令和４年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

問題 1 2 3 4

1 a を $-3 < a < 13$ をみたす実数とし，次の曲線 C と直線 ℓ が接しているとする。

$$C : y = |x^2 + (3-a)x - 3a|, \quad \ell : y = -x + 13$$

以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの図形のうち，点 $(a,\ 0)$ が境界線上にある図形の面積を求めよ。

2 座標空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 1,\ 2),\ \mathrm{P}(4,\ 0,\ -1)$$

を考える。3 点 O，A，B を通る平面を α とし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり，x 成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2) 点 P から平面 α に垂線を下ろし，その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを求めよ。

(3) 平面 α に関して点 P と対称な点 P$'$ の座標を求めよ。

3 k を実数とし，整式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64$$

で定める。方程式 $f(x) = 0$ が虚数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $x - 2$ で割り切れることを示せ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は負の実数解をもつことを示せ。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ のすべての実数解が整数であり，すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような k をすべて求めよ。

4 定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

$f(x)$ を整式とする。$F'(x)=f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \qquad \cdots ①$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A)，(B)，(C) をもつ。

(A) $\displaystyle\int_a^b \{kf(x)+lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$

(B) $a \leqq c \leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

(C) 区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x) \geqq h(x)$ ならば，

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqq \int_a^b h(x)\,dx$$

ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は整式，k，l は定数である。

以下，$f(x)$ が区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上で増加関数になる場合を考える。n を自然数とする。定積分の性質 $\boxed{\text{ア}}$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad \cdots ②$$

が成り立つことがわかる。$S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと，不等式 ② と定積分の性質 $\boxed{\text{イ}}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leqq \int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1)-f(0)}{n} \qquad \cdots ③$$

よって，n を限りなく大きくすると，S_n は $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ に限りなく近づく。

(1) 関数 $F(x)$，$G(x)$ が微分可能であるとき，

$$\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x)$$

が成り立つことと定積分の定義 ① を用いて，定積分の性質 (A) で $k=l=1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

を示せ。

(2) 定積分の定義 ① と，関数の増減と導関数の関係を用いて，次を示せ。

$a<b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x)>0$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$

(3) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\quad ア \quad}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式 ② を示せ。

(4) (A)，(B)，(C) のうち，空欄 $\boxed{\quad イ \quad}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また，不等式 ③ を示せ。

解答例

1 (1) 曲線 $C : y = |x^2+(3-a)x-3a| = |(x+3)(x-a)|$ $(-3 < a < 13)$ および直線 $\ell : y = -x+13$ が接するとき，C と ℓ の x 軸との交点の x 座標に注目すると，C と ℓ の接点の x 座標は区間 $-3 < a < 13$ にあるから

$$-\{x^2+(3-a)x-3a\} = -x+13$$

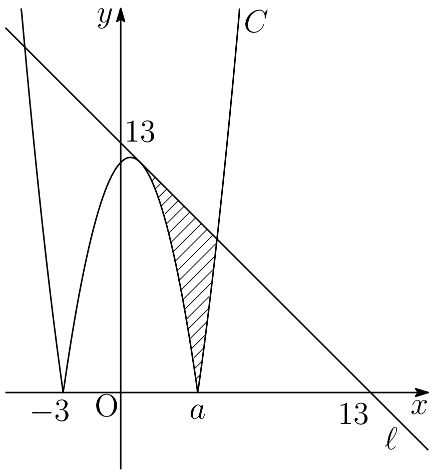
したがって　$x^2+(2-a)x+13-3a = 0 \quad \cdots(*)$

このとき，係数について

$$D = (2-a)^2 - 4{\cdot}1(13-3a) = 0, \quad -3 < -\frac{2-a}{2} < a$$

それぞれ整理すると　$(a+12)(a-4) = 0, \quad -2 < a$

$-3 < a < 13$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{a = 4}$



(2) 接点の x 座標は，(1) の結果から　$-\dfrac{2-a}{2} = -\dfrac{2-4}{2} = 1$

$x > 4$ における C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x^2-x-12 = -x+13 \quad x \text{ の範囲に注意して解くと} \quad x = 5$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 \{(-x+13) - |(x+3)(x-4)|\}\,dx \\ &= \int_1^4 (x-1)^2\,dx + \int_4^5 (-x^2+25)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^4 + \left[-\frac{1}{3}x^3+25x\right]_4^5 = \boldsymbol{\frac{41}{3}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 1,\ 2)$

$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ であるから

$$x+y=0,\quad 2x+y+2z=0 \quad \text{ゆえに} \quad y=-x,\quad z=-\frac{1}{2}x$$

$\vec{n}=\left(x, -x, -\dfrac{1}{2}x\right)$，$|\vec{n}|^2=1$ であるから

$$x^2+x^2+\frac{1}{4}x^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad 9x^2=4$$

$x>0$ に注意して　$x=\dfrac{2}{3}$　よって　$\boldsymbol{\vec{n}=\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{n}$ とし，P から直線 ON に引いた垂線の交点を T とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OT}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n})\vec{n} \tag{$*$}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 0, -1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{n}=3$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(2, -2, -1),\quad |\overrightarrow{\mathrm{OT}}|=3 \tag{$**$}$$

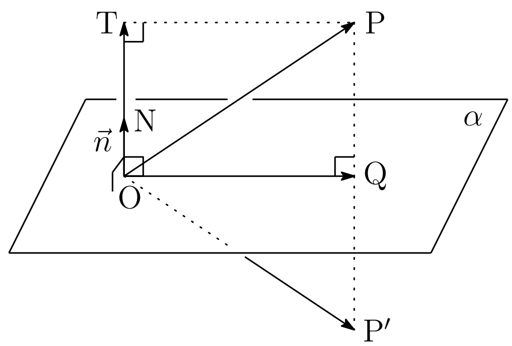
$\mathrm{PQ}=|\overrightarrow{\mathrm{OT}}|$ であるから　$\mathbf{PQ=3}$

(3) $(*)$ の第 1 式と $(**)$ の第 1 式により，

$$(4,\ 0, -1)=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(2, -2, -1) \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2,\ 2,\ 0)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(-\overrightarrow{\mathrm{OT}})=(0,\ 4,\ 1) \quad \text{よって} \quad \mathbf{P'(0,\ 4,\ 1)}$$



■

3 (1) $f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64$ について

$$f(2) = 2^4 + 6{\cdot}2^3 - k{\cdot}2^2 + 2k{\cdot}2 - 64 = 0$$

因数定理により，$f(x)$ は $x-2$ を因数にもつ，すなわち，$f(x)$ は $x-2$ で割り切れる．

(2) (1) の結果から

$$f(x) = (x-2)\{x^3 + 8x^2 + (16-k)x + 32\}$$

条件から，3 次方程式 $x^3 + 8x^2 + (16-k)x + 32 = 0$ の解を $\alpha,\ \overline{\alpha},\ r$ とおくと，解と係数の関係から

$$\alpha\overline{\alpha}r = -32 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^2 r = -32$$

したがって，r は負の実数．よって，$f(x) = 0$ は負の実数解をもつ．

(3) $\alpha = p + qi,\ \overline{\alpha} = p - qi$ とおく．条件から，$p,\ q,\ r$ は整数であり，解と係数の関係から

$$\begin{aligned}(p+qi) + (p-qi) + r &= -8,\\ (p+qi)(p-qi) + (p+qi)r + (p-qi)r &= 16-k,\\ (p+qi)(p-qi)r &= -32\end{aligned}$$

これらをそれぞれ整理すると

$$2p + r = -8, \quad p^2 + q^2 + 2pr = 16 - k, \quad (p^2+q^2)r = -32 \qquad (*)$$

$(*)$ の第 1 式から，$r = -2p - 8 \cdots$ ①．これを $(*)$ の第 3 式に代入すると

$$(p^2+q^2)(p+4) = 16$$

上式において $p + 4 \geqq 1$ ($p+4$ は 16 の約数)，$p^2 < p^2 + q^2 \leqq 16$ より

$$p = -3, -2,\ 0$$

$p = -3$ のとき，$9 + q^2 = 16$ より，$q^2 = 7$ となり，不適
$p = -2$ のとき，$(4+q^2){\cdot}2 = 16$ より，$q = 2$
$p = 0$ のとき，$4q^2 = 16$ より，$q = 2$

① より　$(p,\ q,\ r) = (-2,\ 2, -4),\ (0,\ 2, -8)$

$(*)$ の第 2 式より，$k = 16 - (p^2 + q^2 + 2pr)$ であるから　$\boldsymbol{k = -8,\ 12}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $F'(x) = f(x)$，$G'(x) = g(x)$ を満たす $F(x)$，$G(x)$ をとり，

$$H(x) = F(x) + G(x), \quad h(x) = H'(x)$$

とすると，次式が成立する．

$$h(x) = H'(x) = \{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

上式および定積分の定義 ① により

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx &= \int_a^b h(x)\,dx = \Big[\ H(x)\ \Big]_a^b = H(b) - H(a) \\ &= F(b) + G(b) - \{F(a) + G(a)\} \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

(2) $G'(x) = g(x)$ を満たす $G(x)$ をとると，定積分の定義により

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

区間 $a \leqq x \leqq b$ において $G'(x) = g(x) > 0$ より，関数 $G(x)$ はこの区間で増加するから

$$G(a) < G(b) \quad \text{ゆえに} \quad G(b) - G(a) > 0$$

以上の結果から

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0$$

(3) 答 **(C)**

$f(x)$ は，区間 $\dfrac{i-1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{i}{n}$ で連続な増加関数であるから $(i=1,2,\cdots,n)$

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq f(x) \leqq f\left(\frac{i}{n}\right)$$

性質 (C) により

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i-1}{n}\right) dx \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i}{n}\right) dx \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

したがって

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \leqq \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(4) 答 **(B)**

S_n の定義により

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1) - \frac{1}{n}f(0)\\ &= S_n + \frac{f(1)-f(0)}{n}\end{aligned}$$

上式に注意すると，② より

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx &\leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\\ S_n \leqq \int_0^1 f(x)\,dx &\leqq S_n + \frac{f(1)-f(0)}{n}\end{aligned}$$

よって　　$0 \leqq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leqq \frac{f(1)-f(0)}{n}$ ■