令和３年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

$\boxed{1}$ 座標平面上の 3 点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(0, 2) を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 三角形 OAB に内接する円の中心の座標を求めよ。

(2) 中心が第 1 象限にあり，x 軸と y 軸の両方に接し，直線 AB と異なる 2 つの交点をもつような円を考える。この 2 つの交点を P，Q とするとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 次の条件 A をみたす座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を図示せよ。

条件 A：すべての実数 t に対して $y \geqq xt - 2t^2$ が成立する。

(2) 次の条件 B をみたす座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を図示せよ。

条件 B：$|t| \leqq 1$ をみたすすべての実数 t に対して
$y \geqq xt - 2t^2$ が成立する。

$\boxed{3}$ a を正の実数とし，放物線

$$C : y = -x^2 - 2ax - a^3 + 10a$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と直線 $\ell : y = 8x + 6$ が接するような a の値を求めよ。

(2) a が (1) で求めた値のとき，放物線 C，直線 ℓ，y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$$

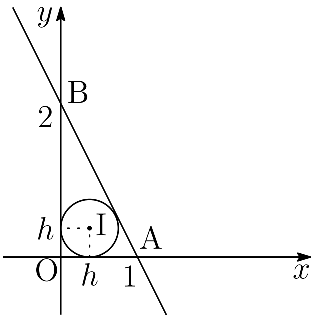
を求めよ。

(2) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) △OAB の内心を $\mathrm{I}(h,\ h)$ とし $(h>0)$，△OAB の周の長さを ℓ とすると



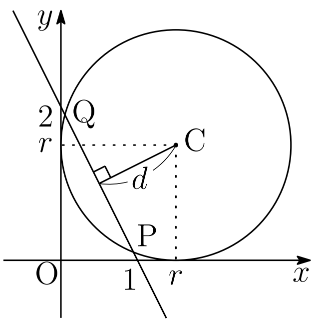
$$\ell = 1+2+\sqrt{1^2+2^2} = 3+\sqrt{5}$$

$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\ell h$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})h$$

これを解いて　$h = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　よって　$\mathrm{I}\left(\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)$

(2) 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ を通る直線は



$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1 \quad \text{すなわち} \quad 2x+y-2=0$$

中心が第 1 象限で，x 軸と y 軸の両方に接する円の半径を r，中心を $\mathrm{C}(r,\ r)$，C から直線 AB までの距離を d とすると

$$d = \frac{|2r+r-2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|3r-2|}{\sqrt{5}}$$

この円と直線 AB が 2 つの交点 P，Q をもつとき，$d<r$ であるから

$$\frac{|3r-2|}{\sqrt{5}} < r \quad \text{整理すると} \quad r^2-3r+1<0$$

これを解いて　$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < r < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　$\cdots$①

したがって

$$\left(\frac{\mathrm{PQ}}{2}\right)^2 = r^2-d^2 = r^2-\left(\frac{|3r-2|}{\sqrt{5}}\right)^2$$
$$= -\frac{4}{5}r^2+\frac{12}{5}r-\frac{4}{5}$$
$$= -\frac{4}{5}\left(r-\frac{3}{2}\right)^2+1$$

① および上式より　$\left(\dfrac{\mathrm{PQ}}{2}\right)^2 \leqq 1$　ゆえに　$\mathrm{PQ} \leqq 2$

よって，線分 PQ の長さの最大値は　**2**

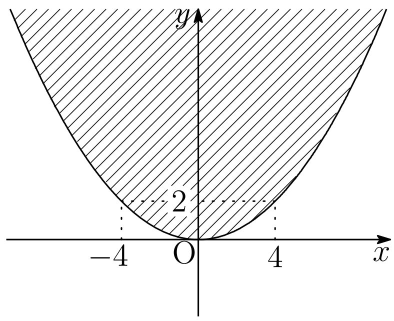
2 (1) $y \geqq xt - 2t^2$ より　$2t^2 - xt + y \geqq 0$

$f(t) = 2t^2 - xt + y$ とおくと

$$(*)\quad f(t) = 2\left(t - \frac{x}{4}\right)^2 - \frac{x^2}{8} + y$$

すべての実数 t に対して，$f(t) \geqq 0$ より

$$-\frac{x^2}{8} + y \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad y \geqq \frac{x^2}{8}$$



よって，求める領域は右上の図の斜線部分で境界線を含む．

(2) (1) と同様に，$|t| \leqq 1$ に対して　$f(t) \geqq 0$

$(*)$ より，次をみたせばよい．

(i) $\dfrac{x}{4} < -1$，すなわち，$x < -4$ のとき　$f(-1) \geqq 0$

$$f(-1) = 2 + x + y \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \geqq -x - 2$$

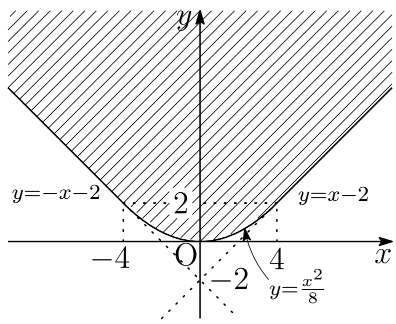
(ii) $-1 \leqq \dfrac{x}{4} \leqq 1$ のとき　$f\left(\dfrac{x}{4}\right) \geqq 0$

$$f\left(\frac{x}{4}\right) = -\frac{x^2}{8} + y \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \geqq \frac{x^2}{8}$$

(iii) $1 < \dfrac{x}{4}$，すなわち，$4 < x$ のとき　$f(1) \geqq 0$

$$f(1) = 2 - x + y \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \geqq x - 2$$

(i)〜(iii) より，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 放物線 $C : y = -x^2 - 2ax - a^3 + 10a$ と直線 $\ell : y = 8x + 6$ の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2 + 2(a+4)x + a^3 - 10a + 6 = 0 \qquad (*)$$

C と ℓ が接するから，上の 2 次方程式の係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= (a+4)^2 - (a^3 - 10a + 6) \\ &= -a^3 + a^2 + 18a + 10 \\ &= -(a-5)(a^2 + 4a + 2) = 0 \end{aligned}$$

$a > 0$ より，$a^2 + 4a + 2 > 0$ に注意して　　$\boldsymbol{a = 5}$

(2) $a = 5$ のとき，2 次方程式 $(*)$ は

$$x^2 + 18x + 81 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+9)^2 = 0$$

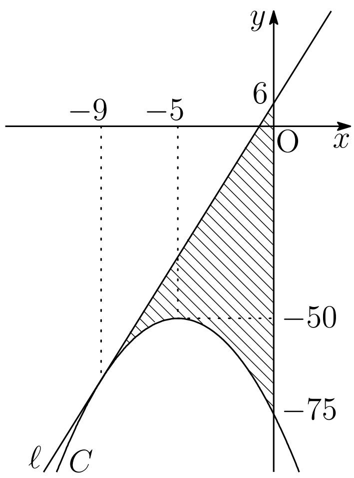
したがって，C と ℓ の接点の x 座標は

$$x = -9$$

$$(8x + 6) - (-x^2 - 2ax - a^3 + 10a) = (x+9)^2$$

であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-9}^{0} (x+9)^2\, dx \\ &= \frac{1}{3}\Big[\, (x+9)^3 \,\Big]_{-9}^{0} = \mathbf{243} \end{aligned}$$



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x_n=\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}$ とおくと，$x_n=\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)2^{k-2}$ より

$$\begin{aligned}2x_n&=\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)2^{k-1}=\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)2^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}(k-1)2^{k-1}+n2^n\\&=\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}+n2^n\\&=x_n-\frac{2^n-1}{2-1}+n2^n\end{aligned}$$

よって　$x_n=\boldsymbol{(n-1)2^n+1}$

(2) $a_1=2,\quad a_{n+1}=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k\quad(n=1,2,3,\cdots)$

$$a_2=1+\frac{1}{2}a_1=1+\frac{1}{2}\cdot2=2$$

$$\begin{aligned}a_{n+2}-a_{n+1}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}(n+2-k)a_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k\\&=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k\end{aligned}$$

整理すると　$2a_{n+2}-3a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とすると　$S_1=a_1=2,\ S_2=a_1+a_2=4$

$$\begin{aligned}2(S_{n+2}-S_{n+1})-3(S_{n+1}-S_n)&=S_n\\S_{n+2}-2S_{n+1}&=\frac{1}{2}(S_{n+1}-2S_n)\end{aligned}$$

$S_2-2S_1=4-2\cdot2=0$ より

$$S_{n+1}-2S_n=0\quad ゆえに\quad S_n=S_12^{n-1}=2^n$$

したがって

$$a_n=\begin{cases}S_1&(n=1)\\S_n-S_{n-1}&(n\geqq2)\end{cases}\quad よって\quad \boldsymbol{a_n=\begin{cases}2&(n=1)\\2^{n-1}&(n\geqq2)\end{cases}}$$

補足 $S_1=2,\ S_2=4,\ 2S_{n+2}-5S_{n+1}+2S_n=0$

漸化式の特性方程式は

$$2x^2-5x+2=0 \quad これを解いて \quad x=2,\ \frac{1}{2}$$

したがって，$\{S_n\}$ は定数 $p,\ q$ を用いて

$$S_n=p2^n+q\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

とおける．このとき

$$2p+\frac{q}{2}=2, \quad 4p+\frac{q}{4}=4 \quad これを解いて \quad p=1,\ q=0$$

したがって　$S_n=2^n$　(以下同様)

別解 $a_1=2, \quad a_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k \quad (n=1,2,3,\cdots)$

$$a_2=1+\frac{1}{2}a_1=1+\frac{1}{2}\cdot 2=2$$
$$a_3=1+\frac{1}{2}(2a_1+a_2)=1+\frac{1}{2}(2\cdot 2+2)=4$$
$$a_4=1+\frac{1}{2}(3a_1+2a_2+a_3)=1+\frac{1}{2}(3\cdot 2+2\cdot 2+4)=8$$

これから，$\{a_n\}$ を次のように推測する．

$$n \geqq 2 \text{ のとき} \quad a_n=2^{n-1} \quad \cdots(*)$$

［1］$n=2$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］$2 \leqq n \leqq j$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} a_{j+1}&=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j}(j+1-k)a_k \\ &=1+\frac{1}{2}(j+1)\sum_{k=1}^{j}a_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{j}ka_k \end{aligned}$$

$a_1=2$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{j}a_k=2^j,\ \sum_{k=1}^{j}ka_k=(j-1)2^j+2$ であるから

$$a_{j+1}=1+\frac{1}{2}(j+1)2^j-\frac{1}{2}\{(j-1)2^j+2\}=2^j$$

よって，$2 \leqq n \leqq j+1$ のときも，$(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，$(*)$ が成立する．よって，$\boldsymbol{a_1=2,\ a_n=2^{n-1}\ (n \geqq 2)}$