平成 30 年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

$\boxed{1}$ 座標平面内の曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接しているとする。ただし，a，b は実数，$c > 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) a，b をそれぞれ c を用いて表せ。

(2) この曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S を最小にする c の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示

$$101101101101101101_{(2)}$$

をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。

$\boxed{3}$ 平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し，

$$L = \mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ および $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくとき，次の等式を示せ。

$$L = 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

(2) L を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また，L の最小値は

$$\frac{1}{3}(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2)$$

であることを示せ。

4 3つの部品 a，b，c からなる製品が多数入った箱がある。製品を 1 つ取り出したとき，部品 a，b，c が不良品である確率について次のことがわかっている。

- 部品 a が不良品である確率は p である。
- 部品 a が不良品でないとき，部品 b が不良品である確率は q である。
- 部品 a が不良品であるとき，部品 b も不良品である確率は $3q$ である。
- 部品 b が不良品でないとき，部品 c が不良品である確率は r である。
- 部品 b が不良品であるとき，部品 c も不良品である確率は $5r$ である。

ただし，$0 < p < 1$，$0 < q < \frac{1}{3}$，$0 < r < \frac{1}{5}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 製品を 1 つ取り出したとき，部品 a，b の少なくとも一方が不良品である確率を p，q を用いて表せ。

(2) 製品を 1 つ取り出したとき，部品 c が不良品である確率を p，q，r を用いて表せ。

(3) 製品を 1 つ取り出したところ部品 c が不良品であった。このとき，部品 b も不良品である確率を p，q を用いて表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接するから，曲線の方程式の x^3 の係数および定数項に注意して

$$y=(x-c)^2\left(x+\frac{1}{c}\right)\quad\cdots(*)$$

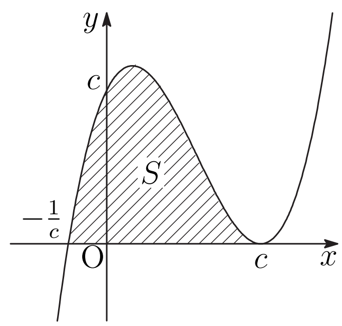
とおける．これを展開すると

$$y=x^3+\left(\frac{1}{c}-2c\right)x^2+(c^2-2)x+c$$

与えられた曲線の方程式と上式の同じ次数の項の係数を比較すると

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{c}-2c,\quad b=c^2-2}$$

(2) $(*)$ により $(c>0)$



$$\begin{aligned}S&=\int_{-\frac{1}{c}}^{c}\left(x+\frac{1}{c}\right)(c-x)^2\,dx\\&=\frac{1}{12}\left(c+\frac{1}{c}\right)^4\end{aligned}$$

$c>0,\ \dfrac{1}{c}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$c+\frac{1}{c}\geqq 2\sqrt{c\cdot\frac{1}{c}}=2$$

上式において，等号が成立するのは

$$c=\frac{1}{c}\quad すなわち\quad c=1$$

のときで，このとき S は最小となる．よって　$\boldsymbol{c=1}$

補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[1]．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$ であるから

$$2^n \text{ を 7 で割った余りは } \begin{cases} \boldsymbol{n \equiv 0 \pmod 3} \textbf{ のとき } \mathbf{1} \\ \boldsymbol{n \equiv 1 \pmod 3} \textbf{ のとき } \mathbf{2} \\ \boldsymbol{n \equiv 2 \pmod 3} \textbf{ のとき } \mathbf{4} \end{cases}$$

(2) $$m = 101101101101101101_{(2)}$$

これに (1) の結果を用いると，法 7 に関して

$$m = \sum_{k=0}^{5}(2^2+1)2^{3k} \equiv \sum_{k=0}^{5} 5\cdot 1 = 30 \equiv 2 \pmod 7$$

よって，求める余りは　**2**

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $L = \mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より

$$\begin{aligned} L &= |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 \\ &= |\vec{a}-\vec{x}|^2 + |\vec{b}-\vec{x}|^2 + |\vec{c}-\vec{x}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{x} + |\vec{x}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{x} + |\vec{x}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{x} + |\vec{x}|^2 \\ &= 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とし，$\vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とおくと

$$\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 3\vec{g}$$

これを (1) に代入すると

$$\begin{aligned} L &= 3|\vec{x}|^2 - 6\vec{g}\cdot\vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\ &= 3(|\vec{x}|^2 - 2\vec{g}\cdot\vec{x} + |\vec{g}|^2) + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 3|\vec{g}|^2 \\ &= 3|\vec{x}-\vec{g}|^2 + \frac{1}{3}\{3|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2 + 3|\vec{c}|^2 - |3\vec{g}|^2\} \end{aligned}$$

ここで
$$\begin{aligned} &3|\vec{a}|^2 + 3|\vec{b}|^2 + 3|\vec{c}|^2 - |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 \\ &= 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b}-\vec{a}|^2 + |\vec{c}-\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{c}|^2 = (\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2) \end{aligned}$$

したがって　$$L = |\vec{x}-\vec{g}|^2 + \frac{1}{3}(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2)$$

よって，$\vec{x} = \vec{g}$，すなわち，P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心であるとき，
L は最小値 $\dfrac{1}{3}(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2)$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a，b，c がそれぞれ不良品である事象をそれぞれ A，B，C とすると

$$P(A) = p,\ P_{\overline{A}}(B) = q,\ P_A(B) = 3q,\ P_{\overline{B}}(C) = r,\ P_B(C) = 5r$$

(1) $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{1 - P(A)}$，$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ より

$$P(\overline{A} \cap B) = \{1 - P(A)\}P_{\overline{A}}(B) = (1-p)q$$
$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = p \cdot 3q = 3pq$$

ゆえに　$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$
$= 3pq + (1-p)q = (1+2p)q$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= p + (1+2p)q - 3pq = \boldsymbol{p + q - pq} \end{aligned}$$

(2) $P_{\overline{B}}(C) = \dfrac{P(\overline{B} \cap C)}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(\overline{B} \cap C)}{1 - P(B)}$，$P_B(C) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(B)}$ より

$$P(\overline{B} \cap C) = \{1 - P(B)\}P_{\overline{B}}(C) = \{1 - (1+2p)q\}r$$
$$P(B \cap C) = P(B)P_B(C) = (1+2p)q \cdot 5r = 5(1+2p)qr$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\overline{B} \cap C) + P(B \cap C) \\ &= \{1 - (1+2p)q\}r + 5(1+2p)qr \\ &= \{1 + 4(1+2p)q\}r = \boldsymbol{(1 + 4q + 8pq)r} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，求める確率は

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{5(1+2p)qr}{(1+4q+8pq)r} = \boldsymbol{\frac{5(1+2p)q}{1+4q+8pq}}$$