

令和2年度 九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部, 教育学部, 法学部, 経済学部(経済・経営))

- 1 $a \geq 0$ とする。2つの放物線 $C_1: y = x^2$, $C_2: y = 3(x - a)^2 + a^3 - 40$ を考える。以下の問いに答えよ。
- (1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ。
 - (2) a が(1)で求めた範囲を動くとき, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S の最大値を求めよ。
- 2 座標空間内の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, p)$, $C(q, r, s)$ を頂点とする四面体が正四面体であるとする。ただし, $p > 0$, $s > 0$ とする。以下の問いに答えよ。
- (1) p, q, r, s の値を求めよ。
 - (2) z 軸に垂直な平面で正四面体 $OABC$ を切ったときの断面積の最大値を求めよ。
- 3 a, b, c を整数とし, i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $f\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき, 以下の問いに答えよ。
- (1) a, b を c を用いて表せ。
 - (2) $f(1)$ を7で割ると4余り, $f(-1)$ を11で割ると2余るとする。 c の絶対値が40以下であるとき, 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。
- 4 4個のサイコロを同時に投げるとき, 出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。
- (1) X が25の倍数になる確率を求めよ。
 - (2) X が4の倍数になる確率を求めよ。
 - (3) X が100の倍数になる確率を求めよ。

解答例

□1 (1) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - \{3(x-a)^2 + a^3 - 40\} \\ &= -(2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

2次方程式

$$2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40 = 0 \quad \dots (**)$$

の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-3a)^2 - 2(a^3 + 3a^2 - 40) \\ &= -2a^3 + 3a^2 + 80 = (4-a)(2a^2 + 5a + 20) \\ &= (4-a) \left\{ 2 \left(a + \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{135}{8} \right\} \end{aligned}$$

方程式 (**) が異なる 2 つの実数解をもつから, $D > 0$ より

$a \geq 0$ に注意して, $4 - a > 0$ を解くと $0 \leq a < 4$

(2) 2次方程式 (**) の解を α , β とおくと ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{3a + \sqrt{D/4}}{2} - \frac{3a - \sqrt{D/4}}{2} = \sqrt{D/4} \\ f(x) - g(x) &= -2(x - \alpha)(x - \beta) \end{aligned}$$

$\alpha \leq x \leq \beta$ において, $f(x) - g(x) \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - g(x)\} dx = -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}\{D/4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$h(a) = D/4 \text{ とおくと } S = \frac{1}{3}\{h(a)\}^{\frac{3}{2}}$$

$$h(a) = -2a^3 + 3a^2 + 80 \text{ より } h'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a - 1)$$

a	0	...	1	...	(4)
$h'(a)$		+	0	-	
$h(a)$		↗	81	↘	

よって, 求める S の最大値は $\frac{1}{3}\{h(1)\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 81^{\frac{3}{2}} = \mathbf{243}$

- 2 (1) 4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, p)$, $C(q, r, s)$ について,
 $OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $OB = OA$ であるから

$$\sqrt{1^2 + p^2} = \sqrt{2} \quad \text{条件 } p > 0 \text{ により } p = 1$$

$OC^2 = AC^2 = BC^2 = 2$ であるから

$$(*) \begin{cases} q^2 + r^2 + s^2 = 2 \\ (q-1)^2 + (r-1)^2 + s^2 = 2 \\ (q-1)^2 + r^2 + (s-1)^2 = 2 \end{cases}$$

(*) の第 2 式, 第 3 式をそれぞれ整理すると

$$\begin{aligned} (q^2 + r^2 + s^2 - 2) - 2(q + r - 1) &= 0, \\ (q^2 + r^2 + s^2 - 2) - 2(q + s - 1) &= 0 \end{aligned}$$

(*) の第 1 式を上 の 2 式に代入することにより

$$\begin{cases} q + r - 1 = 0 \\ q + s - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに } (**) \begin{cases} q = 1 - s \\ r = s \end{cases}$$

(**) を (*) の第 1 式に代入すると

$$(1 - s)^2 + s^2 + s^2 = 2 \quad \text{ゆえに } (s - 1)(3s + 1) = 0$$

$s > 0$ に注意して $s = 1$ (***) より $q = 0, r = 1$

よって $p = 1, q = 0, r = 1, s = 1$

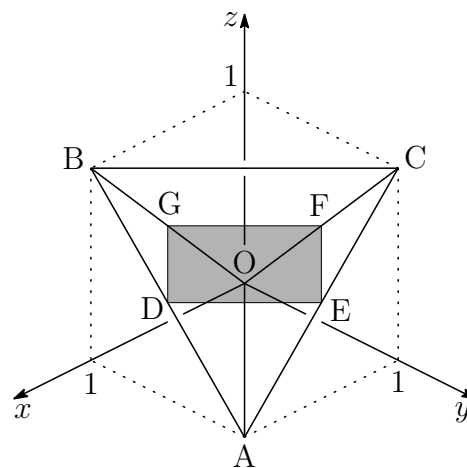
- (2) 2点 O, A の z 座標が 0 で, 2点 B, C の z 座標が 1 であるから, 四面体 $OABC$ の平面 $z = t$ による断面は, 線分 AB, AC, OC, OB を $t : 1 - t$ に内分する点を頂点とする四角形である. これらの頂点を順に D, E, F, G とおくと

$$\begin{aligned} \vec{DE} &= \vec{GF} = t\vec{BC} \\ \vec{GD} &= \vec{FE} = (1 - t)\vec{OA} \end{aligned}$$

$\vec{BC} = (-1, 1, 0)$, $\vec{OA} = (1, 1, 0)$ より $\vec{BC} \perp \vec{OA}$, この断面積を S とすると

$$S = t(1 - t)|\vec{BC}||\vec{OA}| = 2t(1 - t) = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$0 \leq t \leq 1$ より, 断面積は, $t = \frac{1}{2}$ のとき, 最大値 $\frac{1}{2}$ をとる.



- 3 (1) $w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x) = 0$ の解であるから、 $f(x)$ は、 $(x - w)(x - \bar{w})$ 、すなわち、 $x^2 - x + 1$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c \\ &= (x^2 - x + 1)(x + a + 1) \\ &\quad + (a + b)x - a + c - 1 \end{aligned}$$

したがって $a + b = 0, \quad -a + c - 1 = 0$

よって $a = c - 1, \quad b = 1 - c$

- (2) (1) の結果から $f(x) = x^3 + (c - 1)x^2 + (1 - c)x + c$
 ゆえに $f(1) = c + 1, \quad f(-1) = 3c - 3$
 $f(1)$ を 7 で割ると 4 余るから

$$c + 1 \equiv 4 \quad \text{ゆえに} \quad c \equiv 3 \pmod{7}$$

したがって、整数 k を用いて $c = 7k + 3 \cdots \textcircled{1}$

$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るから

$$3c - 3 \equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad 4 \cdot 3c = 4 \cdot 5 \quad \text{すなわち} \quad c \equiv 9 \pmod{11}$$

① を上式に代入すると

$$7k + 3 \equiv 9 \quad \text{ゆえに} \quad 3 \cdot 7k \equiv 3 \cdot 6 \quad \text{すなわち} \quad k \equiv 4 \pmod{11}$$

したがって、整数 l を用いて $k = 11l + 4$

これを ① に代入すると $c = 7(11l + 4) + 3 = 77l + 31$

c の絶対値が 40 以下であるから

$$c = 31 \quad \text{ゆえに} \quad a = 30, \quad b = -30 \quad \cdots (*)$$

(1) の結果から

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x + a + 1)$$

(*) をこれに代入して

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 31)$$

$f(x) = 0$ の解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \quad -31$

- 4 (1) X が 5 で割り切れない, すなわち, 4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0 , X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\frac{626}{1296} + \frac{500}{1296}\right) = \frac{19}{144}$$

- (2) X が 2 で割り切れない, すなわち, 4 回とも奇数の目が出る確率を q_0 , X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない, すなわち, 4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は, これらの余事象の確率であるから

$$1 - (q_0 + q_1) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \frac{37}{48}$$

- (3) X が 100 の倍数となるは, 出る目の組合せが次の (i)~(iv) の場合である.

- (i) $\{A, A, 5, 5\}$ のとき ($A = 2, 6$)

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

- (ii) $\{4, 5, 5, B\}$ のとき ($B = 1, 2, 3, 6$)

$$\frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

- (iii) $\{4, 4, 5, 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

- (iv) $\{4, 5, 5, 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

- (i)~(iv) より, 求める確率は $\frac{24 + 48 + 6 + 4}{1296} = \frac{82}{1296} = \frac{41}{648}$