平成 31 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

$\boxed{1}$ 表に 3，裏に 8 が書かれた硬貨がある。この硬貨を 10 回投げるとき，出た数字 10 個の積が 8 桁になる確率を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$\boxed{2}$ k を実数とする。3 次関数 $y = x^3 - kx^2 + kx + 1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき，k の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標空間内の 3 点 A(1, 2, 3)，B(3, 2, 3)，C(4, 5, 6) を通る平面を α とし，平面 α 上にない点 P(6, p, q) を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から平面 α に下ろした垂線と α との交点を H とする。線分 PH の長さを p，q を用いて表せ。

(2) 点 P が $(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$ を満たしながら動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ 0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2+2)g(x) + 7$$
$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 硬貨を10回投げて，裏が出た回数を n とすると，出た数字10個の積は

$$8^n \cdot 3^{10-n}$$

これが8桁の数であるから　$10^7 \leqq 8^n \cdot 3^{10-n} < 10^8$

辺々の常用対数をとると　$7 \leqq n\log_{10}8 + (10-n)\log_{10}3 < 8$

$\log_{10}8 = 3\log_{10}2 = 3\times 0.3010 = 0.9030$，$\log_{10}3 = 0.4771$ より

$$7 \leqq 0.9030n + 0.4771(10-n) < 8$$

整理すると　$22290 \leqq 4259n < 32290$　ゆえに　$5 + \dfrac{995}{4259} \leqq n < 7 + \dfrac{2477}{4259}$

n は整数 $(0 \leqq n \leqq 10)$ であるから　$n = 6,\ 7$

よって，求める確率は

$${}_{10}\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = (210+120)\times\frac{1}{1024} = \boldsymbol{\frac{165}{512}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 1$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 - 2kx + k$

$f(x)$ は極大値と極小値をもつから，$f'(x) = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$

$$\beta - \alpha = \frac{k+\sqrt{k^2-3k}}{3} - \frac{k-\sqrt{k^2-3k}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{k(k-3)} \quad \cdots ①$$

$$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$$

極大値，極小値は，それぞれ $f(\alpha)$，$f(\beta)$ であるから

$$f(\alpha) - f(\beta) = \int_\beta^\alpha f'(x)\,dx = 3\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$= -3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

条件により，$f(\alpha) - f(\beta) = 4|k|^3$ であるから

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 = 4|k|^3 \quad ゆえに \quad \beta - \alpha = 2|k| \quad \cdots ②$$

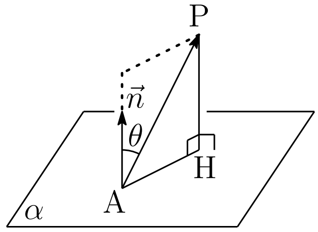
①，② より　$2|k| = \dfrac{2}{3}\sqrt{k(k-3)}$　ゆえに　$k(8k+3) = 0$

$k(k-3) > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{k = -\frac{3}{8}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) A(1, 2, 3)，B(3, 2, 3)，C(4, 5, 6)，P(6, p, q) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 0,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(5,\ p-2,\ q-3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトル，すなわち，α の法線ベクトルの 1 つを



$$\vec{n}=(0,\ 1,-1)$$

とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\mathrm{PH}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\cos\theta|,\quad \cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\vec{n}|}$$

よって $\mathrm{PH}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|0\cdot5+1\cdot(p-2)-1\cdot(q-3)|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}=\boldsymbol{\dfrac{|p-q+1|}{\sqrt{2}}}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の張る平行四辺形の面積を S とすると

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\sqrt{2^2(3\sqrt{3})^2-6^2}=6\sqrt{2}$$

四面体 ABCP の体積を V とすると [1]

$$V=\frac{1}{6}S\cdot\mathrm{PH}=\frac{1}{6}\cdot6\sqrt{2}\cdot\frac{|p-q+1|}{\sqrt{2}}=|p-q+1|$$

$(p-9)^2+(q-7)^2=1$ より，$p-9=\cos\theta$，$q-7=\sin\theta$ とおくと

$$p=\cos\theta+9,\quad q=\sin\theta+7$$

したがって $V=|p-q+1|=|(\cos\theta+9)-(\sin\theta+7)+1|$
$=|3-(\sin\theta-\cos\theta)|=3-\sqrt{2}\sin(\theta-45^\circ)$

ゆえに $3-\sqrt{2}\leqq V\leqq 3+\sqrt{2}$

よって 最大値 $\boldsymbol{3+\sqrt{2}}$，最小値 $\boldsymbol{3-\sqrt{2}}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai_bun_2016.pdf $\boxed{3}$ の解説を参照．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\begin{cases} f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2 \end{cases}$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とすると

$$\begin{cases} 2m=2+n & \cdots ① \\ 3n=\max(4+m,\ 2+n) & \cdots ② \end{cases}$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より　$3n=4+m$　ゆえに　$m=3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと　$m=n=2$

(ii) $4+m<2+n$ のとき，② より　$3n=2+n$　ゆえに　$n=1$
これを ① に代入すると，$m=\dfrac{3}{2}$ となり，不適.

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから，題意は成立する.

(2) $(*)$ の第 1 式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2)=(x^2+2)g(-x)+7$$

これと $(*)$ の第 1 式により　$g(-x)=g(x)$　$\cdots ③$
また，$(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3)=x^4f(-x)-3x^2g(-x)-6x^2-2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3)=x^4f(-x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$

これと $(*)$ の第 2 式より　$f(-x)=f(x)$
また，$(*)$ に $x=0$ を代入すると

$$f(0)=2g(0)+7,\quad g(0)=-2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0)=3$$

以上の結果から，$f(x)=ax^2+3$，$g(x)=px^2-2$ とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4+3=(x^2+2)(px^2-2)+7 \\ px^6-2=x^4(ax^2+3)-3x^2(px^2-2)-6x^2-2 \end{cases}$$

整理すると　$\begin{cases} ax^4=px^4+2(p-1)x^2 \\ px^6=ax^6-3(p-1)x^4 \end{cases}$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a=p,\quad p-1=0 \quad \text{これを解いて} \quad a=p=1$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2+3,\ \ g(x)=x^2-2}$