の結果のもとで (2) の最大値を求める．

3.8 2008 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 II：三角関数 (2 倍角の公式，数学的帰納法)

(1) 2 倍角の公式により $\sin 4 = 2\sin 2\cos 2 = 2(2\sin 1\cos 1)\cos 2$

ゆえに $\sin 4 = 4\sin 1\cdot\cos 2\cos 1$ よって $\cos 2\cos 1 = \dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$

(2) 定義式により $a_{n+1} = a_n\cos 2^{n+1}$ を利用し，数学的帰納法により証明する．

(3) $\sin 1 > \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ゆえに $\dfrac{1}{\sin 1} < \sqrt{2}$

これと $\sin 2^{n+1} \leqq 1$ を (2) の結果に代入する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 II：微分法 (放物線の法線の方程式)

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の傾きは $2p$ であるから，接線の方向ベクトルを $\vec{d} = (1,\ 2p)$ とすると，法線上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ について，$\vec{d}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$.

(2) (1) で求めた法線が点 $(0,\ a)$ を通ることから，p の方程式 $2pa - 2p^3 - p = 0$ の解の個数を場合分けにより求める．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 B：平面上のベクトル (内積の図形への応用)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角は 45°

(2) 図形の対称性に注意しながら求めると，7 通りある．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = -2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ゆえに $q_i = -2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}_i$

$q_i \neq 0$ となる P_i は，A，C，D の 3 組ある．

したがって，$q_1q_2\cdots q_n \neq 0$ となる確率は $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

よって，$q_1q_2\cdots q_n = 0$ となる確率は $1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 II：微分法 (接線の方程式)，数学 B：数列 (漸化式)

(1) C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2 - 1)$ における接線の方程式を求め，$a_1 > 0$ に注意すればよい．

(2) (1) と同様にして，a_n と a_{n+1} の関係式を求める．

(3) (2) で求めた関係式から示される．

(4) (3) の結果を利用する．なお，$n \geqq 7$ であれば正解．

3.9 2009 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 I：図形と計量 (余弦定理)，数学 II：三角関数 (角の大小)

(1) 求める三角比は，三角形の大きさに関係にしないので，辺の長さを適当に設定する．

(2) (1) の結果を $\cos 2\angle\mathrm{QMR} = 2\cos^2\angle\mathrm{QMR} - 1$ に適用する．余弦定理により $\cos\angle\mathrm{QMB}$ を求める．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 B：平面上のベクトル (定点と半直線上の点との距離の最小値)

(1) C は点 O を通り，直線 AB に垂直な直線を求め，これと AB との交点を求めてもよい．また，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ の s，t を用いた成分表示により求まる．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を t について平方完成し，その最小値を求める．

(3) (2) と同様にして，t の値の範囲に注意してその最小値を求める．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 A：確率 (一列に並べた 6 枚のカードの確率)

(1) c は $3 \leqq c \leqq 6$ であるから，それぞれの場合の数を数え上げる．

(2) $a + b = c + d$ を満たす a，b について，$5 \leqq a + b \leqq 9$ であるから，(1) と同様にそれぞれの場合の数を数え上げる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 II：微分法 (放物線の 2 接線)，積分法 (面積)

(1) 放物線上の異なる 2 点 P，Q における 2 本の接線の交点の x 座標は，P と Q の中点の x 座標である．

(2) 求める面積は，直線 PQ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた部分の面積と $\triangle\mathrm{PSQ}(= \triangle\mathrm{PRQ})$ の面積の和である．

(3) このとき，接線の傾きから $\quad 2a \times 2b = -1 \quad$ ゆえに $\quad a = -\dfrac{1}{4a}$
これを (2) の結果に代入して，相加平均と相乗平均の大小関係を利用する．

3.10　2010 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 I：図形と計量 (余弦定理)

(1) $\triangle$ABC について余弦定理により $\cos A$ を求め，これを $\triangle$ACP に適用する．

(2) CP $= a$ を (1) の結果に代入し，$t \geqq 0$ に注意して t の値を求める．

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に (2) の条件を満たす t が 2 個あるための必要条件は，$b \geqq a$ である ($B \geqq A$)．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 A：確率 (さいころを振ったときの得点の期待値)

(1) 表を完成し，期待値を求める．

(2) 1 回目に 6 の目が出た場合は，2 回目に関係なく 6 点として表を完成し，期待値を求める．

(3) 最初の目が n 以上であるとき ($1 \leqq n \leqq 6$)，2 回目を振らないとすると，そのときの得点の期待値を $E(n)$ とおく．たとえば，最初の目が 4 以上のとき，2 回目を振らないときの期待値 $E(4)$ は

$$\begin{aligned}E(4) =&\frac{1}{36}\{(2+3+4+5+6)\\&+(3+4+5+6)\\&+(4+5+6)+6(4+5+6)\}\end{aligned}$$

1 回目が 4 点以上のとき

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	4	4	4	4	4	4
	5	5	5	5	5	5	5
	6	6	6	6	6	6	6

したがって

$$E(4) = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{3}\{(k+1)+(k+2)+\cdots+6\}+\frac{1}{6}\sum_{k=4}^{6}k$$

一般に，$E(n)$ は ($1 \leqq n \leqq 6$)

$$E(1) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k$$

$$E(n) = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n-1}\{(k+1)+(k+2)+\cdots+6\}+\frac{1}{6}\sum_{k=n}^{6}k \quad (2 \leqq n \leqq 6)$$

実際，$1 \leqq n \leqq 6$ であるから，個別に $E(n)$ を求めることも可能である．なお，$n = 6$ の場合は (2) で求めている．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学II：三角関数 (2倍角の公式)，微分法 (3次方程式の解の個数)

(1) 円周角と中心角の関係を用いる．

(2) 原点を中心とする単位円周上の点Nの x 座標を求める．

(3) (1) および (2) の結果に2倍角の公式を適用すると，t の方程式が導かれる．

(4) $f(t) = 4t^3 - 4t + 1$ とおき，その増減を調べると方程式 $f(t) = 0$ の解が $0 < t \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲に唯一つ存在することが示される．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学B：数列 (自然数の和，平方和，立方和)

(1) $2k = k(k+1) - (k-1)k$ を利用する．

(2) $3k^2 + 3k = k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)$ および (1) の結果を利用する．

(3) $4k^3 = k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2$ を利用する．
(1)〜(3) は，教科書にある証明でもよい．また，結論が分かっているので，その結論を数学帰納法を用いて証明してもよい．

3.11 2011 年度

1 数学 II：積分法 (無理関数と面積)

(1) 基本題

(2) △PRH は直角二等辺三角形であることに着目する．

(3) (2) の結果を用いて，S_1 の面積を求める．

(4) S_2 は簡単に求まる．これと (2) の結果を利用する．

2 数学 B：数列 (周期関数とフェルマーの小定理)

フェルマーの小定理

p を素数，n と p が互いに素であるとき，$n^{p-1}-1$ は p の倍数である．

証明 p を素数とする．2 項定理により

$$(a+b)^p-a^p-b^p=\sum_{j=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_j a^{p-j}b^j$$

${}_p\mathrm{C}_j$ $(1 \leqq j \leqq p-1)$ は p の倍数であるから，a，b が整数であるとき，上式は p の倍数である．k が整数のとき，$a=k-1$，$b=1$ とし，数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k=k^p-(k-1)^p-1$$

とおく．この数列の初項から第 n 項までの和を求めると

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^p-n=n(n^{p-1}-1)$$

a_k は p の倍数であるから，n と p が互いに素であるとき，$n^{p-1}-1$ は p の倍数である． 証終

定理

n^e-1 が素数 p で割り切れる最小の自然数 e は，$p-1$ の約数である．

証明 $p-1$ を e で割ったときの商を q，余りを r とすると $(0 \leqq r < e)$

$$p-1=eq+r$$

したがって

$$n^{p-1}-1=n^{eq+r}-1=(n^e)^q n^r-1=\{(n^e)^q-1\}n^r+n^r-1 \quad \cdots(*)$$

n^e-1 が素数 p で割り切れるとき，整数 k を用いて

$$n^e-1=pk \quad ゆえに \quad n^e=pk+1$$

このとき，$(n^e)^q-1=(pk+1)^q-1$ は p で割り切れる．

ゆえに，$(*)$ およびフェルマーの小定理により n^r-1 は p で割り切れる．

$0<r<e$ ならば，r が n^e-1 が p で割り切れる最小の自然数 e に反する．

したがって，$r=0$ となる．よって，n^e-1 が p で割れる最小の自然数 e は $p-1$ の約数である． 証終

(1) $a_n=\tan\theta_n$ とすると　$\tan\theta_{n+1}=\tan 2\theta_n$

$\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$ とおくと，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=\tan\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2^{n-1}\right)=\tan\frac{2^{n-2}}{3}\pi$$

(2) 基本題

(3) $k \geqq 2$ のとき

$$a_k=\tan\left(\frac{\pi}{7}\cdot 2^{k-1}\right)=\tan\frac{2^{k-1}}{7}\pi$$

ゆえに $$\frac{2^{k-1}}{7}\pi-\frac{\pi}{7}=\frac{2^{k-1}-1}{7}\pi$$

フェルマーの小定理により，2^6-1 は 7 の倍数であり，求める最小の自然数 k は，$k-1$ が 6 の約数であることから結果を事前に予想することができる．ちなみに，(1) では

$$\frac{2^n}{3}\pi-\frac{2^{n-2}}{3}\pi=2^{n-2}\times\frac{2^2-1}{3}\pi$$

であるから，フェルマーの小定理により 2^2-1 が 3 の倍数で，$n \geqq 2$ において 2 項の繰り返しであることがわかる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 B：平面上のベクトル (ベクトルの図形への応用)

(1) 基本題

(2) (1) の結果を利用する．また，$\angle\mathrm{A} = 90^\circ$ であるから，A が BC を直径とする円周上の点である．

(3) 与えられた条件と (2) の結果を利用する．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 A：確率 (カードの並べ替えの確率と期待値)

(1) 2 回とも同じ球の組合せである．

(2) 1 回目に $\{1,\ 4\}$，2 回目 $\{2,\ 3\}$ の球を取り出す場合と 1 回目に $\{2,\ 3\}$，2 回目に $\{1,\ 4\}$ を取り出す場合の 2 通りである．

(3) 次の 2 つの場合に分けて求める．

i) 1，2 回目ともに $\{1,\ k\}$ $(k = 2, 3, 4)$ を取り出す場合

ii) 1，2 回目ともに 1 以外の球を取り出す場合

(4) 左端が X となる確率を $P(X)$ とすると

$$P(2) = P(3) = P(4)$$

であることを利用する．

3.12 2012 年度

$\boxed{1}$ 数学 B：空間のベクトル (内積，三角形の面積)

(1) 基本題

(2) 基本題

(3) $\triangle$OAH の面積は $\triangle\mathrm{OAH} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}})^2}$

$\boxed{2}$ 数学 II：微分法 (3 次関数の対称性，関数の増減)

(1) $t \geqq 0$ のとき，$f'(x) = t$ が異なる 2 つの実数解をもつことを示す．

(2) $f(x)$ を $3x^2 + 6x + 1 - t$ で割った商と余りは，それぞれ $\dfrac{1}{3}(x+1)$，$\dfrac{1}{3}(t-4)(x+1)$ であるから

$$f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(3x^2+6x+1-t) + \frac{1}{3}(t-4)(x+1)$$

p，q は $f'(x) = t$，すなわち $3x^2+6x+1-t = 0$ の解であるから

$$f(p) = \frac{1}{3}(t-4)(p+1), \quad f(q) = \frac{1}{3}(t-4)(q+1) \quad \cdots(*)$$

したがって，$f(p) + f(q) = \dfrac{1}{3}(t-4)(p+q+2)$

解と係数の関係により $p + q = -2$，$pq = \dfrac{1-t}{3} \quad \cdots(**)$

ゆえに $\dfrac{p+q}{2} = -1$，$\dfrac{f(p)+f(q)}{2} = 0$

よって，2 点 P$(p,\ f(p))$，Q$(q,\ f(q))$ は点 A$(-1,\ 0)$ に関して対称である．

(3) $(*)$ より $f(p) - f(q) = \dfrac{1}{3}(t-4)(p-q)$

$(**)$ より $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = (-2)^2 - 4 \times \dfrac{1-t}{3} = \dfrac{4}{3}(t+2)$

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (p-q)^2 + \{f(p)-f(q)\}^2 \\ &= (p-q)^2 + \frac{1}{9}(t-4)^2(p-q)^2 \\ &= (p-q)^2\left\{1 + \frac{1}{9}(t-4)^2\right\} \\ &= \frac{4}{3}(t+2)\left\{1 + \frac{1}{9}(t-4)^2\right\} = \frac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50)\end{aligned}$$

$g(t) = \dfrac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50)$ $(t \geqq 0)$ の最小値を求めればよい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学 A：場合の数 (1 次不定方程式)

(1) 基本題

(2) d を整数とする．整数 x，y を解とする次の 1 次不定方程式を考える．

$$7x+3y=d\cdots(*)$$

$7x+3y=1$ の整数解の 1 つは $(x,\ y)=(1,-2)$ であるから，
$(*)$ の整数解の 1 つは　$(x,\ y)=(d,-2d)$
$7x+3y=0$ の整数解は，整数 k を用いて　$(x,\ y)=(-3k,\ 7k)$
ゆえに，$(x,\ y)=(d-3k,\ -2d+7k)$ は $(*)$ の解である．
$(x',\ y')$ が $(*)$ の解であるとすると

$$7x'+3y'=d\cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$7(x'-x)+3(y'-y)=0$
ゆえに，整数 k' を用いて　$x'-x=-3k',\ y'-y=7k'$
したがって　　$x'=d-3(k+k'),\ y'=-2d+7(k+k')$
よって，$(x,\ y)=(d-3k,\ -2d+7k)$ は $(*)$ の一般解である．

$d=100$ とすると，$(*)$ の解は　$(x,\ y)=(100-3k,-200+7k)$
このとき，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ であるから　$29\leqq k\leqq 33$
よって　$(x,\ y)=(13,\ 3),\ (10,\ 10),\ (7,\ 17),\ (4,\ 24),\ (1,\ 31)$

(3) $(x,\ y)=(d-3k,\ -2d+7k)$ より，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ であるから，購入金額は

$$480(d-3k)+220(-2d+7k)=40d+100k\quad\left(\frac{2d}{7}\leqq k\leqq\frac{d}{3}\right)$$

購入金額が最小となるのは，d に対して，最小の整数 k をとるときである．
$d\geqq 100$ において購入金額が最小となるのは，$d=100$ のとき，$k=29$ で，その購入金額は 6900 円である．このとき，$x=13$，$y=3$ である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学 A：確率 (マルコフ連鎖)

(1) 基本題

(2) 問題の根底にある確率過程を理解していないと，計算の方向性を見極めることができない．それぞれの過程を正確に区分し，その確率過程を導き，ミスなく完答することは容易ではない．解答で表した x_{n+1}，y_{n+1}，z_{n+1} は x_n，y_n，z_n によって定まる (1 つ前の時点だけを考慮する)．このような確率過程をマルコフ連鎖 (Markov chain) という．

3.13 2013年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学B：空間のベクトル(内積)

(1) 基本題

(2) 基本題

(3) $\triangle$OAPに余弦定理を適用してもよい．

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OP}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{OAP}$$

これに $\mathrm{AP}=\mathrm{OP}$，$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{OAP} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を代入すると

$$\mathrm{OP}^2 = 1^2 + \mathrm{OP}^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}$$

(4) 直線PQが平面ODEに垂直であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ により，t と $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の連立方程式を解く．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学II：図形と方程式(線形計画法)

(1) 基本題

(2) 直線の傾きに注意する．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数学A：場合の数と確率(確率，期待値)

(1) 基本題

(2) 6×6 通りの場合について調べ上げてもよい．

(3) この操作により，すべての硬貨が表となるとき，L，Rの操作が終わった時点での硬貨の表・裏の並びに着目する．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数学II：図形と方程式(不等式の表す領域)，積分法(面積)

(1) 基本題

(2) 連立方程式を解く過程で x の4次方程式の実数解を求める．

(3) 不等式 $|x|+|y| \leqq 2$ の表す領域は，x 軸，y 軸，原点に関して対称であり，不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ の表す領域は，y 軸に関して対称であることに着目する．

3.14　2014 年度

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数学 II：図形と方程式 (不等式の表す領域)，積分法 (面積)

(1) 不等式の表す 2 つの領域が共通部分をもつことが条件．

(2) 2 次方程式の解と係数の関係と定積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を利用する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数学 A：論理と集合 (無限降下法)

(1) 新課程を意識した出題で，理系・文系の共通問題として出題された．

(2) (1) の結果を利用する．

とくに新課程では，合同式が教科書に発展学習として取り上げられているので，合同式の定義を書いて使用することができる．実際

$$a\equiv 0\Longrightarrow a^2\equiv 0,\quad a\equiv \pm 1\Longrightarrow a^2\equiv 1\pmod 3$$

したがって

$$\begin{aligned} a^2\equiv 0 &\Longleftrightarrow a\equiv 0 && \pmod 3\\ a^2+b^2\equiv 0 &\Longleftrightarrow a\equiv b\equiv 0 && \pmod 3 \end{aligned}$$

ゆえに，$a=3a_1$，$b=3b_1$ となる自然数 b_1，b_2 が存在するので，これを $a^2+b^2=3c^2$ に代入して整理すると

$$c^2=3({a_1}^2+{b_1}^2)\quad よって\quad c^2\equiv 0\Longleftrightarrow c\equiv 0\pmod 3$$

(3) 無限降下法によって証明できる．不定方程式 $a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数の組 $(a_1,\ b_1,\ c_2)$ が存在すると仮定すると，(2) の結果から，a_1，b_1，c_1 はすべて 3 で割り切れるので，$a_1=3a_2$，$b_1=3b_2$，$c_2=3c_2$ とおくと

$${a_2}^2+{b_2}^2={c_2}^2$$

となり，新しい自然数の組 $(a_2,\ b_2,\ c_2)$ が得られる．こうして，順次，小さい自然数の組が得られるが，このことは自然数の集合が下に有界であることに反する．

$\boxed{3}$ 数学 I：図形と計量 (正弦定理)，数学 A：平面図形 (三角形の重心)，
数学 II：三角関数 (加法定理)

(1) 正弦定理 (数学 I).

(2) 三角形の重心と外心 (数学 A)．平面のベクトル (数学 B) を用いてもよい.

(3) (1) の結果および加法定理 (数学 II) を利用する．また，△ABC を座標平面 (数学 II：図形と方程式) おいて証明することもできる．図形については，数学 I・A・II・B の各分野におけるそれぞれの特徴を活かしながら，横断的に処理する能力が要求される.

$\boxed{4}$ 数学 A：場合の数と確率 (期待値)

(1) 基本題．この分野は，文系と理系の共通問題として出題されることが多い.

(2) 確率は頻出問題である．扱う事象も多いのが特徴で，解答には表を作成するなど，工夫が必要である．本年度の問題は，例年に比べると取り組みやすい内容になっている.