令和５年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

問題 1 2 3 4

1 a を $0 < a < 9$ を満たす実数とする。xy 平面上の曲線 C と直線 ℓ を，次のように定める。

$$C : y = |(x-3)(x+3)|, \quad \ell : y = a$$

曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形のうち，$y \geqq a$ の領域にある部分の面積を S_1，$y \leqq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。$S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

2 xy 平面上の曲線 $C : y = x^3 - x$ を考える。実数 $t > 0$ に対して，曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3 - t)$ における接線を ℓ とする。直線 ℓ と直線 $y = -x$ の交点を B，三角形 OAB の外接円の中心を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を t を用いて表せ。

(2) $\theta = \angle\mathrm{OBA}$ とする。$\sin^2\theta$ を t を用いて表せ。

(3) $f(t) = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}$ とする。$t > 0$ のとき，$f(t)$ を最小にする t の値と $f(t)$ の最小値を求めよ。

3 点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a,\ c), \quad \vec{n} = (b,\ d)$$

に対して，$D = ad - bc$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるための必要十分条件は $D = 0$ であることを示せ。以下，$D \neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル $\vec{v}$，$\vec{w}$ で

$$\vec{m}\cdot\vec{v} = \vec{n}\cdot\vec{w} = 1, \quad \vec{m}\cdot\vec{w} = \vec{n}\cdot\vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) 座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して

$$r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$$

を満たす実数 r と s を $\vec{q}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ を用いて表せ。

4 ω を $x^3=1$ の虚数解のうち虚部が正であるものとする。さいころを繰り返し投げて，次の規則で 4 つの複素数 $0,\ 1,\ \omega,\ \omega^2$ を並べていくことにより，複素数の列 $z_1,\ z_2,\ z_3, \cdots$ を定める。

- $z_1=0$ とする。
- z_k まで定まったとき，さいころを投げて，出た目を t とする。このとき z_{k+1} を以下のように定める。
  - $z_k=0$ のとき，$z_{k+1}=\omega^t$ とする。
  - $z_k \neq 0$，$t=1,\ 2$ のとき，$z_{k+1}=0$ とする。
  - $z_k \neq 0$，$t=3$ のとき，$z_{k+1}=\omega z_k$ とする。
  - $z_k \neq 0$，$t=4$ のとき，$z_{k+1}=\overline{\omega z_k}$ とする。
  - $z_k \neq 0$，$t=5$ のとき，$z_{k+1}=z_k$ とする。
  - $z_k \neq 0$，$t=6$ のとき，$z_{k+1}=\overline{z_k}$ とする。

ここで複素数 z に対し，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。以下の問いに答えよ。

(1) $w^2=\overline{\omega}$ となることを示せ。

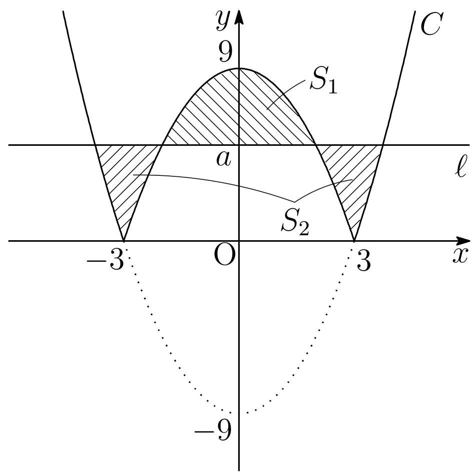
(2) $z_n=0$ となる確率を n の式で表せ。

(3) $z_3=1,\ z_3=\omega,\ z_3=\omega^2$ となる確率をそれぞれ求めよ.

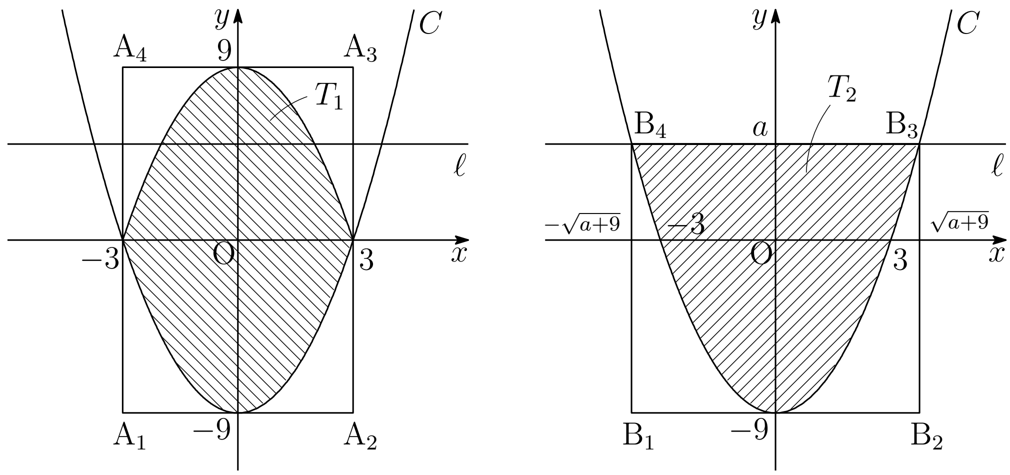
(4) $z_n=1$ となる確率を n の式で表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ S_1, S_2 は下の図の斜線部分の面積である．



$S_1=S_2$ のとき，下の 2 つ図の斜線部分の面積 T_1, T_2 について，$T_1=T_2$ である．



T_1, T_2 は，それぞれ図の長方形 $A_1A_2A_3A_4$，$B_1B_2B_3B_4$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ であるから，このとき，これら 2 つの長方形の面積は等しい．

$$6\times 18=2\sqrt{a+9}\times(a+9) \quad \text{ゆえに} \quad (a+9)^{\frac{3}{2}}=2\cdot 3^3$$

したがって　$a+9=2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^2$　　よって　$\boldsymbol{a=9(\sqrt[3]{4}-1)}$

補足 下の fig-1 について，2 つの面積 S_1 と S_2 の面積比を考える．

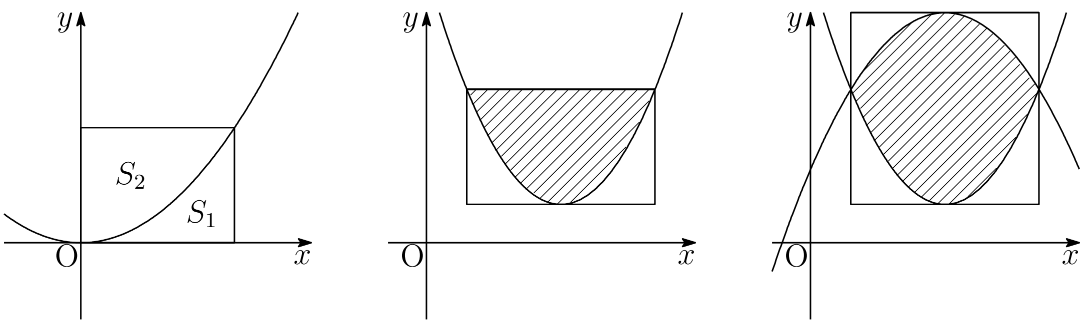


fig-1　　fig-2　　fig-3

S_1 を放物線 $y = kx^2$ と直線 $x = a$ と x 軸で囲まれた部分の面積とすると

$$S_1 = \int_0^a kx^2\,dx = k\left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_0^a = \frac{1}{3}ka^3 \qquad (k, a > 0)$$

$S_1 + S_2$ は x 軸，y 軸，直線 $x = a$，直線 $y = ka^2$ で囲まれた部分の面積であるから

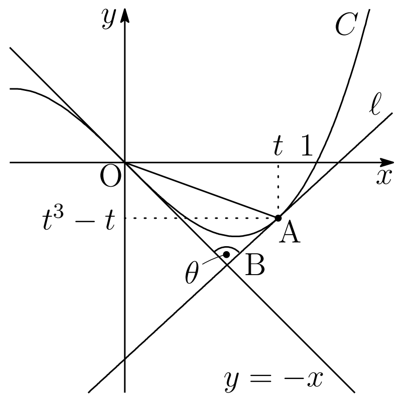
$$S_1 + S_2 = a\cdot ka^2 = ka^3 \quad \text{上の結果から} \quad S_2 = \frac{2}{3}ka^3 \quad \text{よって} \quad S_1 : S_2 = 1 : 2$$

fig-2 の放物線は fig-1 の放物線を平行移動したものとする．fig-2 の放物線の軸に関する対称性により，斜線部の面積は長方形の面積の 2/3 であることがわかる．

さらに，fig-2 の面積比を利用すると，fig-3 における斜線部分の面積も長方形の面積の 2/3 であることもわかる．■

$\boxed{2}$ (1) $y = x^3 - x$ より　$y' = 3x^2 - 1$

C 上の点 A$(t,\ t^3 - t)$ における接線 ℓ は



$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

すなわち　$y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$

これと $y = -x$ から y を消去すると

$$(3t^2 - 1)x - 2t^3 = -x$$

整理すると　　$t^2(3x - 2t) = 0$

$t > 0$ であるから　$3x - 2t = 0$　ゆえに　$x = \dfrac{2t}{3}$

これを $y = -x$ に代入して　　$\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\dfrac{2t}{3}}, \boldsymbol{-\dfrac{2t}{3}}\right)$

(2) 直線 ℓ の偏角を α，直線 $y = -x$ の偏角を β とすると

$$\tan\alpha = 3t^2 - 1,\quad \tan\beta = -1,\quad \theta = \frac{3}{4}\pi - \alpha$$

ゆえに　　$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$

$$= \frac{-1 - (3t^2 - 1)}{1 + (-1)\cdot(3t^2 - 1)} = \frac{3t^2}{3t^2 - 2}$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^2 = 1 + \left(\frac{3t^2 - 2}{3t^2}\right)^2 = \frac{18t^4 - 12t^2 + 4}{9t^4} \qquad (*)$$

したがって　　$\boldsymbol{\sin^2\theta = \dfrac{9t^4}{18t^4 - 12t^2 + 4}}$

(3) 点 P は △OAB の外心であるから，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{OA}}{\sin\theta} = 2\mathrm{OP}\quad \text{ゆえに}\quad f(t) = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} = \frac{1}{2\sin\theta} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より，$u = \dfrac{2}{t^2}$ とおくと $(u > 0)$

$$f(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{18 - 6\cdot\frac{2}{t^2} + \left(\frac{2}{t^2}\right)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{18 - 6u + u^2} = \frac{1}{6}\sqrt{(u-3)^2 + 9}$$

$u = 3$　すなわち　$\boldsymbol{t = \sqrt{\dfrac{2}{3}}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{m} = (a,\ c)$，$\overrightarrow{n} = (b,\ d)$ より $(\overrightarrow{m} \neq \overrightarrow{0},\ \overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0})$

$$\begin{cases} d\overrightarrow{m} - c\overrightarrow{n} = (ad - bc,\ 0) = (D,\ 0) \\ -b\overrightarrow{m} + a\overrightarrow{n} = (0,\ ad - bc) = (0,\ D) \end{cases} \qquad (*)$$

$(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) = (ab + cd)^2 + (ad - bc)^2$ より

$$|\overrightarrow{m}|^2|\overrightarrow{n}|^2 = (\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n})^2 + D^2 \qquad (**)$$

(i) $D = 0$ のとき，$(*)$ より

$$d\overrightarrow{m} = c\overrightarrow{n},\quad b\overrightarrow{m} = a\overrightarrow{n} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{m}/\!/\overrightarrow{n}$$

(ii) $\overrightarrow{m}/\!/\overrightarrow{n}$ のとき，$|\overrightarrow{m}|^2|\overrightarrow{n}|^2 = (\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n})^2$ であるから，$(**)$ より

$$D = 0$$

(i)，(ii) より　$D = 0 \iff \overrightarrow{m}/\!/\overrightarrow{n}$　［証終］

(2) $D \neq 0$ のとき，基本ベクトル $\overrightarrow{e_1} = (1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2} = (0,\ 1)$ は，$(*)$ より

$$\overrightarrow{e_1} = (1,\ 0) = \frac{d\overrightarrow{m} - c\overrightarrow{n}}{D},\quad \overrightarrow{e_2} = (0,\ 1) = \frac{-b\overrightarrow{m} + a\overrightarrow{n}}{D} \qquad (\#)$$

と表される．
$(\#)$ の基本ベクトルと $\overrightarrow{v}$ の内積をとると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{v} &= \frac{(d\overrightarrow{m} - c\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{v}}{D} = \frac{d\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v} - c\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}}{D} = \frac{d}{D} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{v} &= \frac{(-b\overrightarrow{m} + a\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{v}}{D} = \frac{-b\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v} + a\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}}{D} = -\frac{b}{D} \end{aligned}$$

よって　$\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2} = \boldsymbol{\frac{1}{D}(d,\ -b)}$

同様に，$(\#)$ の基本ベクトルと $\overrightarrow{w}$ の内積をとると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{w} &= \frac{(d\overrightarrow{m} - c\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{w}}{D} = \frac{d\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w} - c\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}}{D} = -\frac{c}{D} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{w} &= \frac{(-b\overrightarrow{m} + a\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{w}}{D} = \frac{-b\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w} + a\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w}}{D} = \frac{a}{D} \end{aligned}$$

よって　$\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2} = \boldsymbol{\frac{1}{D}(-c,\ a)}$

(3) ベクトル $\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ が

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w} = 1, \quad \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 0$$

を満たすことを利用して，内積 $\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{w}$ を求めると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{v} &= (r\overrightarrow{m} + s\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{v}\\ &= r\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{v} + s\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = r,\\ \overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{w} &= (r\overrightarrow{m} + s\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{w}\\ &= r\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{w} + s\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{w} = s\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{r = \overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{v}, \quad s = \overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{w}}$ ■

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $x^3 = 1$ より，$(x-1)(x^2+x+1) = 0$ を解くと

$$x = 1, \ \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

ω は方程式 $x^3 = 1$ の解で虚部が正であるから

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \quad \overline{\omega} = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

$\omega^3 = 1, \ \omega\overline{\omega} = 1$ であるから

$$\overline{\omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$$

(2) $z_n=0,\ z_n=1,\ z_n=\omega,\ z_n=\omega^2$ となる確率をそれぞれ $p_n,\ q_n,\ r_n,\ s_n$ とおくと，初期条件から，$p_1=1,\ q_1=r_1=s_1=0$ となる．

また，さいころの出た目による z_n から z_{n+1} の推移は次のようになる．

	$z_n=0$	$z_n=1$	$z_n=\omega$	$z_n=\omega^2$
1	ω	0	0	0
2	ω^2	0	0	0
3	1	ω	ω^2	1
4	ω	ω^2	ω	1
5	ω^2	1	ω	ω^2
6	1	1	ω^2	ω

したがって，次の確率漸化式が成立する．

$$(*)\begin{cases} p_{n+1}= \phantom{\frac{1}{3}p_n+}\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3}r_n+\frac{1}{3}s_n \\ q_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\phantom{+\frac{1}{3}r_n}+\frac{1}{3}s_n \\ r_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{3}r_n+\frac{1}{6}s_n \\ s_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{3}r_n+\frac{1}{6}s_n \end{cases}$$

$(*)$ の第 3 式と第 4 式から　$r_{n+1}=s_{n+1}$

また，$r_1=s_1=0$ より　　$r_n=s_n\ \ (n\geqq 1)$

$s_n=r_n$ を $(*)$ の第 2 式と第 3 式に代入すると

$$q_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3}r_n,\quad r_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{2}r_n$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$q_{n+1}-r_{n+1}=\frac{1}{6}(q_n-r_n)$$

$q_1=r_1=0$ であるから　$q_n=r_n\ \ (n\geqq 0)$

$q_n=r_n=s_n$ であるから，$(*)$ の第 1 式および第 2 式において，

$r_n=q_n,\ s_n=q_n$ を代入して整理すると

$$(**)\begin{cases} p_{n+1}=q_n \\ q_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}q_n \end{cases}$$

$(**)$ の 2 式から

$$p_{n+1} - q_{n+1} = -\frac{1}{3}(p_n - q_n),$$
$$p_{n+1} + 3q_{n+1} = p_n + 3q_n$$

$p_1 = 1,\ q_1 = 0$ より

$$p_n - q_n = (p_1 - q_1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$
$$p_n + 3q_n = p_1 + 3q_1 = 1$$

上の 2 式および $q_n = r_n = s_n$ から

$$p_n = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}, \quad q_n = r_n = s_n = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \qquad (\#)$$

$z_n = 0$ となる確率 p_n は $\qquad \boldsymbol{p_n = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}}$

(3) $z_3 = 1,\ z_3 = \omega,\ z_3 = \omega^2$ となる確率は，それぞれ $q_3,\ r_3,\ s_3$ であるから，$(\#)$ より

$$q_3 = r_3 = s_3 = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right\} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(4) $z_n = 1$ となる確率は q_n であるから，$(\#)$ より

$$\boldsymbol{q_n = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$$

■