令和６年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

問題 1 2 3 4

1 2 つの放物線

$$C_1 : y = 2x^2, \quad C_2 : y = 2x^2 - 8x + 16$$

の両方に接する直線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 座標平面上の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ を考える。点 B は第 1 象限にあり，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{10}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を求めよ。

(2) s, t を正の実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす点 C を考える。三角形 OAC と三角形 OBC の面積が等しく，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 4$ が成り立つとき，s，t の値を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 a, b が $a < b$ をみたすとき，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ が成り立つことを示せ。

(2) $2 \cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3) $a! + b! = 2 \cdot c!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

4 n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち，x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $L(3)$ を求めよ。

(2) $L(4)$ を求めよ。

(3) $L(5)$ を求めよ。

解答例

1 (1) $y=2x^2$ を微分すると　$y'=4x$

C_1 上の点 $(t,\ 2t^2)$ における接線の方程式は

$$y-2t^2=4t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=4tx-2t^2 \quad \cdots ①$$

C_2 と直線 ① の方程式から y を消去すると

$$2x^2-8x+16=4tx-2t^2$$

整理すると　$x^2-2(t+2)+t^2+8=0 \quad \cdots ②$

C_2 と直線 ① が接するから，② の係数について

$$D/4=(t+2)^2-(t^2+8)=4t-4=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=1$$

求める直線 ℓ の方程式は，$t=1$ を ① に代入して　$\boldsymbol{y=4x-2}$

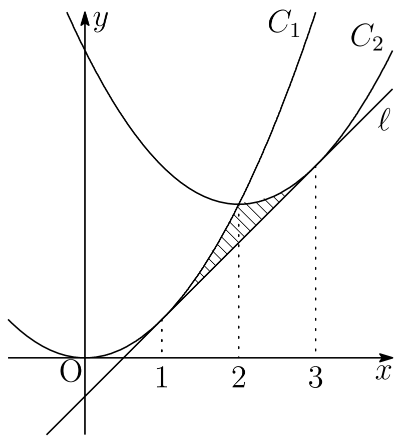
(2) $t=1$ より，C_1 と ℓ の接点の x 座標は　$x=1$

また，② の係数から，C_2 と ℓ の接点の x 座標は

$$x=-\frac{-2(t+2)}{2\cdot1}=t+2=1+2=3$$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_1^2\{2x^2-(4x-2)\}\,dx+\int_2^3\{(2x^2-8x+16)-(4x-2)\}\,dx\\&=\int_1^2 2(x-1)^2\,dx+\int_2^3 2(x-3)^2\,dx\\&=\frac{2}{3}\Big[\,(x-1)^3\,\Big]_1^2+\frac{2}{3}\Big[\,(x-3)^3\,\Big]_2^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=5$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 1)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{5}$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の偏角を α とすると

$$(2,\ 1)=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|(\cos\alpha,\ \sin\alpha)=(\sqrt{5}\cos\alpha,\ \sqrt{5}\sin\alpha)$$

点 B が第 1 象限の点であることから，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ とすると

$$\begin{aligned}
b_1&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{10}\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&=\sqrt{5}\cos\alpha-\sqrt{5}\sin\alpha=2-1=1,\\
b_2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{10}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&=\sqrt{5}\sin\alpha+\sqrt{5}\cos\alpha=1+2=3
\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{B(1,\ 3)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s(2,\ 1)+t(1,\ 3)=(2s+t,\ s+3t)$ より $(s,\ t>0)$

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{OAC}&=\frac{1}{2}|2\cdot(s+3t)-1\cdot(2s+t)|=\frac{5}{2}|t|=\frac{5}{2}t\\
\triangle\mathrm{OBC}&=\frac{1}{2}|1\cdot(s+3t)-3\cdot(2s+t)|=\frac{5}{2}|s|=\frac{5}{2}s
\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{OAC}=\triangle\mathrm{OBC}$ より，$s=t$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3s,\ 4s)$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=4$ より　$\sqrt{(3s)^2+(4s)^2}=5s=4$　よって　$\boldsymbol{s=t=\frac{4}{5}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $b > a$ のとき，$b-1 \geqq a$ であるから　$(b-1)! \geqq a!$

$$b! = b\cdot(b-1)! \geqq b\cdot a! \quad \text{よって} \quad \frac{b!}{a!} \geqq b$$

(2) $2\cdot a! = b!$ より $\dfrac{b!}{a!} = 2 > 1$ であるから

$$a! < b! \quad \text{すなわち} \quad a < b$$

$a < b$ より，(1) の結論を用いると

$$2 = \frac{b!}{a!} \geqq b > a \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 2)}$$

(3)　(i) $a \leqq c,\ b \leqq c$ のとき

$$\frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} = 2, \quad \frac{a!}{c!} \leqq 1, \quad \frac{b!}{c!} \leqq 1$$

このとき　$\dfrac{a!}{c!} = 1,\ \dfrac{b!}{c!} = 1$　すなわち　$a = c,\ b = c \quad \cdots(*)$

(ii) $a > c$ または $b > c$ のとき，一般性を失うことなく，$b > c$ とし，(1) の結論を用いると

$$2 = \frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} \geqq \frac{a!}{c!} + b > b > c \geqq 1$$

これをみたす $b,\ c$ は存在しない．

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (n,\ n,\ n)}$ **($\boldsymbol{n}$ は自然数)**　■

$\boxed{4}$ (1) 条件を満たす直線は，次の 8 本より　$\boldsymbol{L(3) = 8}$

$$y = x,\quad y = -x + 4,\quad x = k,\quad y = k\ (k = 1, 2, 3)$$

(2) 条件を満たす直線は，次の 14 本より　$\boldsymbol{L(4) = 14}$

$$\begin{aligned}&y = x - 1,\quad y = x,\quad y = x + 1,\\ &y = -x + 4,\quad y = -x + 5,\quad y = -x + 6,\\ &x = k,\quad y = k\quad (k = 1, 2, 3, 4)\end{aligned}$$

(3) 条件を満たす直線で傾きが 0 以上の直線は，(i)〜(iv) の 16 本ある．

(i) 条件を満たす x 軸に平行な直線は　$y = k\ (k = 1, 2, 3, 4, 5)$

(ii) 条件を満たす傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線は　$y - k = \dfrac{x - 1}{2}\ (k = 1, 2, 3)$

(iii) 条件を満たす傾き 1 の直線は　$y = x + k\ (k = 0, \pm 1, \pm 2)$

(iv) 条件を満たす傾き 2 の直線は　$y - 1 = 2(x - k)\ (k = 1, 2, 3)$

(i)〜(iv) の直線を点 (3, 3) を中心に 90° 回転させた直線も条件を満たす．

よって　　$L(5) = 16 \times 2 = \mathbf{32}$　■