令和２年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

問題 1 2 3 4

1 $a \geqq 0$ とする。2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) a が (1) で求めた範囲を動くとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S の最大値を求めよ。

2 座標空間内の 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ p)$，C$(q,\ r,\ s)$ を頂点とする四面体が正四面体であるとする。ただし，$p > 0$，$s > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) p，q，r，s の値を求めよ。

(2) z 軸に垂直な平面で正四面体 OABC を切ったときの断面積の最大値を求めよ。

3 a，b，c を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a，b を c を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を 7 で割ると 4 余り，$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るとする。c の絶対値が 40 以下であるとき，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

4 4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

解答例

1 (1) $f(x)=x^2$，$g(x)=3(x-a)^2+a^3-40$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= x^2-\{3(x-a)^2+a^3-40\} \\ &= -(2x^2-6ax+a^3+3a^2-40) \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

2 次方程式

$$2x^2-6ax+a^3+3a^2-40=0 \quad \cdots(**)$$

の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-3a)^2-2(a^3+3a^2-40) \\ &= -2a^3+3a^2+80=(4-a)(2a^2+5a+20) \\ &= (4-a)\left\{2\left(a+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{135}{8}\right\} \end{aligned}$$

方程式 $(**)$ が異なる 2 つの実数解をもつから，$D>0$ より

$a \geqq 0$ に注意して，$4-a>0$ を解くと　$\boldsymbol{0 \leqq a < 4}$

(2) 2 次方程式 $(**)$ の解を α, β とおくと $(\alpha<\beta)$

$$\beta-\alpha=\frac{3a+\sqrt{D/4}}{2}-\frac{3a-\sqrt{D/4}}{2}=\sqrt{D/4}$$

$$f(x)-g(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)$$

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$f(x)-g(x) \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx=-2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\{D/4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$h(a)=D/4$ とおくと　$S=\dfrac{1}{3}\{h(a)\}^{\frac{3}{2}}$

$h(a)=-2a^3+3a^2+80$ より　$h'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$h'(a)$		$+$	0	$-$	
$h(a)$		$\nearrow$	81	$\searrow$	

よって，求める S の最大値は　$\dfrac{1}{3}\{h(1)\}^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}\cdot 81^{\frac{3}{2}}=\mathbf{243}$ ■

2 (1) 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(1, 0, p)，C(q, r, s) について，
$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OA}$ であるから

$$\sqrt{1^2+p^2}=\sqrt{2}\quad \text{条件 } p>0 \text{ により}\quad p=1$$

$\mathrm{OC}^2=\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2=2$ であるから

$$(*)\begin{cases} q^2+r^2+s^2=2 \\ (q-1)^2+(r-1)^2+s^2=2 \\ (q-1)^2+r^2+(s-1)^2=2 \end{cases}$$

$(*)$ の第 2 式，第 3 式をそれぞれ整理すると

$$(q^2+r^2+s^2-2)-2(q+r-1)=0,$$
$$(q^2+r^2+s^2-2)-2(q+s-1)=0$$

$(*)$ の第 1 式を上の 2 式に代入することにより

$$\begin{cases} q+r-1=0 \\ q+s-1=0 \end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad (**)\begin{cases} q=1-s \\ r=s \end{cases}$$

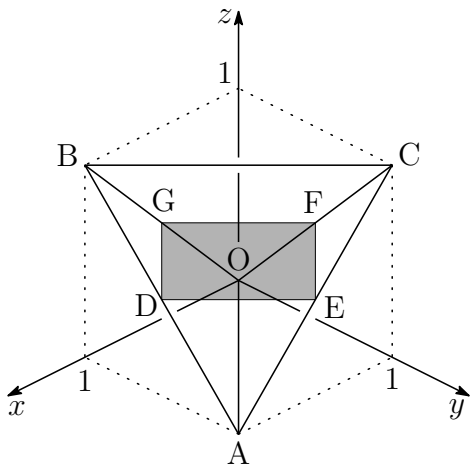
$(**)$ を $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$(1-s)^2+s^2+s^2=2\quad \text{ゆえに}\quad (s-1)(3s+1)=0$$

$s>0$ に注意して　$s=1$　$(**)$ より　$q=0,\ r=1$

よって　　$\boldsymbol{p=1,\ q=0,\ r=1,\ s=1}$

(2) 2 点 O，A の z 座標が 0 で，2 点 B，C の z 座標が 1 であるから，四面体 OABC の平面 $z=t$ による断面は，線分 AB，AC，OC，OB を $t:1-t$ に内分する点を頂点とする四角形である．これらの頂点を順に D，E，F，G とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{GF}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\overrightarrow{\mathrm{FE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$ より $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，この断面積を S とすると

$$S=t(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2t(1-t)=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$0\leqq t\leqq 1$ より，断面積は，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．　■

3 (1) $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x)=0$ の解であるから，
$f(x)$ は，$(x-w)(x-\overline{w})$，すなわち，x^2-x+1 を因数にもつ．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+ax^2+bx+c \\ &= (x^2-x+1)(x+a+1) \\ &\qquad\qquad +(a+b)x-a+c-1 \end{aligned}$$

したがって　　$a+b=0,\quad -a+c-1=0$
よって　　$\boldsymbol{a=c-1,\ \ b=1-c}$

(2) (1) の結果から　$f(x)=x^3+(c-1)x^2+(1-c)x+c$
ゆえに　　$f(1)=c+1,\ f(-1)=3c-3$
$f(1)$ を 7 で割ると 4 余るから

$$c+1\equiv 4 \quad \text{ゆえに} \quad c\equiv 3 \pmod 7$$

したがって，整数 k を用いて　　$c=7k+3\cdots$①
$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るから

$$3c-3\equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad 4\cdot 3c=4\cdot 5 \quad \text{すなわち} \quad c\equiv 9 \pmod{11}$$

① を上式に代入すると

$$7k+3\equiv 9 \quad \text{ゆえに} \quad 3\cdot 7k\equiv 3\cdot 6 \quad \text{すなわち} \quad k\equiv 4 \pmod{11}$$

したがって，整数 ℓ を用いて　　$k=11\ell+4$
これを ① に代入すると　$c=7(11\ell+4)+3=77\ell+31$
c の絶対値が 40 以下であるから

$$c=31 \quad \text{ゆえに} \quad a=30,\ \ b=-30 \quad \cdots(*)$$

(1) の結果から

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+a+1)$$

$(*)$ をこれに代入して

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+31)$$

$f(x)=0$ の解は　　$\boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ -31}$ ■

4 (1) X が 5 で割り切れない，すなわち，4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0，X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\frac{625}{1296} + \frac{500}{1296}\right) = \mathbf{\frac{19}{144}}$$

(2) X が 2 で割り切れない，すなわち，4 回とも奇数の目が出る確率を q_0，X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - (q_0 + q_1) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \mathbf{\frac{37}{48}}$$

(3) X が 100 の倍数となるは，出る目の組合せが次の (i)〜(iv) の場合である．

(i) $\{\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ 5,\ 5\}$ のとき $(\mathrm{A} = 2,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

(ii) $\{4,\ 5,\ 5,\ \mathrm{B}\}$ のとき $(\mathrm{B} = 1,\ 2,\ 3,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

(iii) $\{4,\ 4,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

(iv) $\{4,\ 5,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

(i)〜(iv) より，求める確率は $\dfrac{24+48+6+4}{1296} = \dfrac{82}{1296} = \mathbf{\dfrac{41}{648}}$ ■